

**CENTRE REGIONAL DES MÉTIERS
DE L'ÉDUCATION ET DE LA FORMATION
MARRAKECH-SAFI**

CPA-CRMEF

PHYSIQUE-1

Cours :

ÉLECTRONIQUE 1

**ÉLECTRONIQUE ANALOGIQUE
AGRÉGATION DE PHYSIQUE
OPTION PHYSIQUE
AGP-1**

Par :

ABDELFETTAH HABIB

2016

Chapitre 1

Dipôles électrocinétiques

1.1 Caractéristiques d'un dipôle

1.1.1 Définition

Un dipôle est un composant ou un circuit qui possède deux bornes (pôles). Par exemple, les résistors, les bobines, les condensateurs, les générateurs, les diodes, les piles,...sont des dipôles électrocinétiques.

1.1.2 Dipôle linéaire

En général, la relation qui relie la tension $u(t)$ au courant $i(t)$ est une équation différentielle.

Un **dipôle linéaire** est décrit par une équation différentielle linéaire à *coefficients constants* de la forme :

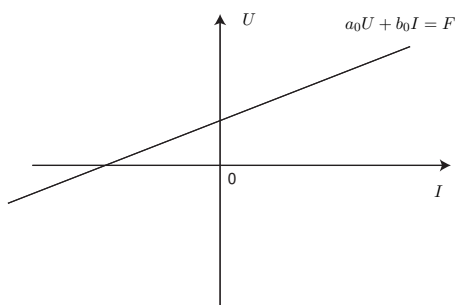
$$a_0 u + a_1 \frac{du}{dt} + a_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \dots + b_0 i + b_1 \frac{di}{dt} + b_2 \frac{d^2 i}{dt^2} + \dots = F(t)$$

Exemples de dipôles linéaires :

- Résistor de résistance R : $u = R i$ ($a_0 = 1, b_0 = -R, F = 0$).
- Condensateur : $i = C \frac{du}{dt}$ ($b_0 = 1, a_0 = 0, a_1 = -C, F = 0$).
- Bobine : $u = L \frac{di}{dt}$.

La caractéristique **statique** (U, I) d'un dipôle linéaire est une droite :

$$a_0 U + b_0 I = F$$



1.1.3 Dipôle actif ou passif

- Si $F = 0$, la caractéristique passe par l'origine : le dipôle est dit passif.
- Si $F \neq 0$, la caractéristique ne passe pas par l'origine : le dipôle est dit actif

Remarque : Si la caractéristique est symétrique par rapport à l'origine, le dipôle est dit symétrique. On peut alors permuter ses bornes de connexion dans un circuit sans affecter le fonctionnement.

1.1.4 Tracé de la caractéristique d'un dipôle

La caractéristique d'un dipôle D est la relation qui relie $u(t)$ et $i(t)$. En régime continu, on parle d'une caractéristique statique tension-courant (U, I) et en régime variable on parle de caractéristique dynamique tension-courant $(u(t), i(t))$.

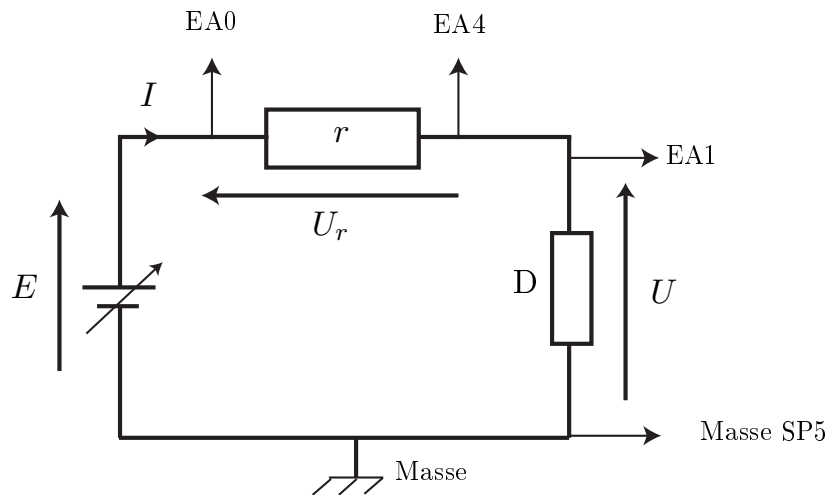
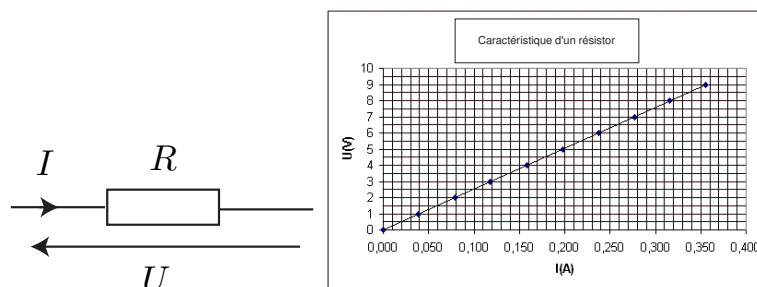


FIGURE 1.1 – Tracé de la caractéristique d'un dipôle D à l'aide de la carte d'acquisition Sysam-SP5

Après avoir réalisé le montage, on lance l'acquisition et on fait varier lentement la tension E pour avoir la caractéristique (U, I) .

1.1.4.1 Caractéristique d'un résistor (conducteur ohmique)

✓ Caractéristique statique : (Résultat de l'expérience)



✓ Équation différentielle en convention récepteur :

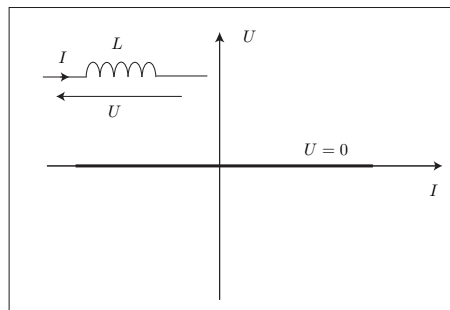
La modélisation mathématique donne l'équation suivante :

$$u = Ri$$

On retrouve donc la loi d'OHM pour un résistor de résistance R .

Remarque : En convention générateur, la loi d'OHM s'écrit : $u = -Ri$.

1.1.4.2 Caractéristique d'une bobine idéale

✓ Caractéristique statique :✓ Équation différentielle (en convention récepteur) :

En régime dynamique, la relation entre i et u est :

$$u = L \frac{di}{dt}$$

L est l'inductance (propre) de la bobine en Henry (*symbole* : H).

- En régime statique (continu), la bobine est équivalente à un fil ($U = 0, \forall I$).
- En régime sinusoïdal établi à la pulsation ω on a :

$i = I_m \sin(\omega t) \rightarrow u = I_m L \omega \cos(\omega t)$ d'où la caractéristique dynamique de la bobine :

$$\left(\frac{i}{I_m}\right)^2 + \left(\frac{u}{L\omega I_m}\right)^2 = 1$$

C'est l'équation d'une ellipse.

1.1.4.3 Condensateur idéal

✓ Caractéristique statique de C :✓ Équation différentielle (en convention récepteur) :

$$i = C \frac{du}{dt}$$

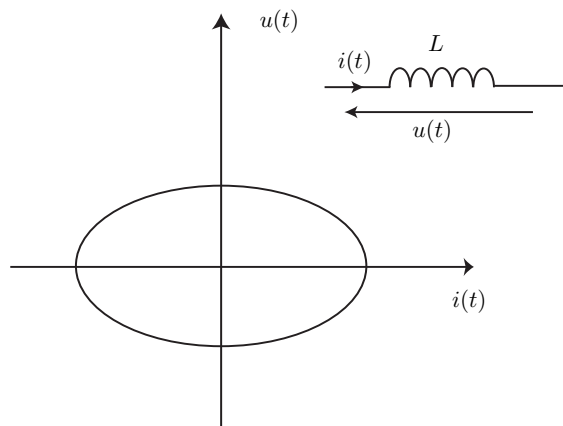
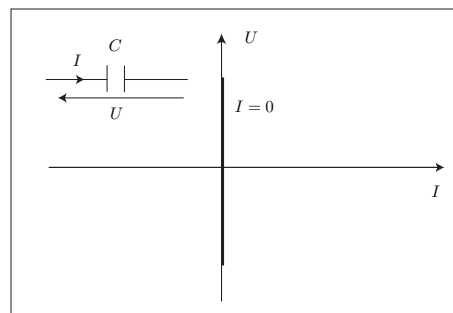


FIGURE 1.2 – Caractéristiques dynamiques d'une bobine.



C est la capacité du condensateur en Farad (*symbole* : F).

- En régime statique (continu), le condensateur est équivalente à un interrupteur ouvert ($I = 0, \forall U$).
- En régime sinusoïdal établie à la pulsation ω on a : $u = U_m \sin(\omega t) \rightarrow i = U_m C \omega \cos(\omega t)$ d'où :

$$\left(\frac{u}{U_m}\right)^2 + \left(\frac{i}{C\omega U_m}\right)^2 = 1$$

C'est l'équation d'une ellipse.

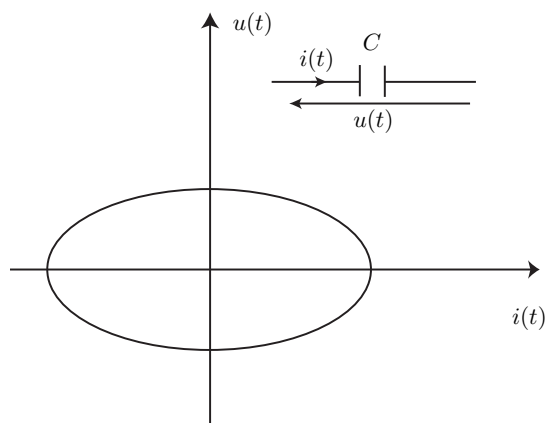


FIGURE 1.3 – Caractéristiques dynamiques d'un condensateur.

- La charge électrique q emmagasinée dans le condensateur reliée au courant i par :

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

d'où la relation entre $q(t)$ et $u(t)$:

$$q(t) = Cu(t)$$

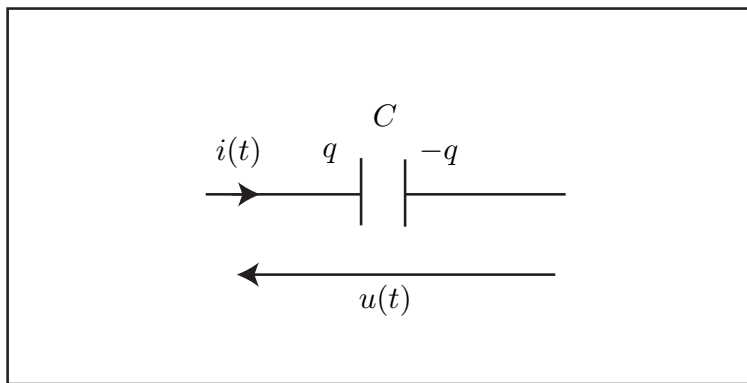


FIGURE 1.4 – Charge portée par un condensateur en convention récepteur.

1.2 Association des dipôles

1.2.1 Équivalence entre deux dipôles

Deux dipôles D et D' sont équivalents (de point de vu électrique) si lorsque $u = u'$ alors $i = i'$ et vice versa.

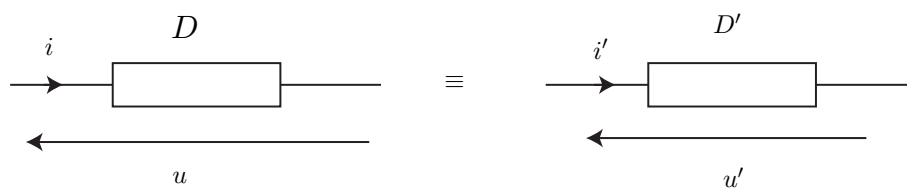


FIGURE 1.5 – Deux dipôles équivalent : $u = u'$ et $i = i'$.

1.2.2 Association en série

Deux dipôles sont associés en série si une de leurs bornes est commune et s'ils sont parcourus par le même courant.

1.2.2.1 Association série de résistors

On a : $u = u_1 + u_2 = R_1i + R_2i = (R_1 + R_2)i = R_{eq}i$
d'où la résistance équivalente des deux résistors est :

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

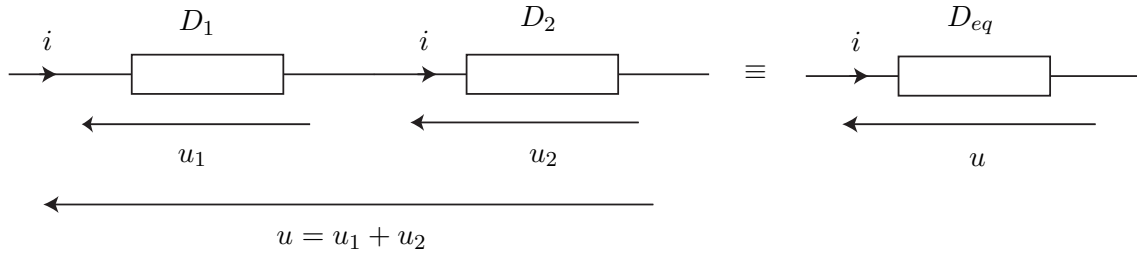


FIGURE 1.6 – Association série de deux dipôles.

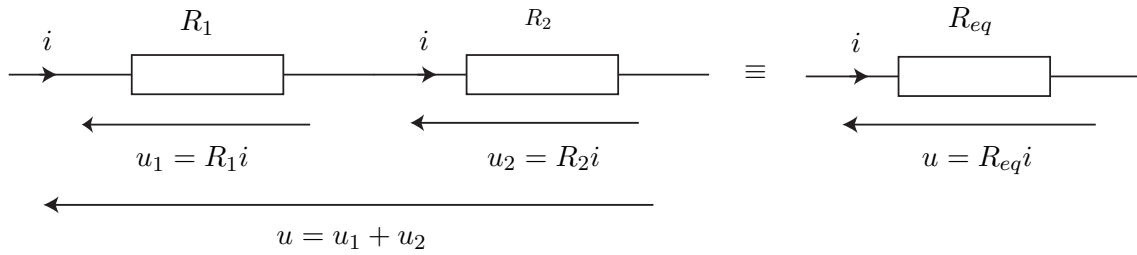


FIGURE 1.7 – Association série de deux résistors.

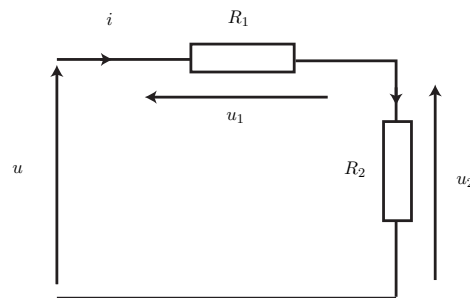
Nous pouvons généraliser cette formule à un nombre quelconque de résistors montés en série :

$$R_{eq} = \sum_k R_k$$

1.2.2.2 Pont diviseur de tension

La différence de potentiel aux bornes d'un dipôle en fonction de celle aux bornes de l'association des dipôles en série :

$$u_2 = u \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

FIGURE 1.8 – Deux résistances en **série** forment un diviseur de tension.

1.2.2.3 Association série de bobines

L'inductance équivalente des deux est :

$$L_{eq} = L_1 + L_2$$

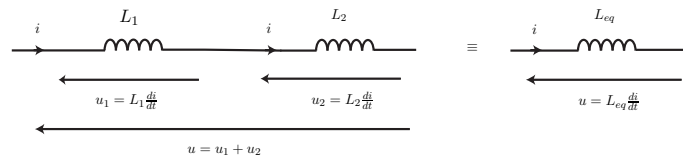


FIGURE 1.9 – Association série de deux bobines.

Nous pouvons généraliser cette formule à un nombre quelconque de bobines :

$$L_{eq} = \sum_k L_k$$

1.2.2.4 Association série de condensateurs

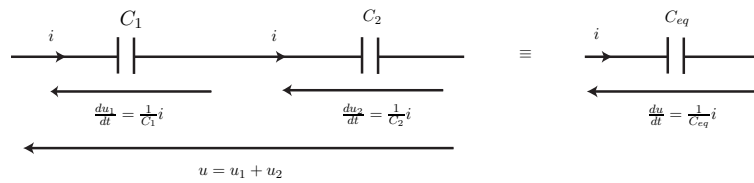


FIGURE 1.10 – Association série de deux condensateurs.

La capacité équivalente des deux est telle que :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Nous pouvons généraliser cette formule à un nombre quelconque de bobines :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_k \frac{1}{C_k}$$

1.2.3 Association en parallèle

Des dipôles sont associés en parallèles s'ils sont reliés aux deux mêmes noeuds et donc soumis à la même différence de p

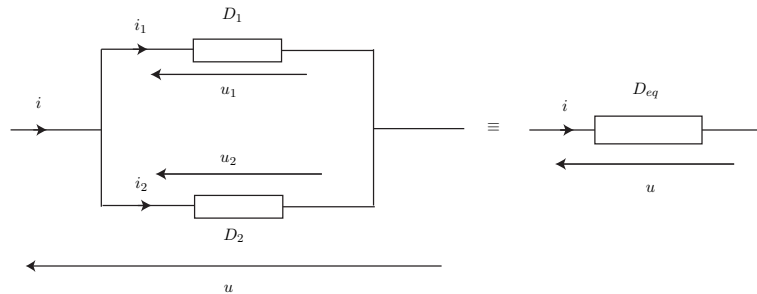


FIGURE 1.11 – Association parallèle de deux dipôles : $u = u_1 = u_2$ et $i = i_1 + i_2$.

1.2.3.1 Association parallèle de résistors

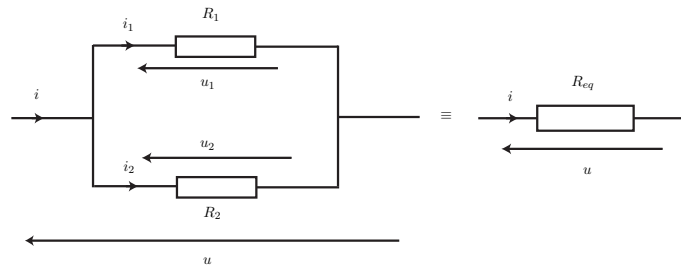


FIGURE 1.12 – Association parallèle de deux résistors.

La résistance équivalente des deux est telle que :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \rightarrow \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Nous pouvons généraliser cette formule à un nombre quelconque de résistors :

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_k \frac{1}{R_k} \quad \text{ou bien} \quad G_{eq} = \sum_k G_k}$$

1.2.3.2 Diviseur de courant

Lorsque deux résistors sont montés en parallèle, le courant principal i est divisé en deux courants i_1 et i_2 on a :

$$\boxed{i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i}$$

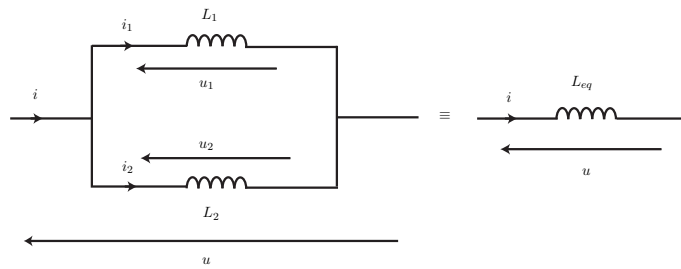


FIGURE 1.13 – Association parallèle de deux bobines.

1.2.3.3 Association parallèle de bobines

L'inductance équivalente des deux est telle que :

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \rightarrow \quad L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Nous pouvons généraliser cette formule à un nombre quelconque de bobines :

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_k \frac{1}{L_k}$$

1.2.3.4 Association parallèle de condensateurs

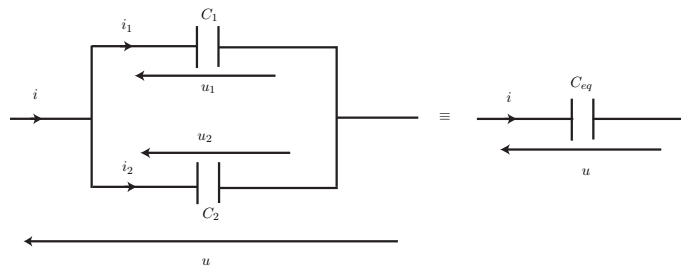


FIGURE 1.14 – Association parallèle de deux condensateurs.

La capacité équivalente des deux est :

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Nous pouvons généraliser cette formule à un nombre quelconque de condensateurs :

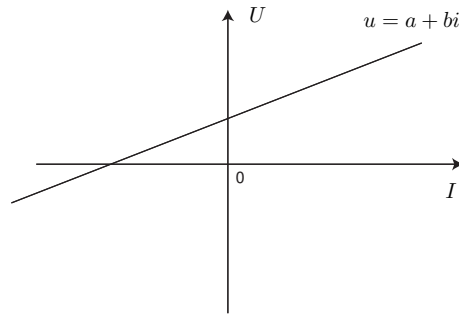
$$C_{eq} = \sum_k C_k$$

1.3 Les dipôles actifs (sources)

1.3.1 Caractéristique

La caractéristique **statique** (U, I) d'un dipôle linéaire actif est une droite affine qui ne passe pas par l'origine :

$$u = a + bi \quad \text{ou} \quad i = a' + b'u$$



1.3.2 Modèle de THÉVENIN

Si on choisit de modéliser un dipôle linéaire actif par :

$$u = a + bi$$

Alors, un circuit **linéaire** vu entre deux point A et B est équivalent à un dipôle linéaire actif (générateur de de tension) réel (E_{th}, R_{th}).

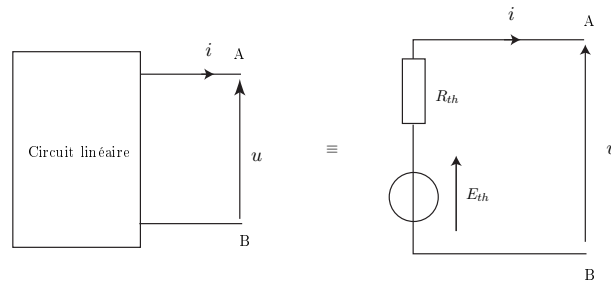


FIGURE 1.15 – Modèle de THÉVENIN d'un circuit linéaire.

avec :

- $a = E_{th}$: la f.é.m du générateur de THEVENIN
- $b = R_{th}$: sa résistance interne

On a :

$$u = E_{th} - R_{th}i$$

1.3.3 Modèle de NORTON

Si on choisit de modéliser un dipôle linéaire actif par :

$$i = a' + b'u$$

On peut modéliser le circuit **linéaire** vue entre deux point A et B par à un générateur de courant réel (I_N, R_N).

avec :

- $a' = I_N$: le c.é.m du générateur de NORTON
- $b' = R_N$: sa résistance interne

On a :

$$i = I_N - \frac{u}{R_N}$$

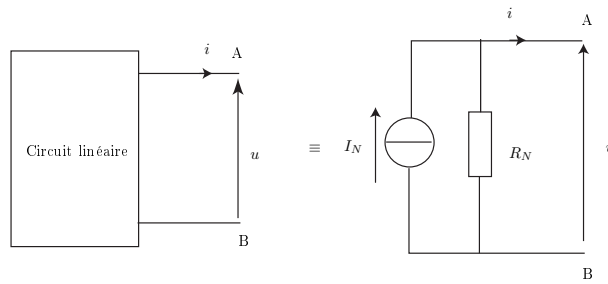


FIGURE 1.16 – Modèle de NORTON d'un circuit linéaire.

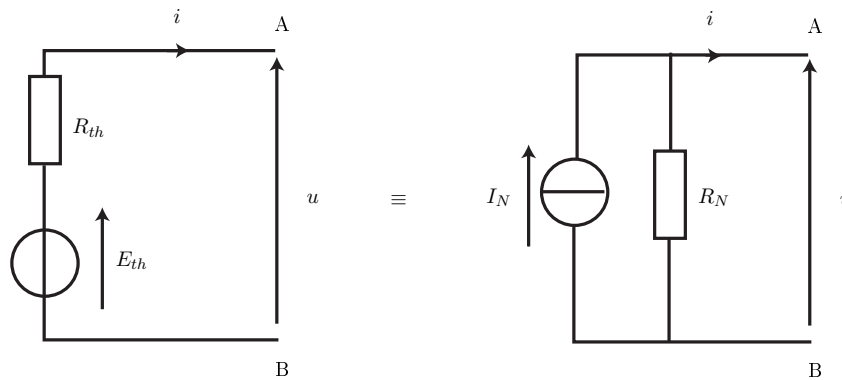


FIGURE 1.17 – Équivalence THEVENIN-NORTON.

1.3.4 Équivalence THEVENIN-NORTON

Les deux modèles précédents représentent le même circuit, ils sont donc équivalents :

On a :

$$u = E_{th} - R_{th}i \quad \text{et} \quad i = I_N - \frac{u}{R_N} \quad \text{quelles que soient les valeurs de } u \text{ et de } i$$

on déduit alors que :

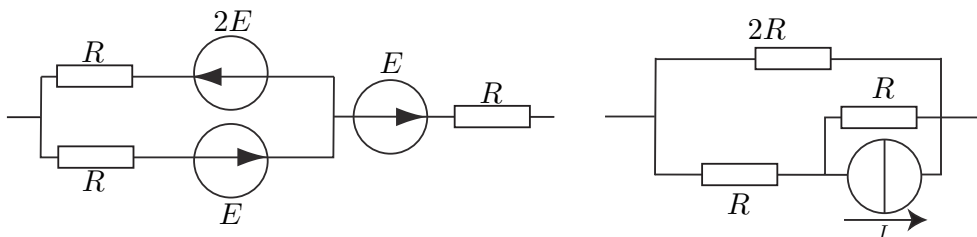
$$\boxed{E_{th} = R_N I_N \quad \text{et} \quad R_{th} = R_N}$$

Remarque : il faut faire attention au sens de I_N et E_{th} , elles sont dans le même sens que i .

1.3.5 Exemples : TD

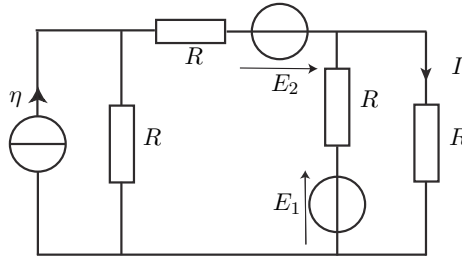
1.3.5.1 Exemple 1

Déterminer les modèles de THÉVENIN et de NORTON équivalents aux dipôles suivants :



1.3.5.2 Exemple 2 :

Soit le réseau ci-dessous où les générateurs de tension et de courant sont autonomes. Calculer l'intensité du courant I en utilisant l'équivalence THEVENIN-NORTON. Vérifier vos résultats par une simulation Pspice.



1.3.6 Calcul des éléments des deux modèles

Calcul de E_{th} :

La f.e.m du générateur de THEVENIN est calculé en imposant $i = 0$ puis on calcule $u = E_{th}$:

$$E_{th} = u \quad \text{lorsque} \quad i = 0.$$

Calcul de R_{th} :

La résistance interne du générateur de THEVENIN est calculé en imposant que $E_{th} = 0$. pour cela on **doit éteindre toutes les sources autonomes**.

$$R_{th} = -\frac{u}{i} \quad \text{lorsque les source autonomes sont éteintes.}$$

En d'autre terme, R_{th} est la résistance équivalente du dipôle AB lorsque les source autonomes sont éteintes.

Exemple :.....TD

Calcul de I_N :

Le c.e.m du générateur de NORTON est calculé en imposant $u = 0$ puis on calcule $i = I_N$:

$$I_N = i \quad \text{lorsque} \quad u = 0 \quad (\text{on met un court-circuit entre A et B}).$$

Calcul de R_N :

La résistance interne du générateur de NORTON est calculée de la même manière que celle de THEVENIN :

$$R_N = R_{th} = -\frac{u}{i} \quad \text{lorsque les source autonomes sont éteintes.}$$

En d'autre terme, R_N est la résistance équivalente du dipôle AB lorsque les source autonomes sont éteintes.

Exemple :.....TD

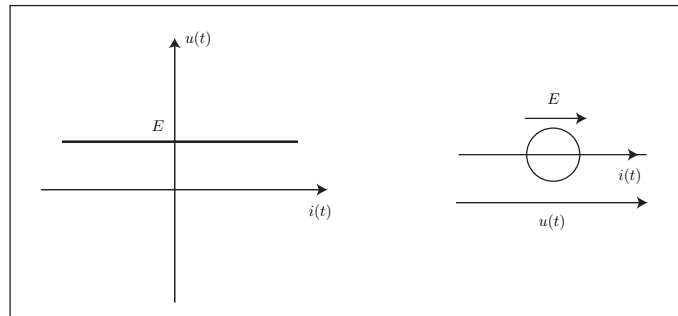


FIGURE 1.18 – Symbole et caractéristique d’une source idéale de tension.

1.3.7 Sources idéales (autonomes)

1.3.7.1 Source de tension

Un dispositif idéal qui impose une différence de potentiel **constante** aux bornes du circuit auquel il est relié, quelle que soit l’intensité du courant qui le traverse.

Source idéale de tension : $u = E \quad ; \quad \forall i$

E est la *force électromotrice* (f.é.m) de la source (ou tension à vide).

1.3.7.2 Association série de sources de tension

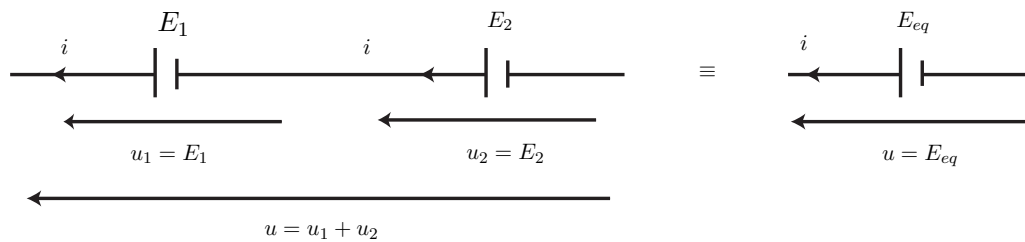


FIGURE 1.19 – Association série de deux condensateurs.

La f.e.m équivalente des deux est telle que :

$$E_{eq} = E_1 + E_2$$

Nous pouvons généraliser cette formule à un nombre quelconque de sources :

$$E_{eq} = \sum_k \varepsilon_k E_k$$

$\varepsilon_k = +1$ si l’orientation de E_k est identique à celle de i et $\varepsilon_k = -1$ dans le cas contraire.

Remarque : on ne peut pas associer deux sources de tensions idéales en parallèles.

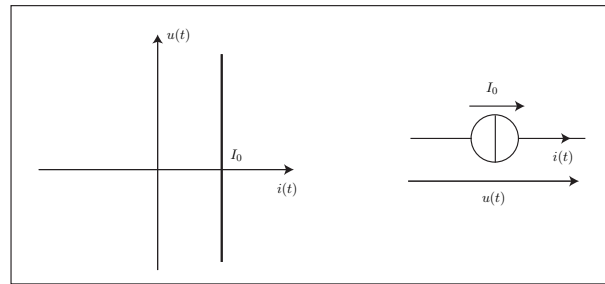


FIGURE 1.20 – Symbole et caractéristique d’une source idéale de courant.

1.3.7.3 Sources de courant

un dispositif idéal qui débite un courant d’intensité constante dans le circuit auquel il est relié quelle que soit la tension à ses bornes.

$$\text{Source idéale de courant : } i = I_0 \quad ; \quad \forall u$$

I_0 est le *courant électromoteur* (c.e.m) de la source (ou courant de court-circuit).

1.3.7.4 Association parallèle de sources de courant

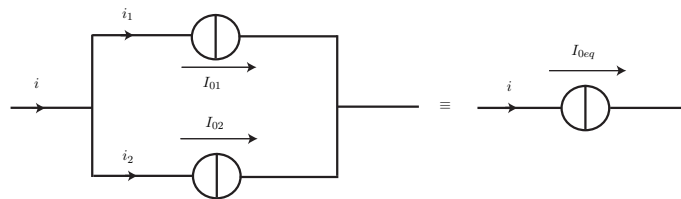


FIGURE 1.21 – Association parallèle de deux sources de courant.

Le c.é.m équivalent des deux est :

$$I_{0eq} = I_{01} + I_{02}$$

Nous pouvons généraliser cette formule à un nombre quelconque de sources :

$$I_{0eq} = \sum_k \varepsilon_k I_{0k}$$

$\varepsilon_k = +1$ si I_{0k} est de même sens que i et $\varepsilon_k = -1$ dans le cas contraire.

1.3.8 Sources commandées

La notion de source commandée ou liée, est utilisée pour modéliser des interactions entre les différents éléments d’un réseau.

Une source commandée est une source de tension (ou de courant) dont la f.e.m. (ou le c.e.m.) dépend d’une grandeur électrique associée à un autre élément du circuit.

Exemple : Transformateur.

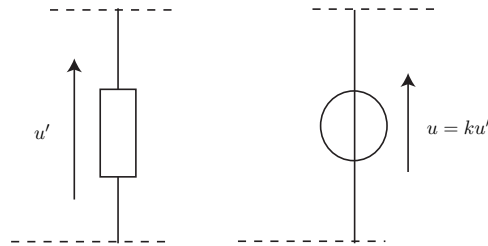


FIGURE 1.22 – Exemple : source de tension (u) commandée par une tension (u').

Un transformateur idéal est réalisé à l'aide de deux bobines B1 (primaire) et B2 (secondaire) couplées électromagnétiquement (exemple : transformateur 220 V /12 V).

On montre que les équations en régime linéaire basse fréquence sont :

$$u_2 = ku_1 \quad \text{et} \quad i_1 = -ki_2$$

où $k = \frac{n_1}{n_2}$ est le rapport de transformation du transformateur. Avec n_1 et n_2 sont les nombres de spires des bobines B1 et B2. D'où le modèle suivant :

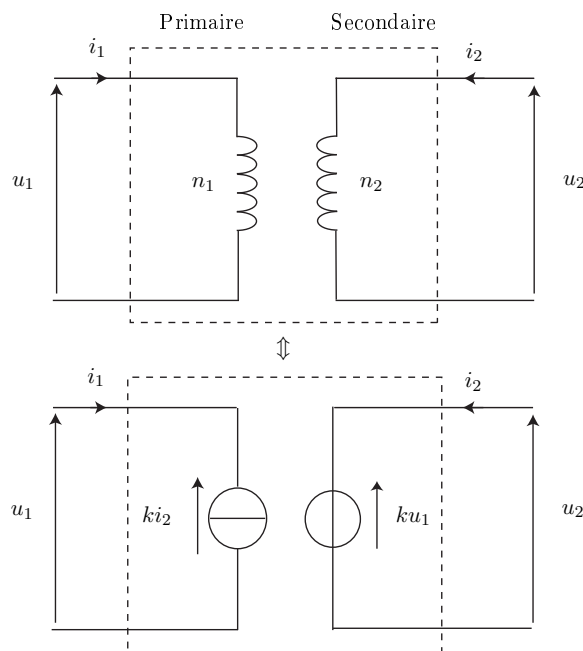


FIGURE 1.23 – Modélisation d'un transformateur idéal.

— $u_2 = ku_1$ est une source de tension commandée par la tension u_1 .

1.4 Aspect énergétique d'un dipôle

1.4.1 Définitions

Soit un dipôle soumis à une tension $u(t)$ et parcouru par un courant $i(t)$:

La **puissance instantanée** échangée par ce dipôle est :

$$p(t) = u(t) i(t)$$

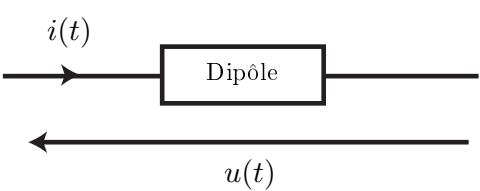
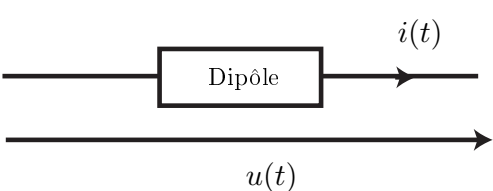
Son unité est le : **Watt (W)**.

La puissance $p(t)$ est reliée à la variation temporelle de l'énergie $E(t)$ (en Joule) par :

$$p(t) = \frac{\Delta E(t)}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad p(t) = \frac{dE(t)}{dt}$$

- Le constructeur indique la puissance maximale P_{max} que le dipôle peut supporter sans être détruit. Dans la caractéristique, la courbe $U = P_{max}/I$ est appelés hyperbole de dissipation.

La puissance est une grandeur **algébrique**. Selon la convention utilisée et le signe de $p(t)$ on peut déterminer si le dipôle cède ou reçoit effectivement la puissance :

Convention récepteur	Convention générateur
 <p>si $p(t) > 0$: dipôle absorbe la puissance</p> <p>si $p(t) < 0$: dipôle fournit la puissance</p>	 <p>si $p(t) > 0$: dipôle fournit la puissance</p> <p>si $p(t) < 0$: dipôle absorbe la puissance</p>

Remarque 1 :

Si $p(t) > 0$, la convention utilisée (récepteur ou générateur) traduit le vrai comportement du dipôle (*i.e.* récepteur qui absorbe effectivement la puissance ou générateur qui fournit effectivement la puissance).

Remarque 2 :

Il ne faut pas confondre entre la convention générateur ou récepteur (*i.e.* flèches utilisées pour faire les calculs) et le vrai comportement d'un dipôle (*i.e.* qui absorbe ou fournit la puissance).

1.4.2 Exemples : R,L,C

1.4.2.1 Puissance électrique reçue par une résistance

La puissance instantanée reçue par un résistor :

$$p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t)$$

cette puissance est absorbée par le résistor et transformée en énergie thermique par effet Joule (échauffement).

Application : Comment déterminer les grandeurs maximales pour une résistance en carbone ?

Réponse : Suivant la dimension de la résistance en carbone, celle-ci peut dissiper une puissance donnée. Les valeurs usuelles : $P_{\max} = 1/4W$, $P_{\max} = 1/2W$ et $P_{\max} = 1W$.

L'intensité maximale I_{\max} admissible par la résistance R est : $I_{\max} = \sqrt{\frac{P_{\max}}{R}}$.

La tension maximale U_{\max} admissible par la résistance R est : $U_{\max} = \sqrt{P_{\max}R}$.

Exemple : pour une résistance $R = 10 \text{ k}\Omega$; $P_{\max} = 1/4W \rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{0.25}{10000}} = 5 \text{ mA}$.

1.4.2.2 Puissance électrique reçue par une bobine

- La puissance instantanée reçue par une bobine idéale est :

$$p(t) = u(t)i(t) = L \frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)$$

- La bobine accumule donc de l'énergie lorsque le courant i augmente, et peut la restituer si celui-ci diminue : la bobine est un élément de stockage d'énergie.

- L'énergie emmagasinée (stockée) dans la bobine est :

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2$$

- L'énergie ne peut pas subir de discontinuité car cela correspondrait à une valeur infinie de la puissance ($p(t) = \frac{dE}{dt}$). En conséquence :

Le courant à travers une bobine idéale est une fonction continue du temps, c-à-d : $i(t_0^-) = i(t_0^+)$, $\forall t_0$.

1.4.2.3 Puissance électrique reçue par un condensateur

- La puissance instantanée reçue par un condensateur idéal est :

$$p(t) = u(t)i(t) = C \frac{du}{dt} u = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right)$$

- Le condensateur accumule donc de l'énergie lorsque la tension u augmente, et peut la restituer si celui-ci diminue : le condensateur est un élément de stockage d'énergie.

- L'énergie emmagasinée (stockée) dans le condensateur est :

$$E_e = \frac{1}{2} C u^2$$

Application : Calculer l'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité $C = 1\mu F$ sous une tension de 10V.

Réponse : $E_e = 5 \cdot 10^{-5}$ J. C'est une faible énergie!

- L'énergie ne peut pas subir de discontinuité car cela correspondrait à une valeur infinie de la puissance ($p(t) = \frac{dE}{dt}$). En conséquence :

La tension aux bornes d'un condensateur idéal est une fonction continue du temps, c-à-d :

$$u(t_0^-) = u(t_0^+) \quad , \quad \forall t_0$$

1.5 Dipôles non linéaires

1.5.0.1 La diode à jonction

✓ Présentation :

Une diode à jonction est la juxtaposition de deux semi-conducteurs (voir annexe ??) , l'un de type P et l'autre de type N :

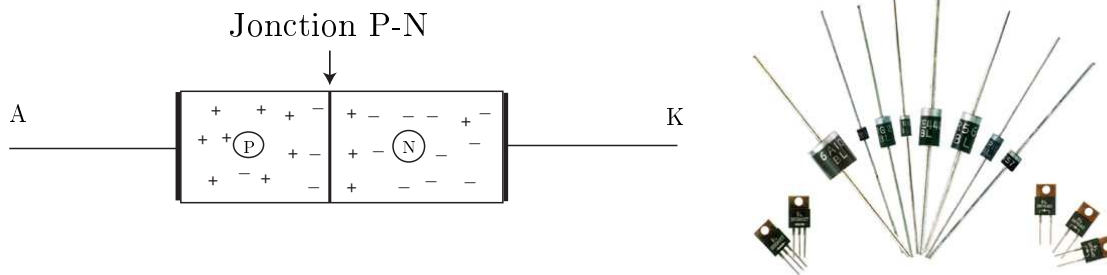


FIGURE 1.24 – Diode à jonction.

- La borne K est appelée : Cathode
- La borne A est appelée : Anode

✓ Symbole :

Le symbole de la diode est le suivant :

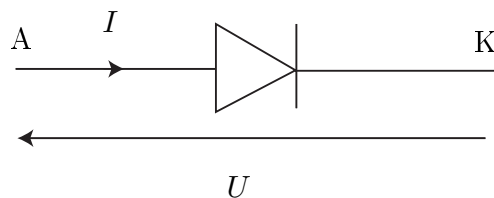


FIGURE 1.25 – Symbole de la diode à jonction.

✓ Caractéristique :

La caractéristique statique théorique d'une diode à jonction est :

$$I = I_s \left(e^{\frac{U}{\alpha U_T}} - 1 \right)$$

Pour une diode au silicium : $I_s \approx 1 \text{ pA}$ le courant de saturation, $U_T \approx 25 \text{ mV}$ (à 27°C) une tension qui dépend la température et α une constante sans dimension ($1 \leq \alpha \leq 2$).

La tension $V_s = 0,6 \text{ V}$ est appelée : tension seuil de la diode.

Le courant direct I d'une diode doit être inférieur au courant direct maximal admissible I_{\max} , courant au-delà duquel la puissance dissipée par effet Joule provoque la destruction thermique de la jonction P-N.

✓ Modèle de la diode idéale :

Pour simplifier l'étude des circuits électriques contenant des diodes, on peut modéliser (linéariser) la caractéristique réelle par des segments de droite comme le montre la figure suivante :

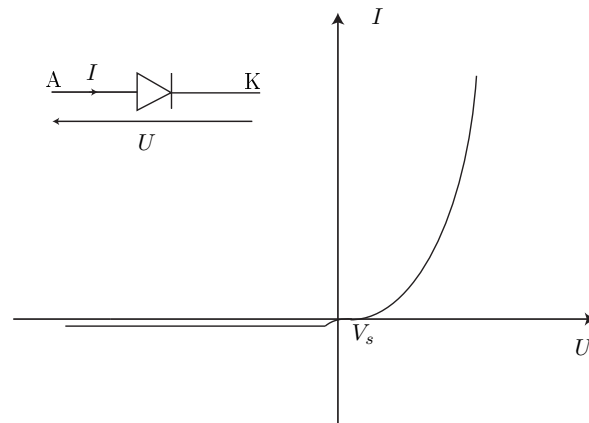


FIGURE 1.26 – Caractéristique réelle de la diode à jonction.

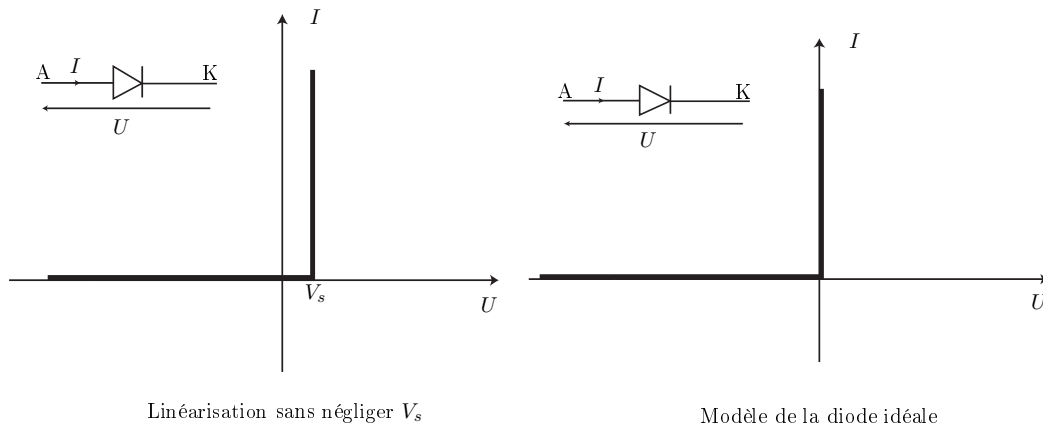


FIGURE 1.27 – Caractéristique de la diode idéale.

Le modèle de la diode idéale :

- $I = 0$ si $U \leq 0$: la diode est équivalente à un *interrupteur ouvert*. On dit qu'elle est bloquée.
- $U = 0$ si $I \geq 0$: la diode est équivalente à un *interrupteur fermé*. On dit qu'elle passante.

Remarque : La diode idéale laisse passer le courant de A vers K (si $V_A > V_K$) et l'empêche de passer de K vers A (si $V_A < V_K$). C'est comme un clapet anti-retour (voir TP).

Application : Redressement mono-alternance.

1.5.0.2 La diode ZENER

La diode normale ne laisse passer le courant électrique que dans un seul sens. La diode Zener est conçue de façon à laisser également passer le courant inverse, mais ceci uniquement si la tension à ses bornes est plus élevée que le seuil V_z (tension Zener).

La diode Zener est utilisée dans de nombreuses application comme la régulation des tensions. Lorsqu'elle est polarisée en inverse ($U < 0$), la tension à ses bornes reste égale à V_z (voir TP).

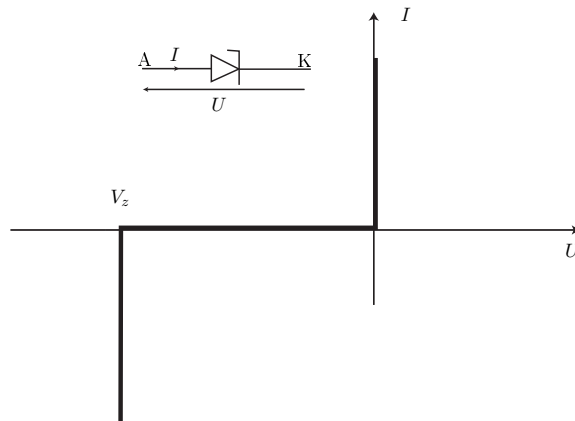


FIGURE 1.28 – Caractéristique de la diode Zener idéale.

1.6 Point de fonctionnement

La caractéristique d'un dipôle impose une relation entre le courant et le tension $i = f(u)$. Lorsqu'on branche le dipôle dans un circuit, on lui impose une autre condition $i = g(u)$. Pour fonctionner correctement, le dipôle doit "respecter" les deux conditions en même temps. En conséquence, les valeurs de i et de u sont imposées $i = I_0$ et $u = U_0$ et sont solutions de l'équation $f(u) = g(u)$. Le point de coordonnées (I_0, U_0) dans le plan (i, u) est appelé **point de fonctionnement** du dipôle.

Exemple :

Considérons le circuit à diode suivant :

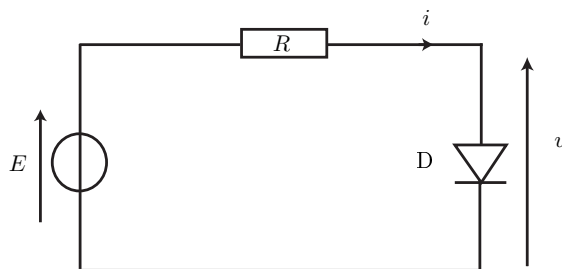


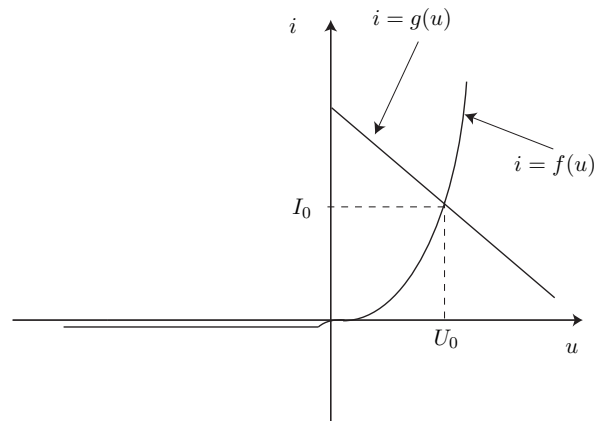
FIGURE 1.29 – Point de fonctionnement d'une diode.

D'après la caractéristique de la diode :

$$i = I_s \left(e^{\frac{u}{\alpha U_T}} - 1 \right) = f(u)$$

D'autre part, d'après la loi des mailles :

$$u = E - Ri \quad \rightarrow \quad i = -\frac{u}{R} + \frac{E}{R} = g(u)$$

FIGURE 1.30 – Point de fonctionnement $f(u) = g(u)$.

1.7 Mesure des grandeurs électriques : TP

1.7.1 Mesure du courant et de la tension

Pour mesurer un courant ou une tension en TP, on peut utiliser le multimètre numérique MTX 3250 (50 000 points).

La valeur est affichée directement sur l'afficheur.

L'incertitude d'un appareil *numérique* sur la mesure d'une grandeur X , s'écrit :

$$\Delta X = n\% L + m D$$

- L : valeur affichée par le multimètre.
- D : Digit = une unité sur le chiffre (digit) de poids le plus faible.

$$D = \frac{\text{Gamme}}{\text{Nombre de points}}$$

- n et m sont donnés par le constructeur.

Le nombre de point est égale au nombre de valeur que le multimètre peut afficher. Par exemple, pour MTX 3250, le nombre de points 50000 signifie que ce multimètre peut afficher les valeur entre 00000 et 49999.

Exemple :

Sur la notice, on lit l'incertitude sur la mesure d'un courant I pour le calibre 5 mA : $\Delta I = 0,2\%L + 3D$.

1.7.2 Mesure des résistances

1.7.2.1 Ohmmètre

Un ohmmètre est une source de courant continu associée à un voltmètre. L'intensité du courant délivré I_0 étant connue, l'appareil fait le rapport de la tension mesurée U_m et de l'intensité du courant I_0 . Il en déduit alors la résistance R_m qu'on veut mesurer.

D'après la loi d'OHM, la valeur affichée par l'ohmmètre est :

$$R_m = \frac{U_m}{I_0}$$

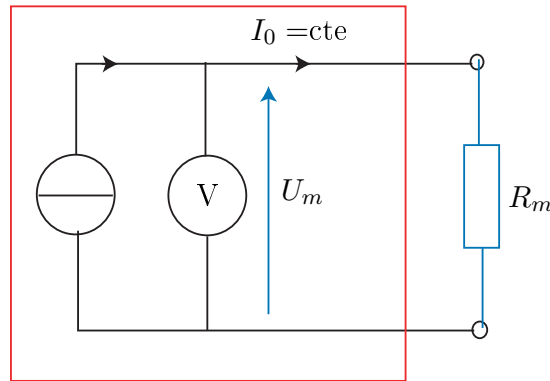


FIGURE 1.31 – Schéma de principe d'un ohmmètre.

I_0 est une intensité constante.

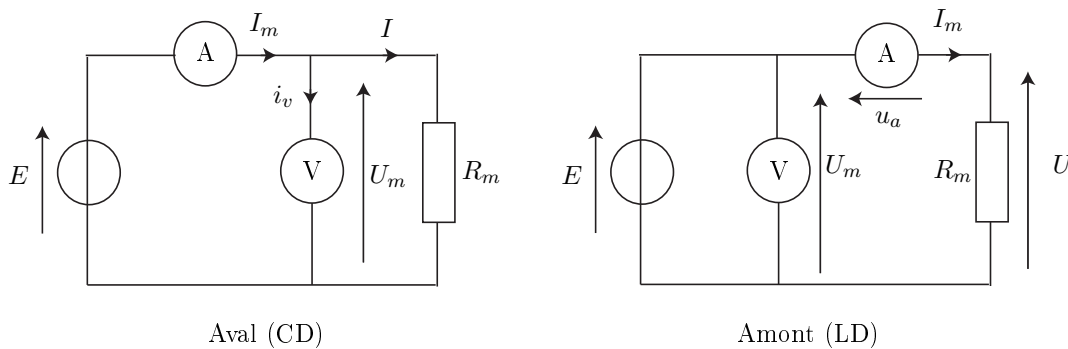
Important : un ohmmètre ne mesure pas correctement la résistance lorsqu'elle est branchée dans un circuit, car le courant qui la traverse n'est plus égale à I_0 .

1.7.2.2 Méthode volt-ampèremétrique

La méthode volt-ampèremétrique consiste à mesurer la tension U_m et l'intensité du courant I_m aux bornes la résistance puis déduire R_m :

$$R_m = \frac{U_m}{I_m}$$

Il y a deux montages possibles pour mesurer R_m : un premier montage que nous appellerons courte dérivation (ou aval) et un second montage que nous appellerons longue dérivation (ou amont).



En courte dérivation :

La valeur de la résistance qu'on devrait mesurer est : $R = \frac{U_m}{I}$

La valeur réellement mesurée est : $R_m = \frac{U_m}{I_m}$

Dans la pratique la résistance d'entrée du voltmètre R_v est grande mais n'est pas infinie, donc $i_v \neq 0$ et la valeur mesurée du courant électrique (I_m) est différente de celle qui traverse la résistance (I).

À partir de la valeur mesurée R_m , on peut déduire la valeur "vraie" R , en effet :

$$R = R_m + \frac{R_m^2}{R_v - R_m}$$

Donc l'erreur **systematique** relative sur la valeur mesurée est :

$$\left. \frac{\Delta R_m}{R_m} \right)_{cd} = \frac{R_m}{R_v}$$

Conclusion : La méthode **courte dérivation** doit être utilisée pour les **petites** résistances telles que : $R \ll R_v$.

En longue dérivation :

La valeur de la résistance qu'on devrait mesurer est : $R = \frac{U}{I_m}$

La valeur réellement mesurée est : $R_m = \frac{U_m}{I_m}$

La "vraie" valeur R est :

$$R = R_m - R_a$$

Dans la pratique la résistance d'entrée R_a de l'ampèremètre est faible mais n'est pas nulle, donc $u_a \neq 0$ et la valeur mesurée de la tension électrique (U_m) est différente de celle aux bornes de la résistance (U).

Donc l'erreur **systematique** relative sur la valeur mesurée est :

$$\left. \frac{\Delta R_m}{R_m} \right|_{ld} = \frac{R_a}{R_m}$$

Entre ces deux montages, on choisira celui qui permettra la plus petite erreur systematique relative :

— on choisit une **courte dérivation** pour les **petites** résistances R (quelques dizaines d'Ohms) ($R \ll R_v$)

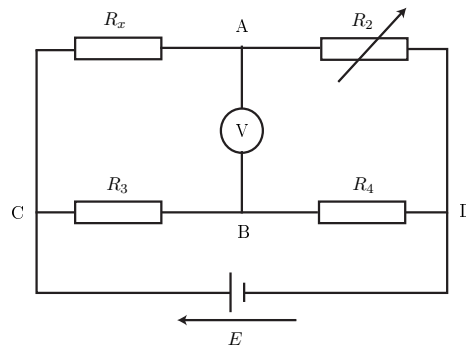
— on choisit une **longue dérivation** pour les **grandes** résistances R .

Remarque : Les résistances internes R_a et R_v dépendent du calibre utilisé (voir la notice du multimètre en TP)

1.7.2.3 Pont de WHEATSTONE

Le pont de WHEATSTONE est utilisé pour mesurer avec précision la valeur d'une résistance électrique inconnue (R_x), par "équilibrage" d'un circuit en pont.

Il est constitué d'un voltmètre V sensible (à grande impédance), et de quatre résistances : l'une inconnue, R_x , et les trois autres connues, R_2 , R_3 et R_4 (disposées comme le montre la figure).



On montre (voir TD) que la tension U_{AB} est donnée par :

$$U_{AB} = \frac{R_2 R_3 - R_x R_4}{(R_x + R_2)(R_3 + R_4)}$$

Pour des valeurs quelconques de R_x , R_2 , R_3 et R_4 , le courant i traversant le voltmètre n'est pas nul et une tension (U_{AB}) est affichée par celui-ci.

Mais si nous ajustons la résistance variable R_2 convenablement, on peut annuler le courant i et alors la tension affichée par le voltmètre sera nulle ($U_{AB} = 0V$) : on dit que le "pont est équilibré". Et dans ce cas :

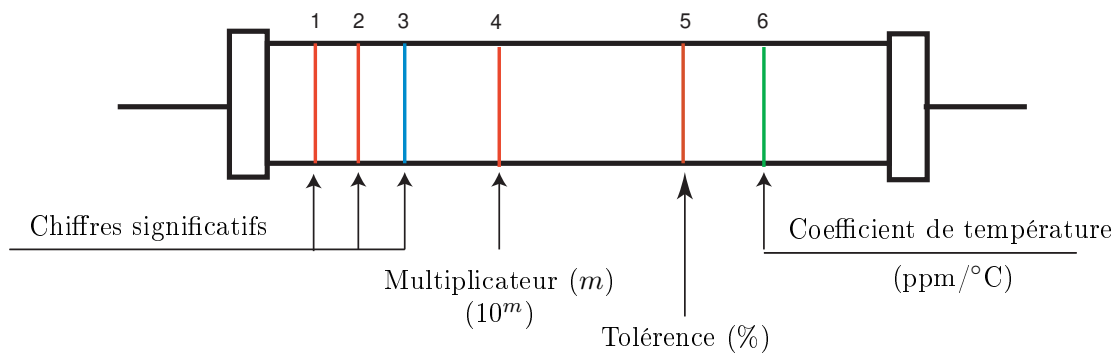
$$R_2 R_3 = R_x R_4 \quad \rightarrow \quad R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$

Remarque : Le principe du pont de WHEATSTONE est aussi employé pour mesurer avec précision la valeur d'une capacité (pont de SAUTY) ou d'une inductance (pont de MAXWELL). On remplacera alors la source de tension continue par une source de tension alternative (voir TP).

1.7.2.4 Code des couleurs

Souvent, le résistor se présente avec des bagues de couleurs (anneaux). Chaque couleur correspond à un chiffre.

La correspondance entre ces chiffres et les couleurs des anneaux constitue ce qu'on appelle le **code des couleurs des résistances** qui permet de déterminer la valeur d'une résistance.¹



Il faut placer la résistance dans le bon sens. En général, la résistance possède un anneau doré ou argenté, qu'il faut placer à *droite*. Dans d'autres cas, c'est l'anneau le plus large qu'il faut placer à *droite* ou bien l'anneau placé le plus *près d'une extrémité* qu'il faut placer à *gauche*.

Le tableau suivant donne les codes des couleurs

Chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Couleur	Noir	Marron	Rouge	Orange	Jaune	Vert	Bleu	Violet	Gris	Blanc

et le tableau suivant donne les tolérances (incertitudes relatives)

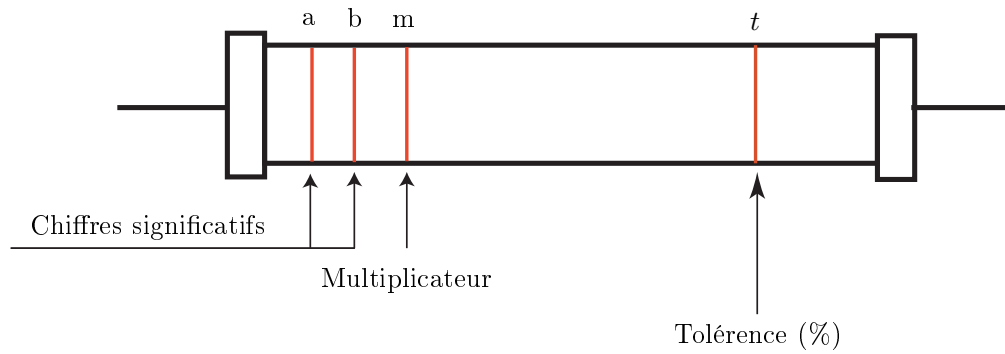
Tolérance ($\pm\%$)	20	10	5	2	1	0,5	0,25	0,1	0,05
Couleur	Blanc ou absent	Argent	Or	Rouge	Marron	Vert	Bleu	Violet	Gris

Il existe trois types de résistances : les résistances à 4, 5 et 6 anneaux.

— **Résistances à 4 anneaux :** le 3ème et le 6ème qui ont été enlevés du schéma ci-dessus.

Les deux premiers anneaux donnent les chiffres significatifs : le premier (a) donne la dizaine et le second (b) l'unité.

1. Le code de couleur est défini par la norme internationale CEI60757 intitulée "Code de désignation de couleurs".



Le troisième (m) donne le multiplicateur, c'est-à-dire la puissance de 10 qu'il faut multiplier avec les chiffres significatifs.

La valeur de la résistance en ohm est :

$$R = ab \times 10^m$$

et

$$\Delta R = R \times \frac{t}{100}$$

Exemple :

Marron ($a = 1$) – Noir ($b = 0$) – Orange ($m = 3$) – Argent ($t = \pm 10\%$) :

$$R = (10 \pm 1) \times 10^3 \ \Omega$$

— **La résistance 5 anneaux** : c'est le 6ème qui a été enlevé.

Chapitre 2

Puissance électrique

2.1 Puissance instantanée - Puissance moyenne

2.1.1 Puissance instantanée

Soit un dipôle soumis à une tension $u(t)$ et parcouru par un courant $i(t)$:



La **puissance instantanée** échangée par ce dipôle est :

$$\boxed{p(t) = u(t) i(t)} \quad (2.1)$$

Son unité est le : **Watt (W)**.

En régime sinusoïdal :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

soit :

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} (\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i))$$

Remarque 2 :

Il ne faut pas confondre entre la convention générateur ou récepteur (*i.e.* flèches utilisées pour faire les calculs) et le vrai comportement d'un dipôle (*i.e.* qui absorbe ou fournit la puissance).

La puissance $p(t)$ (en Watt) est reliée à la variation temporelle de l'énergie $E(t)$ (en Joule) par :

$$\boxed{p(t) = \frac{\Delta E(t)}{\Delta t}} \quad \text{ou} \quad \boxed{p(t) = \frac{dE(t)}{dt}} \quad (2.2)$$

Expérience : Mesure d'une puissance par le wattmètre.

2.1.2 Puissance moyenne (active)

La puissance moyenne est :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

En régime sinusoïdal :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi)$$

avec : $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ le déphasage de la tension par rapport au courant.

$$U_m = \sqrt{2}U_{eff} \quad \text{et} \quad I_m = \sqrt{2}I_{eff}$$

d'où :

La puissance moyenne reçue par un dipôle est :

$$\mathcal{P} = \langle p(t) \rangle = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi)$$

- Le facteur, sans dimension, $\cos(\varphi)$ est le *facteur de puissance*.
- Le terme $U_{eff} I_{eff}$ est appelé : *puissance apparente*, il s'exprime en volt-mètre (symbole V.A).

2.1.3 Puissance reçue par quelques dipôles

✓ Puissance électrique reçue par un résistor :

La puissance instantanée reçue par un résistor :

$$p(t) = u(t)i(t) = R i^2(t)$$

cette puissance est absorbée par le résistor et transformée en énergie thermique par effet Joule (échauffement).

Application : Comment déterminer les grandeurs maximales pour une résistance en carbone ?

Réponse : Suivant la dimension de la résistance en carbone, celle-ci peut dissiper une puissance donnée. Les valeurs usuelles : $P_{\max} = 1/4W$, $P_{\max} = 1/2W$ et $P_{\max} = 1W$.

L'intensité maximale I_{\max} admissible par la résistance R est : $I_{\max} = \sqrt{\frac{P_{\max}}{R}}$.

La tension maximale U_{\max} admissible par la résistance R est : $U_{\max} = \sqrt{P_{\max} R}$.

Exemple : pour une résistance $R = 10 \text{ k}\Omega$; $P_{\max} = 1/4W \rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{0,25}{10000}} = 5 \text{ mA}$.

✓ Puissance électrique reçue par L :

La puissance instantanée reçue par une bobine idéale est :

$$p(t) = u(t)i(t) = L \frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)$$

La bobine accumule donc de l'énergie lorsque le courant i augmente, et peut la restituer si celui-ci diminue : la bobine est un élément de stockage d'énergie.

L'énergie emmagasinée (stockée) dans la bobine est :

$$E_m = \frac{1}{2}Li^2$$

L'énergie ne peut pas subir de discontinuité car cela correspondrait à une valeur infinie de la puissance ($p(t) = \frac{dE}{dt}$). En conséquence :

Le courant à travers une bobine idéale est une fonction continue du temps, c-à-d : $i(t_0^-) = i(t_0^+)$, $\forall t_0$.

✓ Puissance électrique reçue par C :

La puissance instantanée reçue par un condensateur idéal est :

$$p(t) = u(t)i(t) = C \frac{du}{dt} u = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right)$$

Le condensateur accumule donc de l'énergie lorsque la tension u augmente, et peut la restituer si celui-ci diminue : le condensateur est un élément de stockage d'énergie.

L'énergie emmagasinée (stockée) dans le condensateur est :

$$E_e = \frac{1}{2}Cu^2$$

Application : Calculer l'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité $C = 1\mu F$ sous une tension de 10V.

Réponse : $E_e = 5 \cdot 10^{-5}$ J. C'est une faible énergie !

L'énergie ne peut pas subir de discontinuité car cela correspondrait à une valeur infinie de la puissance ($p(t) = \frac{dE}{dt}$). En conséquence :

La tension aux bornes d'un condensateur idéal (et aussi sa charge) est une fonction continue du temps, c-à-d : $u(t_0^-) = u(t_0^+)$, $\forall t_0$.

2.1.4 Puissance apparente et puissance réactive

??

2.1.5 Puissance en notation complexe

2.1.5.1 Puissance complexe

En régime sinusoïde, il faut manipuler la notation complexe avec précaution lorsqu'il s'agit des calculs énergétiques. Par exemple :

$$u(t)i(t) \neq \Re(\underline{u}(t)\underline{i}(t))$$

Mais, pour calculer la valeur moyenne de la puissance on peut utiliser la formule mathématique suivante :

$$\langle ui \rangle = \frac{1}{2} \Re(\underline{u} \underline{i}^*)$$

où \underline{i}^* est le complexe conjugué de \underline{i} .

Cette formule est valable lorsque les signaux u et i sont sinusoïdaux.

La puissance moyenne reçue par un dipôle en régime sinusoïdal est :

$$\mathcal{P} = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re(\underline{u} \underline{i}^*)$$

Remarque : La puissance moyenne est appelée aussi : *puissance active*.

Cas d'un dipôle d'impédance \underline{Z}

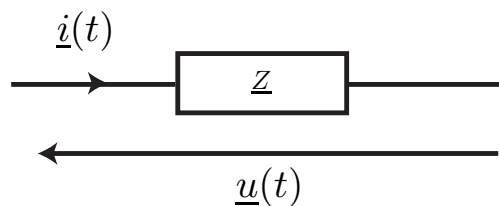


FIGURE 2.1 – Dipôle d'impédance \underline{Z} .

avec :

$$\underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t}$$

La puissance moyenne reçue par ce dipôle est :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \Re(\underline{u} \underline{i}^*) = \frac{1}{2} \Re(\underline{Z} \underline{i} \underline{i}^*) = \frac{1}{2} I_m^2 \Re(\underline{Z})$$

soit :

$$\mathcal{P} = I_{eff}^2 \Re(\underline{Z})$$

Exemples :

- Pour un résistor $\underline{Z} = R$: $\mathcal{P} = RI_{eff}^2$. Une résistance absorbe de l'énergie et n'en restitue jamais. Elle transforme irréversiblement l'énergie qu'elle absorbe : c'est un élément dissipatif.
- Pour une bobine $\underline{Z} = jL\omega$: $\mathcal{P} = 0$;
- Pour un condensateur $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$: $\mathcal{P} = 0$;

Une inductance pure et une capacité idéale ne consomment pas, en moyenne, d'énergie. Ces éléments échangent réversiblement de l'énergie avec le circuit.

Application : Principe du Wattmètre.

2.1.5.2 Théorème de BOCHEROT

??

2.2 Adaptation des impédances

Question : À quelles conditions un générateur sinusoïdal de f.e.m. $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ et d'impédance interne $\underline{Z}_g = R_g + jX_g$ fournit le **maximum de puissance** à un réseau d'utilisation d'impédance $\underline{Z}_u = R_u + jX_u$?

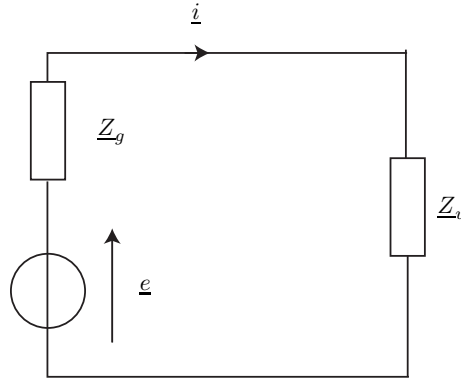


FIGURE 2.2 – La puissance transmise est maximale si $\underline{Z}_u = \underline{Z}_g^*$.

L'amplitude complexe du courant est :

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{e}_m}{\underline{Z}_u + \underline{Z}_g} = \frac{e_m}{R_g + R_u + j(X_g + X_u)}$$

La puissance moyenne reçue par l'utilisation est :

$$\mathcal{P} = I_{eff}^2 \Re(\underline{Z}) = \frac{1}{2} I_m^2 \Re(\underline{Z}) = \frac{R_u}{(R_g + R_u)^2 + (X_g + X_u)^2} \frac{e_m^2}{2}$$

Pour avoir une puissance maximale, on procède en deux étapes :

- condition 1 : on choisit $X_g = -X_u$. Par exemple $X_g = -\frac{1}{C\omega}$ et $X_u = L\omega$ où $L\omega = \frac{1}{C\omega}$. Dans ces conditions, la puissance devient :

$$\mathcal{P} = \frac{R_u}{(R_g + R_u)^2} \frac{e_m^2}{2}$$

- Condition 2 : Cette puissance transmise peut encore être augmentée en déterminant la valeur de la résistance R_u qui rend le facteur $y = \frac{R_u}{(R_g + R_u)^2}$ maximal :

$$\frac{dy}{dR_u} = 0 \rightarrow R_u = R_g$$

Les deux conditions peuvent être rassemblées en une seule :

$$\underline{Z}_u = \underline{Z}_g^*$$

et la puissance maximale est alors :

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{e_m^2}{8R_g}$$

Dans ces conditions on dit qu'il y a adaptation d'impédance.

Lorsque les caractéristiques du générateur sinusoïdal et celle de l'utilisation sont imposées, on adapte en intercalant un quadripôle entre le générateur et l'utilisation.

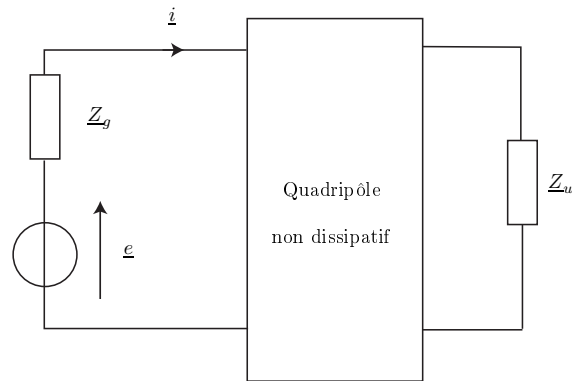


FIGURE 2.3 – Adaptation de puissance.

Le quadripôle, fermé sur l'impédance d'utilisation, doit présenter en entrée une impédance conjuguée de celle du générateur m

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_g^*$$

L'impédance de sortie du quadripôle doit être telle que :

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_u^*$$

2.3 Applications (TD + TP)

- Installation domestique
- Facteur de puissance
- Puissance active et réactive
- Adaptation d'impédance
- puissance consommée par un circuit RLC (bilan de puissance dans un circuit)
- Amélioration du facteur de puissance

Chapitre 3

Réponse d'un circuit

3.1 Étude d'un circuit RC

3.1.1 Montage

Considérons le montage le montage suivant :

FIGURE 3.1 – Charge et décharge d'un condensateur.

Lorsqu'on place l'interrupteur sur la position 2, le condensateur se décharge. Lorsque on bascule K à la position 1, le condensateur se chargera sous la tension E .

Configuration de LatisPro :

- [☞] Lancer le logiciel Latis pro puis faire les configurations suivantes :
 - *Entrées analogiques* : sélectionner $EA0$, $EA1$ et $EA4$ et activer le mode différentielle $EA0 - EA4$ (pour visualiser le courant Ri) ;
 - *Acquisition* : Temporelle, Normal - 2500 points - Totale = 100 ms ;
 - *Source de déclenchement* : choisir $EA1$ - Seuil 0,2 V - Prétrig = 25% ;
 - Nommer les entrées : u et ri .

3.1.2 Acquisition

[☞] Placer l'interrupteur en position 2 (condensateur déchargé). Appuyer sur la touche F10 du clavier puis basculer, après 2s, l'interrupteur en position 1. Le condensateur se charge alors sous la tension E .

[☞] Faire l'acquisition de la tension u_c et du courant i (Ri).

FIGURE 3.2 – Évolution de la tension u aux bornes de C et du courant i .

3.1.3 Modélisation de la tension u_c et du courant i

[☞] Modéliser la courbe $u(t)$ en utilisant l'outil de modélisation de LatisPro.

$$u(t) = \dots\dots\dots$$

[☞] Modéliser la courbe $Ri(t)$ en déduire celle de $i(t)$.

$$i(t) = \dots\dots\dots$$

Commentaires :

- Le condensateur met un temps de l'ordre de quelques τ pour se charger.
- la valeur de $u(t)$ en fin de charge est :

$$u(t \rightarrow \infty) \approx \dots\dots\dots V = E$$

- la valeur de $i(t)$ en fin de charge est :

$$i(t \rightarrow \infty) \approx 0$$

car le condensateur est totalement chargé, il se comporte comme un interrupteur ouvert en régime continu.

- on voit que $i(0^+) \neq i(0^-)$, le courant n'est pas forcément continu dans un condensateur.
- par la méthode de la tangente, la valeur de la constante de temps τ du dipôle RC .

$$\tau \approx \dots\dots\dots s$$

- l'expression du temps de montée t_m de $u_c(t)$ entre 10 % et 90 % en fonction de τ .

$$t_m = 2,3RC??$$

La mesure sur la courbe donne :

$$t_m \approx \dots\dots\dots$$

3.1.4 Justification théorique des résultats

Initialement le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

La loi des mailles pour $t \geq 0$:

$$E = Ri + u \rightarrow E = RC \frac{du}{dt} + u \rightarrow \tau \frac{du}{dt} + u = E$$

La solution générale, avec la condition initiale ($u(0) = 0$) est :

$$u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{E - u}{R} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Remarque : Lorsque le seconde membre de l'équation différentielle est non nul, on dit que le **régime est forcé**. Ce régime est dû à la présence a des sources de tension dans le montage.

3.1.5 Régime transitoire et régime permanent

- Au début le circuit passe par un régime transitoire pendant quelques τ .
- Après ce régime, le circuit entre dans son régime permanent où $u = E$.
- Le régime permanent est lié au seconde membre de l'équation différentielle. Ici le seconde membre est une constante, donc en régime permanent, tous les signaux sont constats. Donc si on injecte $u = cte$ dans l'équation différentielle on trouve $u = E$.

• La durée t_t du régime transitoire dépend du niveau de précision voulu par l'expérimentateur : Si on décide, par exemple, que le régime permanent est atteint lorsque u atteint 99% de sa valeur finale alors :

$$\frac{|u_{\text{finale}} - u_{\text{initiale}}|}{u_{\text{initiale}}} = 0,99 \rightarrow \frac{u_0 - u(t_t)}{u_0} = 0,99 \rightarrow u(t_t) = (1 - 0,99)u_0 = u_0 e^{-\frac{t_0}{\tau}}$$

soit :

$$t_t = -\tau \ln 0,01 \approx 4,6\tau$$

Au bout de 5τ on peut supposer que le condensateur est complètement chargé (à 99 %).

3.1.6 Bilan de Puissance

Créer (Feuille de calcul) et tracer les courbes des puissances reçue par R et C et celle délivrée par le générateur.

$$p_R(t) = Ri^2 \quad P_c = ui \quad P_g = Ei$$

FIGURE 3.3 – Courbes expérimentales du puissances P_R , P_C et P_g .

On constate que :

$$P_g = P_C + P_R$$

Justification du bilan énergétique :

On multiplie membre à membre la loi des mailles par i :

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{C}{2}u^2\right)$$

avec :

- $P_g = Ei$ la puissance fournie par le générateur ;
- $P_R = Ri^2$ la puissance dissipée dans le résistor (par effet JOULE) ;
- $P_C = \frac{d}{dt}\left(\frac{C}{2}u^2\right)$ la puissance emmagasinée dans le condensateur.

d'où le bilan d'énergie :

$$P_g = P_R + P_C$$

L'énergie totale fournie par le générateur est :

$$E_g = \int_0^\infty P_g dt = E \int_0^\infty i(t) dt = \frac{E^2}{C}$$

C'est le double de l'énergie accumulée dans le condensateur. La moitié de l'énergie fournie par le générateur est donc dissipée par effet Joule dans la résistance.

QR : proposer une méthode pour charger le condensateur avec un minimum de perte d'énergie.

Réponse : Application 6 page 109.

sectionCircuit RL Conditions initiales :

À $t < 0$, l'interrupteur est dans la position 1. La bobine est parcourue par le courant I_0 . À $t = 0$, on bascule l'interrupteur vers la position 2.

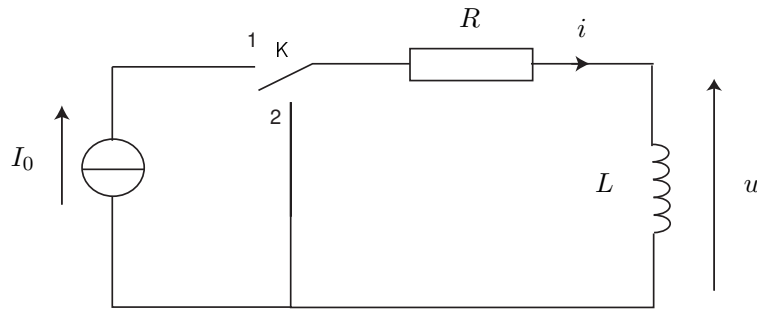


FIGURE 3.4 – Circuit RL en régime libre.

Équation différentielle :

La loi des mailles (pour $t \geq 0$) :

$$Ri + u = 0 \quad \rightarrow \quad Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

on pose $\tau = \frac{L}{R}$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$$

- La constante τ est appelée constante de temps du circuit ou temps de relaxation.
- Le circuit (R, L) est un circuit du premier ordre car son équation différentielle est linéaire du premier ordre.
- Le seconde membre de l'équation différentielle est nulle, c'est le régime libre.

Solution de l'équation différentielle :

La solution générale de l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour $t > 0$ est :

$$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

A est une constante qu'on détermine par les conditions initiales c-à-d à $t = 0^+$.

Conditions initiales :

On a déjà vu que **le courant qui traverse un bobine est toujours continue**¹ :

$$i(0^+) = i(0^-)$$

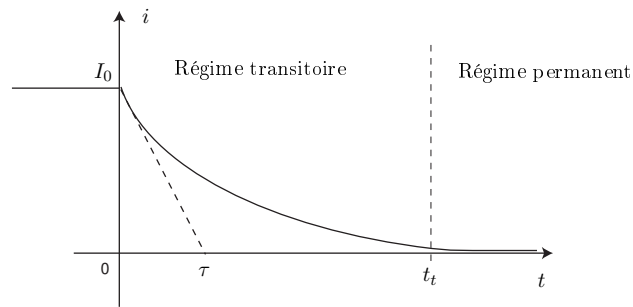
d'où la condition initiale :

$$i(0^+) = I_0$$

Évolution de la tension i :

La tension i est alors :

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{et} \quad u = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

FIGURE 3.5 – Évolution de la tension i en régime libre.

- La constante de temps τ peut être déterminée de manière graphique en traçant la tangente à la courbe à l'origine.

Régime transitoire et régime permanent

- Au début le circuit passe par un régime transitoire pendant quelques τ .
- Après ce régime, le circuit entre dans son régime permanent où $i = 0$.

Remarque : Le seconde membre est une constante, donc en régime permanent, tous les signaux sont constats. Donc si on injecte $i = cte$ dans l'équation différentielle on trouve $i = 0$.

Aspect énergétique :

L'énergie dissipée par effet JOULE dans le résistor R est :

$$\mathcal{E}_m = \int_0^{\infty} Ri^2 dt = \int_0^{\infty} RI_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{1}{2} LI_0^2$$

Cette énergie est l'énergie emmagasinée dans la bobine à l'instant initial. Ceci est dû à la conservation de l'énergie en physique. Cette énergie est intégralement dissipée par effet JOULE dans le résistor (échauffement).

3.2 Circuit d'ordre 2 :RLC série

3.2.1 Montage

But : Étude du régime libre d'un circuit RLC série.

Considérons le montage suivant :

Configuration de LatisPro :

[☞] Lancer le logiciel Latis pro puis faire les configurations suivantes :

- *Entrées analogiques* : sélectionner $EA0$, $EA1$ et $EA4$ et activer le mode différentielle $EA0 - EA4$ (pour visualiser le courant Ri);
- *Acquisition* : Temporelle, Normal - 2500 points - Totale = 100 ms;
- *Source de déclenchement* : choisir $EA1$ - Seuil 0,2 V - Prétrig = 25%;

1. Ceci est lié à la continuité de l'énergie en physique. Pour le condensateur $E_e = \frac{1}{2} Li^2$.

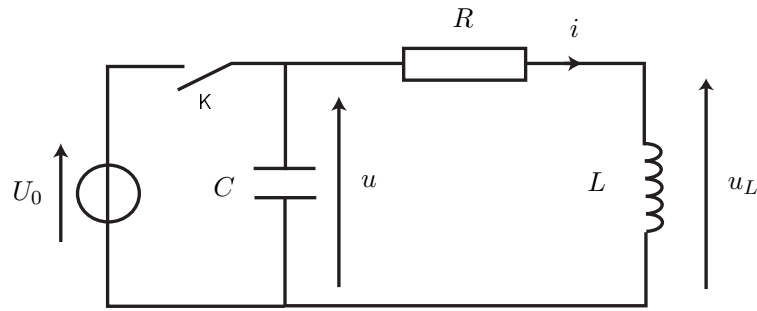


FIGURE 3.6 – Circuit RLC en régime libre.

— Nommer les entrées : u et ri .

[☞] Placer l'interrupteur en position 2 (condensateur déchargé). Appuyer sur la touche F10 du clavier puis basculer, après 2s, l'interrupteur en position 1.

[☞] Faire l'acquisition de la tension u_c et du courant i (Ri).

FIGURE 3.7 – Évolution de la tension u aux bornes de C et du courant i pour : $Q = 0,1$ et $Q = 10$.

3.2.2 Modélisation de la tension u_c et du courant i

[☞] Modéliser la courbe $u(t)$ en utilisant l'outil de modélisation de LatisPro.

$$u(t) = \dots\dots\dots$$

[☞] Modéliser la courbe $Ri(t)$ en déduire celle de $i(t)$.

$$i(t) = \dots\dots\dots$$

Commentaires :

- c'est une fonction oscillante modulée par une enveloppe exponentielle décroissante.
- Le régime libre est un régime transitoire de temps caractéristique

$$\tau = \dots\dots\dots$$

- La période T de la fonction sinusoïdale est appelée *pesudopériode* du régime libre :

$$T = \dots\dots\dots$$

3.2.3 Justification théorique des résultats

Équation différentielle de la tension u aux bornes de C :

La loi des mailles (pour $t \geq 0$) :

$$-Ri + u - u_L = 0 \quad \rightarrow \quad RC \frac{du}{dt} + u + L \frac{di}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad RC \frac{du}{dt} + u + LC \frac{d^2u}{dt^2} = 0$$

on pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$. L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la **pulsation propre** du circuit. C'est une pulsation caractéristique qui ne dépend que des propriétés du circuit.
- $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ est le **facteur de qualité** de ce circuit. C'est un nombre sans dimension.
- Le circuit (R, L, C) est un circuit du deuxième ordre car son équation différentielle est linéaire d'ordre 2.
- Le second membre de l'équation différentielle est nul, c'est le **régime libre**.

Solution de l'équation différentielle (Utilisation d'un logiciel - Mapleeee) :

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant réduit :

$$\Delta' = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$$

Suivant les valeurs de Q , les régimes libres sont différents :

Régime aperiodique : $Q < \frac{1}{2}$

La solution est :

$$u(t) = A$$

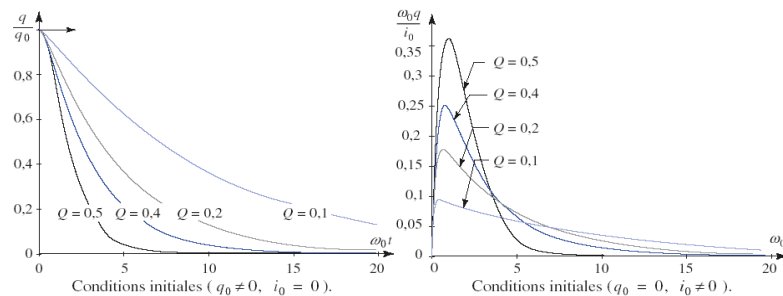


FIGURE 3.8 – Régime aperiodique ($Q < 0,5$) et critique ($Q = 0,5$).

Nous remarquons que la "durée" du régime aperiodique (temps pendant lequel u prend des valeurs non négligeables) est d'autant plus grande que Q est proche de 0.

Application :

Déterminer $u(t)$ et $i(t)$ en fonction de Q et ω_0 dans le cas du régime aperiodique pour les conditions initiales : $u(0) = u_0$ et $i(0) = 0$ puis $u(0) = 0$ et $i(0) = i_0$.

Régime critique : $Q = \frac{1}{2}$

La solution est :

$$u(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

$u(t)$ tend vers 0 avec une constante de temps $\tau = \frac{1}{\omega_0}$.

Le régime critique correspond au **régime apériodique de durée minimale**. L'allure des courbes correspondant à ce régime est voisine de celle des régimes apériodiques.

Régime pseudo-périodique $Q > 1/2$

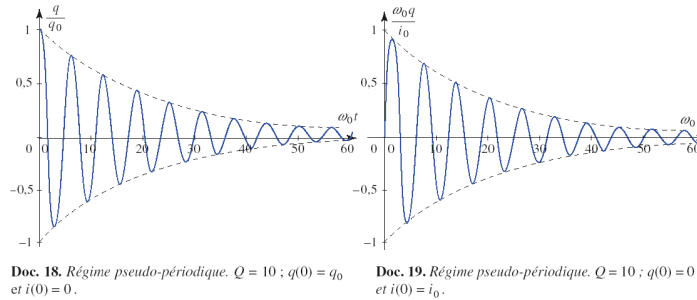


FIGURE 3.9 – Régime pseudopériodique ($Q < 0,5$).

- La solution générale de l'équation différentielle est :

$$u(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

c'est une fonction oscillante modulée par une enveloppe exponentielle décroissante.

Le régime libre est un régime transitoire de temps caractéristique $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$. Il en est de même pour les autres grandeurs $i(t)$, $u_L(t)$.

La période T de la fonction sinusoïdale est appelée *pseudopériode* du régime libre. On a :

$$u(t+T) = u(t)e^{-\frac{T}{\tau}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Nous appellerons *décroissement logarithmique* la quantité :

$$\delta = \ln \left(\frac{u(t)}{u(t+T)} \right) = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Nous remarquons que le retour vers l'état d'équilibre $u = 0$ est d'autant plus lent que Q est grand et que la pseudo-période diminue quand Q augmente.

Applications :

Application

Etude énergétique :

D'après la loi de mailles on a :

$$Ri + u + L \frac{di}{dt} = 0$$

on multiplie cette équation par i :

$$Ri^2 + ui + L \frac{di}{dt} i = 0 \quad \rightarrow \quad Ri^2 + Cu \frac{du}{dt} + L \frac{di}{dt} i = 0 \quad \rightarrow \quad Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{C}{2} u^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{L}{2} i^2 \right) = 0$$

Le terme

$$E_{em} = \frac{C}{2}u^2 + \frac{L}{2}i^2$$

représente l'énergie emmagasinée dans la bobine et le condensateur.

Cette énergie est dissipée par effet JOULE dans le resistor et le bilan énergétique du circuit

$$\frac{dE_{em}}{dt} = -\mathcal{P}_j$$

où

$$\mathcal{P}_j = Ri^2$$

est la puissance dissipée dans le résistor.

Cas du régime pseudo-périodique faiblement amorti

Pour un circuit peu amorti ($Q \gg 1$) :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0 \quad \text{et} \quad \tau = 2Q/\omega_0 \gg \omega_0$$

La tension aux bornes du condensateur s'écrit :

$$u(t) \approx Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Le courant i est :

$$i = C \frac{du}{dt} = -CAe^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{1}{\tau} \cos(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \right) \approx -CAe^{-\frac{t}{\tau}} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

L'énergie emmagasinée dans le condensateur et dans la bobine est :

$$E_{em}(t) = \frac{C}{2}u^2 + \frac{L}{2}i^2 = \frac{A^2}{2C}e^{-2\frac{t}{\tau}}$$

FIGURE 3.10 – Décroissance sensiblement exponentielle de l'énergie du circuit lorsque $Q \gg 1$.

En une pseudo-période T , l'énergie dissipée (par effet Joule) vaut :

$$\Delta E_{em} = \frac{A^2}{2C}e^{-2\frac{t}{\tau}}(1 - e^{-2\frac{T}{\tau}}) \approx E_{em} \frac{2T}{\tau}$$

d'où :

$$\frac{\Delta E_{em}}{E_{em}} = \frac{2T}{\tau} = \frac{2\pi}{Q}$$

soit :

$$Q = 2\pi \frac{E_{em}}{\Delta E_{em}}$$

avec ΔE_{em} l'énergie perdue pendant une pseudopériode.

Interprétation énergétique du facteur de qualité Q (quand il est grand devant 1) :

Le facteur de qualité est égal à 2π fois l'énergie emmagasinée dans le circuit divisée par l'énergie dissipée pendant une pseudo-période : cette définition peut s'appliquer à tout système physique (oscillateur mécanique, ...).

3.3 Réponse à un échelon de tension

3.3.1 Échelon de tension

3.3.2 Charge d'un condensateur

Tension aux bornes du condensateur

FIGURE 3.11 – Circuit RC soumis à un échelon de tension.

Initialement le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

La loi des mailles pour $t \geq 0$:

$$E = Ri + u \rightarrow E = RC \frac{du}{dt} + u \rightarrow \tau \frac{du}{dt} + u = E$$

La solution générale est :

$$u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \text{ et } i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Il y a un retard (de quelques τ) à l'établissement de la différence de potentiel aux bornes de la capacité.

FIGURE 3.12 – Évolution de la tension aux bornes de la tension.

Bilan énergétique

On multiplie membre à membre la loi des mailles par i :

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{C}{2} u^2 \right)$$

avec :

- $P_g = Ei$ la puissance fournie par le générateur ;
- $P_R = Ri^2$ la puissance dissipée dans le résistor (par effet JOULE) ;
- $P_C = \frac{d}{dt} \left(\frac{C}{2} u^2 \right)$ la puissance emmagasinée dans le condensateur.

d'où le bilan d'énergie :

$$P_g = P_R + P_C$$

L'énergie totale fournie par le générateur est :

$$E_g = \int_0^{\infty} P_g dt = E \int_0^{\infty} i(t) dt = \frac{E^2}{C}$$

C'est le double de l'énergie accumulée dans le condensateur. La moitié de l'énergie fournie par le générateur est donc dissipée par effet Joule dans la résistance.

QR : proposer une méthode pour charger le condensateur avec un minimum de perte d'énergie.

Réponse : Application 6 page 109.

FIGURE 3.13 – Circuit RL soumis à un échelon de tension.

3.3.3 Établissement du courant dans un circuit inductif

Tension aux bornes du condensateur

Initialement le courant i est nulle. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

La loi des mailles pour $t \geq 0$:

$$E = u + Ri \rightarrow E = L \frac{di}{dt} + Ri \rightarrow \tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$$

où $\tau = \frac{R}{L}$ est la constante du temps du circuit.

La solution générale est :

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \text{ et } u(t) = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Il y a un retard (de quelques τ) à l'établissement du courant dans la bobine.

FIGURE 3.14 – Évolution du courant à travers la bobine.

Bilan énergétique

On multiplie membre à membre la loi des mailles par i :

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{C}{2} u^2 \right)$$

avec :

- $P_g = Ei$ la puissance fournie par le générateur ;
- $P_R = Ri^2$ la puissance dissipée dans le résistor (par effet JOULE) ;
- $P_C = \frac{d}{dt} \left(\frac{C}{2} u^2 \right)$ la puissance emmagasinée dans le condensateur.

d'où le bilan d'énergie :

$$P_g = P_R + p_C$$

3.3.4 Cas du circuit (R, L, C) série

FIGURE 3.15 – Circuit RLC.

Conditions initiales :

À $t < 0$, l'interrupteur est fermé. La bobine est parcourue par le courant $I_0 = \frac{U_0}{R}$ et le condensateur est chargé sous la tension U_0 .

$$i(0^-) = I_0 = \frac{U_0}{R} \quad \text{et} \quad u(0^-) = U_0$$

À $t = 0$, ouvre l'interrupteur.

Équation différentielle de la tension u aux bornes de C :

La loi des mailles (pour $t \geq 0$) :

$$-Ri + u - u_L = E \quad \rightarrow \quad RC \frac{du}{dt} + u + L \frac{di}{dt} = E \quad \rightarrow \quad RC \frac{du}{dt} + u + LC \frac{d^2u}{dt^2} = E$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$$

avec :

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la **pulsation propre** du circuit.
- $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ est le **facteur de qualité** de ce circuit.

La solution de cette équation (utilisation de Maple!) :

FIGURE 3.16 – Circuit RLC - Réponse à un échelon de tension.

3.4 Applications (TD)

Chapitre 4

Théorèmes généraux des circuits linéaires

4.1 Lois de KIRCHHOFF (Rappel)

4.1.1 Loi des nœuds

Un nœud correspond à la borne d'un dipôle à laquelle où au moins deux fils de connexion sont reliés.
La somme des courants entrant à un nœud est égale à la somme des courants sortant de ce nœud.

$$\boxed{\sum_{\text{entrant}} i_j = \sum_{\text{sortant}} i_k} \quad (4.1)$$

Remarque : On appelle branche une portion comprise entre deux nœuds consécutifs.

4.1.2 Loi des mailles

Une maille est un chemin fermé dans un circuit électrique.
Dans une maille orienté (arbitrairement), la somme algébrique des tensions aux bornes des dipôles est *nulle*

$$\boxed{\sum \varepsilon_k U_k = 0}$$

avec :

- $\varepsilon_k = 1$ si U_k a le même sens que l'orientation de la maille.
- $\varepsilon_k = -1$ si U_k a le sens opposé de l'orientation de la maille.

4.2 Théorème de MILLMAN

Considérons un nœud N **qui n'est relié qu'à des résistors** R_k . On note V_k est le potentiel juste après la résistor R_k .

Le théorème de MILLMAN donne le potentiel de ce nœud en fonction des potentiels V_k :

$$V_N = \frac{\sum_k \frac{V_k}{R_k}}{\sum_k \frac{1}{R_k}} \quad \text{soit} \quad : \quad V_N = \frac{\sum_k G_k V_k}{\sum_k G_k}$$

ou $G_k = \frac{1}{R_k}$.

Démonstration :

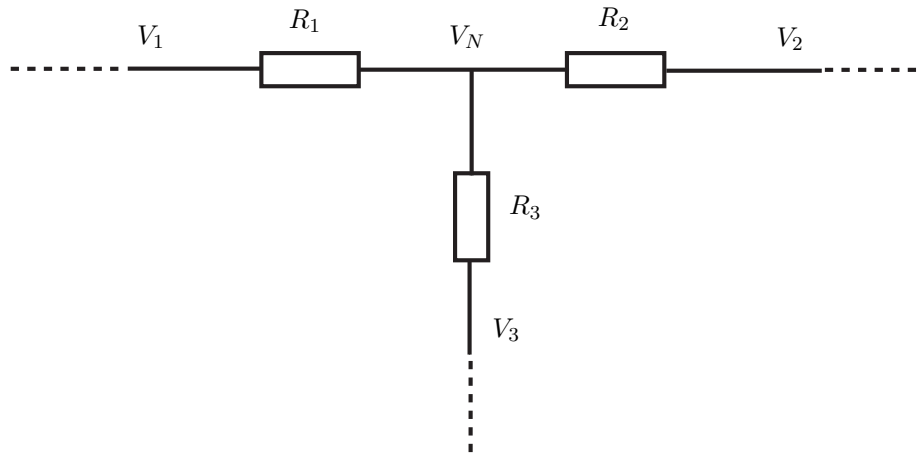


FIGURE 4.1 – Théorème de Millman : $V_N = \frac{G_1 V_1 + G_2 V_2 + G_3 V_3}{G_1 + G_2 + G_3}$.

On applique la loi des noeud en N :

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \rightarrow \frac{V_1 - V_N}{R_1} + \frac{V_2 - V_N}{R_2} + \frac{V_3 - V_N}{R_3} = 0$$

c'est la loi des noeuds exprimé en terme de potentiels.

d'où :

$$V_N = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{G_1 V_1 + G_2 V_2 + G_3 V_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Remarque : Si l'une branche j contient une source de courant I_{0j} , le terme correspondant dans le théorème de Millman est remplacé par $\varepsilon_j I_{0j}$

$$V_N = \frac{\sum_{k \neq j} G_k V_k + \sum_j \varepsilon_j I_{0j}}{\sum_{k \neq j} G_k}$$

ou $\varepsilon_j = +1$ si le courant I_{0j} entre dans le noeud N et $\varepsilon_j = -1$ le courant I_{0j} sort du noeud.

4.2.1 Applications

4.3 Théorème de superposition

4.3.1 Extinction d'une source libre

Une source **libre** (autonome) de tension est éteinte si sa f.e.m. est nulle. Elle peut être remplacée par un court-circuit (fil).

Une source **libre** (autonome) de courant est éteinte si son c.e.m. est nul. Elle peut être remplacée par un circuit ouvert.

Remarque : Attention on ne peut pas éteindre une source liée (c'est un modèle)

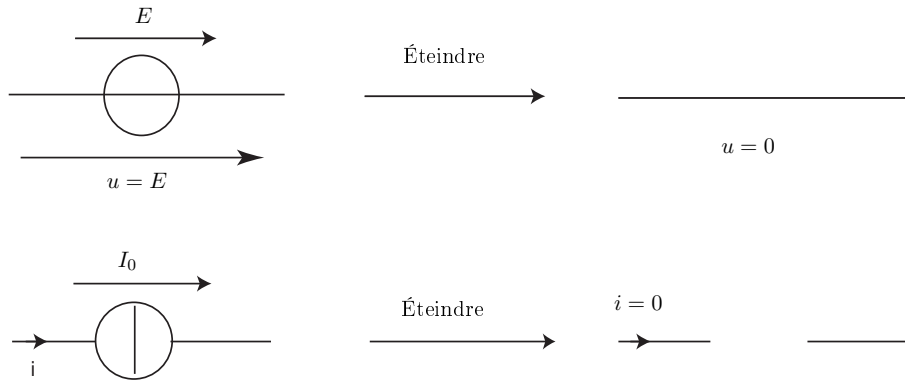


FIGURE 4.2 – Éteindre les sources autonomes.

4.3.2 Théorème de superposition

4.3.2.1 Énoncé

En régime permanent, l'intensité qui parcourt les dipôles constituant un réseau linéaire et la différence de potentiel à leurs bornes sont les sommes de ces grandeurs obtenues dans les différents états du réseau où toutes les sources libres, sauf une, sont éteintes.

Par exemple, si le circuit comporte 3 sources autonome alors le courant i dans une branche quelconque est :

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

ou : i_k ($k = 1, 2, 3$) est le courant dans cette branche lorsque la source k est **seule** (les autres sont éteintes).

4.3.2.2 Applications

4.3.3 Équivalence entre les modèles de THÉVENIN et de NORTON

4.3.3.1 Modèle de THÉVENIN

Un circuit **linéaire** vue entre deux point A et B est équivalent à un générateur de de tension réel (E_{th}, R_{th}).

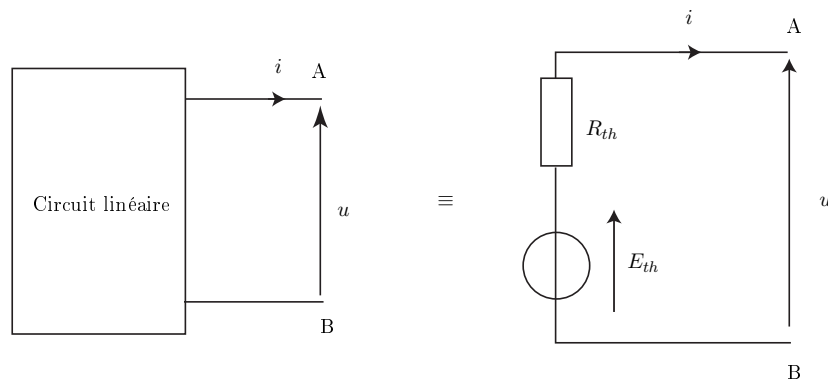


FIGURE 4.3 – Modèle de THÉVENIN d'un circuit linéaire.

avec :

- E_{th} : la f.e.m du générateur de THEVENIN
- R_{th} : sa résistance interne

On a :

$$u = E_{th} - R_{th}i$$

Calcul de E_{th} :

La f.e.m du générateur de THEVENIN est calculé en imposant $i = 0$ puis on calcule $u = E_{th}$:

$$E_{th} = u \quad \text{lorsque} \quad i = 0.$$

Calcul de R_{th} :

La résistance interne du générateur de THEVENIN est calculé en imposant que $E_{th} = 0$. pour cela on **doit éteindre toutes les sources autonomes**.

$$R_{th} = -\frac{u}{i} \quad \text{lorsque les source autonomes sont éteintes.}$$

En d'autre terme, R_{th} est la résistance équivalente du dipôle AB lorsque les source autonomes sont éteintes.

Exemple :

4.3.3.2 Modèle de NORTON

Un circuit **linéaire** vue entre deux point A et B est équivalent à un générateur de courant réel (I_N, R_N).

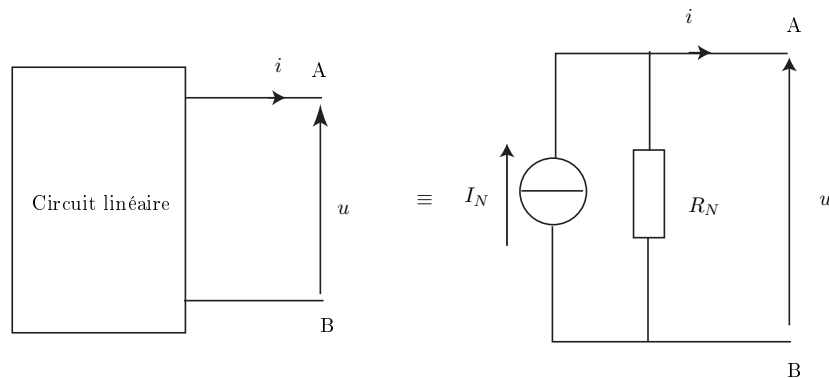


FIGURE 4.4 – Modèle de NORTON d'un circuit linéaire.

avec :

- I_N : le c.e.m du générateur de NORTON
- R_N : sa résistance interne

On a :

$$i = I_N - \frac{u}{R_N}$$

Calcul de I_N :

Le c.e.m du générateur de NORTON est calculé en imposant $u = 0$ puis on calcule $i = I_N$:

$$I_N = i \quad \text{lorsque} \quad u = 0 \quad (\text{on met un court-circuit entre A et B}).$$

Calcul de R_N :

La résistance interne du générateur de NORTON est calculée de la même manière que celle de THEVENIN :

$$R_N = R_{th} = -\frac{u}{i} \quad \text{lorsque les source autonomes sont éteintes.}$$

En d'autre terme, R_N est la résistance équivalente du dipôle AB lorsque les source autonomes sont éteintes.

Exemple :

4.3.3.3 Équivalence THEVENIN-NORTON

Les deux modèles précédents sont équivalents :

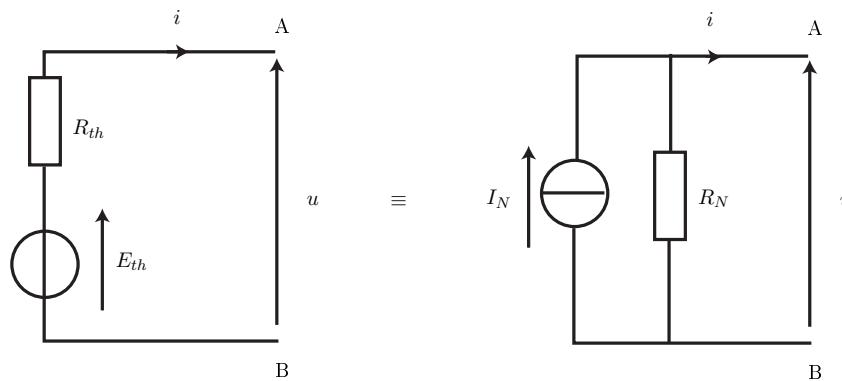


FIGURE 4.5 – Équivalence THEVENIN-NORTON.

On a :

$$u = E_{th} - R_{th}i \quad \text{et} \quad i = I_N - \frac{u}{R_N} \quad \text{quelles que soient les valeurs de } u \text{ et de } i$$

on déduit alors que :

$$E_{th} = R_N I_N \quad \text{et} \quad R_{th} = R_N$$

Remarque : il faut faire attention au sens de I_N et E_{th} , elles sont dans le même sens que i .

Chapitre 5

Circuits en régime sinusoïdale

5.1 Approximation des régimes quasi-permanents (ARQP)

On dit qu'on est en régime continu lorsque toutes les grandeurs (intensités et tensions) sont indépendantes du temps.

On parle de régime variable quand les grandeurs dépendent du temps : $i = i(t)$ et $u = u(t)$.

En régime hautement variable (hautes fréquences) on constate par exemple que le courant $i(t)$ n'a pas la même valeur dans un circuit série (il dépend du temps et de l'espace!). Ceci est dû au phénomène de propagation.

Le temps de propagation d'un signal (courant ou tension) dans un circuit de longueur L est : $\Delta t = L/c$ ($c = 3.10^8$ m/s). Si les temps caractéristiques du circuit (période T , temps de montée du signal, temps d'acquisition des mesures, etc) sont grands devant Δt , les phénomènes de propagation sont négligeables. Soit :

$$T \gg \Delta t \rightarrow T \gg L/c \rightarrow \lambda = cT \gg L$$

où $\lambda = cT$ est la longueur d'onde du signal.

Conclusion :

Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

↕

La longueur d'onde (λ) \gg La taille du circuit (L)

Application au laboratoire d'électronique :

- taille des circuits $L \sim 1$ m
- fréquence maximale des GBF $F \sim 10$ MHz $\rightarrow \lambda = cT = \frac{c}{F} \sim 30$ m $\gg L$

on est bien dans l'ARQS ($i = i(t)$ et $u = u(t)$).

Remarque : Toutes les expériences de travaux pratiques d'électricité et d'électronique sont réalisées dans le cadre de l'A.R.Q.S ou en régime continu.

5.2 Signaux périodiques

5.2.1 Signal sinusoïdal

5.2.1.1 Présentation

un signal sinusoïdal $u(t)$ (un courant ou une tension) s'écrit sous la forme :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

avec :

- U_m : l'amplitude du signal ;
- ω : la pulsation (rad.s^{-1}) ;
- $f = \frac{\omega}{2\pi}$ est la fréquence (Hz) ;
- $T = \frac{1}{f}$ la période (s) ;
- $\varphi = \omega t + \varphi_0$ est la phase à l'instant t et φ_0 est la phase à l'origine du temps.

5.2.1.2 Notation complexe

À un signal sinusoïdal (réel) $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ correspond un signal complexe $\underline{x}(t)$:

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad \underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

La grandeur $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ est appelée : **amplitude complexe**.

Si on calcule la grandeur complexe $\underline{x}(t)$, la valeur réelle du signal physique s'obtient simplement en écrivant :

$$x(t) = \Re[\underline{x}(t)]$$

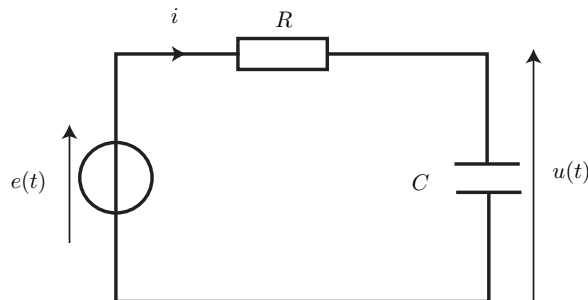
et on aussi :

$$X_m = |\underline{X}_m| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(\underline{X}_m)$$

Intérêt de la notation complexe : Permet de **faciliter** les calculs mathématiques lorsqu'il s'agit d'*opérations linéaires* (addition, soustraction, dérivation, intégration,...). En effet :

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega \underline{x}(t) \quad \text{et} \quad \int \underline{x}(t) dt = \frac{\underline{x}(t)}{j\omega}$$

Exemple : Calculer la tension $u(t)$ en régime permanent.



On donne : $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

Méthode utilisant les notations réelles :

D'après la loi des mailles, l'équation différentielle de u est :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{e}{\tau}$$

La solution générale (voir annexe) de cette équation est :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

avec :

$$u_h(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

est la solution homogène. U_0 est une constante qu'on peut déterminer en utilisant les conditions initiales.

et

$$u_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

est la solution particulière.

Pour déterminer A et B , on injecte u_p dans l'équation différentielle.

$$\left(-A\omega + \frac{B}{\tau}\right) \sin(\omega t) + \left(B\omega + \frac{A}{\tau}\right) \cos(\omega t) = \frac{E_0}{\tau} \cos(\omega t)$$

En identifiant les coefficients du cosinus et du sinus, on obtient :

$$A = \frac{E_0}{1 + (\tau\omega)^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{\tau\omega E_0}{1 + (\tau\omega)^2}$$

d'où la solution générale :

$$u(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_0}{1 + (\tau\omega)^2} [\tau\omega \sin(\omega t) + \cos(\omega t)]$$

En régime permanent ($t \gg \tau$), la solution est :

$$u(t) = \frac{E_0}{1 + (\tau\omega)^2} [\tau\omega \sin(\omega t) + \cos(\omega t)]$$

Méthode utilisant les notations complexe :

En régime permanent, la solution a la même forme que le seconde membre, donc $u(t)$ sera sinusoïdale et on peut donc utiliser la notation complexe.

L'équation différentielle en notation complexe s'écrit :

$$\tau \frac{du}{dt} + u = \underline{e} = E_0 e^{j\omega t}$$

soit :

$$j\omega\tau \underline{u} + \underline{u} = E_0 e^{j\omega t}$$

d'où :

$$\underline{u} = \frac{E_0}{1 + j\tau\omega} e^{j\omega t} = E_0 \frac{(1 - j\tau\omega)}{(1 + (\tau\omega)^2)} [\cos(j\omega t) + j \sin(j\omega t)]$$

En revenant à la notation réelle :

$$u(t) = \Re[\underline{u}] = \frac{E_0}{1 + (\tau\omega)^2} [\tau\omega \sin(\omega t) + \cos(\omega t)]$$

On constate sur cet exemple simple, que l'utilisation de la notation complexe facilite les calculs.

Attention : on ne peut utiliser la notation complexe qu'en régime sinusoïdal.

5.2.1.3 Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

Il y a deux méthodes pour déterminer le déphasage entre deux signaux synchrones : Méthode temporelle (mode bi-courbe) et méthode "XY".

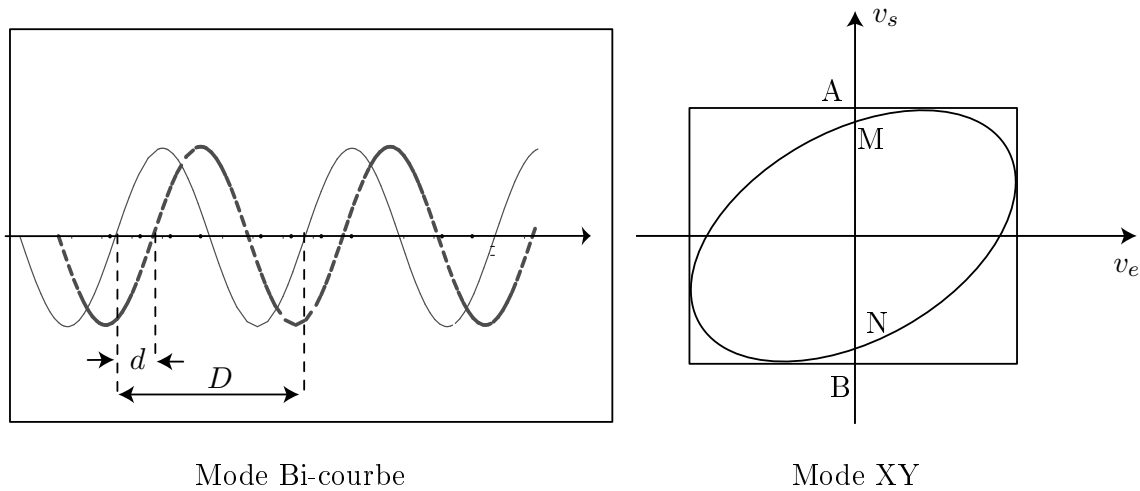


FIGURE 5.1 – Mesure du déphasage

Le déphasage entre les deux signaux est :

✓ en mode bi-courbe

$$\varphi = 2\pi \frac{d}{D}$$

✓ en mode "XY" :

$$|\sin(\varphi)| = \frac{MN}{AB}$$

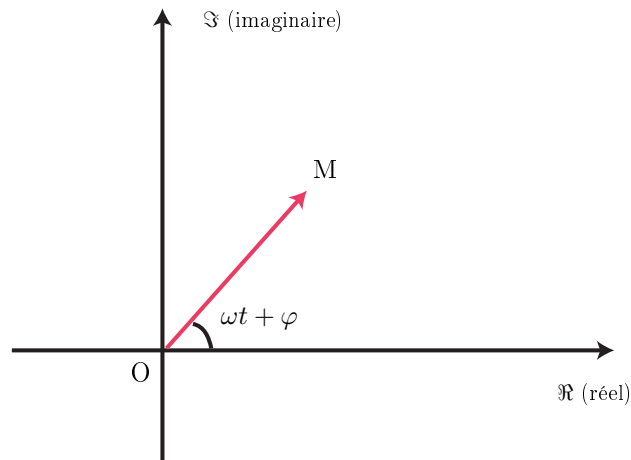
5.2.1.4 Représentation de FRESNEL

À la notation complexe $\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X} e^{j(\omega t)}$ on associe une représentation vectorielle dite représentation de FRESNEL.

Dans le plan complexe (\Im, \Re), on trace, à un instant t , un vecteur \overrightarrow{OM} tel que :

- $OM = |\underline{X}| = X_m$ (amplitude)
- $(Ox, \overrightarrow{OM}) = \omega t + \varphi$ (phase à l'instant t)

Le vecteur \overrightarrow{OM} est un vecteur tournant dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire constante ω autour de l'origine et dont le module vaut l'amplitude X_m . Ce vecteur est appelé *vecteur de FRESNEL*. En

FIGURE 5.2 – Représentation de FRESNEL d'un **signal sinusoïdal**.

général, on le représente à l'instant $t = 0$.

Remarque : Une telle représentation offre l'avantage de donner une visualisation géométrique afin d'alléger les calculs.

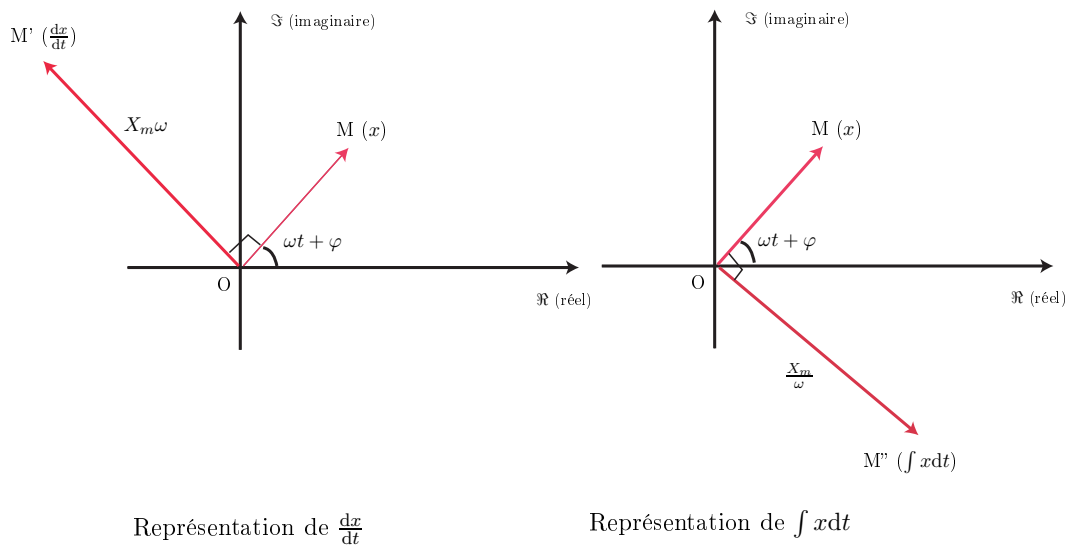
Représentation de $\frac{dx}{dt}$ Représentation de $\int x dt$

FIGURE 5.3 – Représentation de FRESNEL de la dérivée et de l'intégrale d'un signal.

Représentation de la dérivée d'un signal.

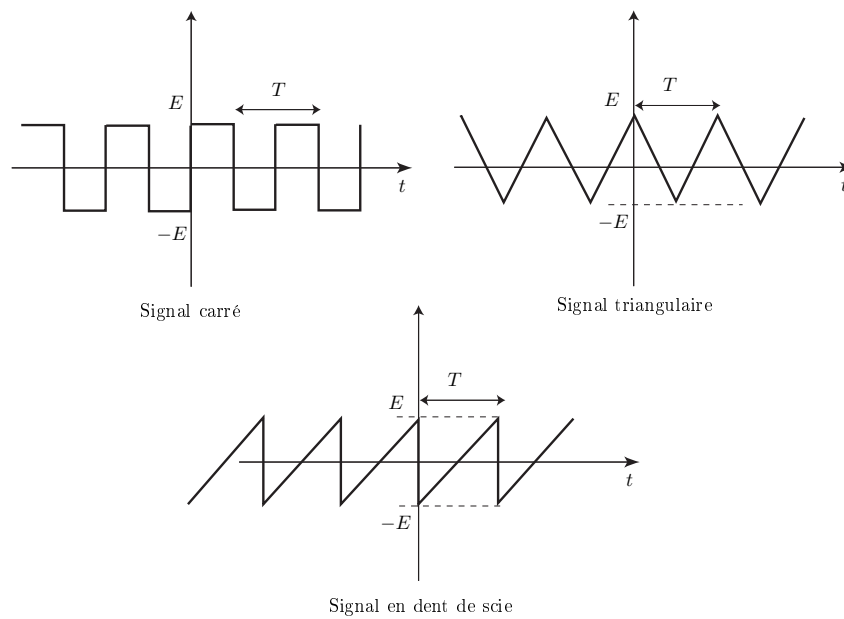
$$\frac{dx}{dt} = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = X_m \omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Le vecteur de FRESNEL a pour module ωX_m et pour phase initiale $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Il s'agit donc du vecteur représentant $x(t)$ auquel on a fait subir une homothétie de centre O et de rapport ω puis une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique.

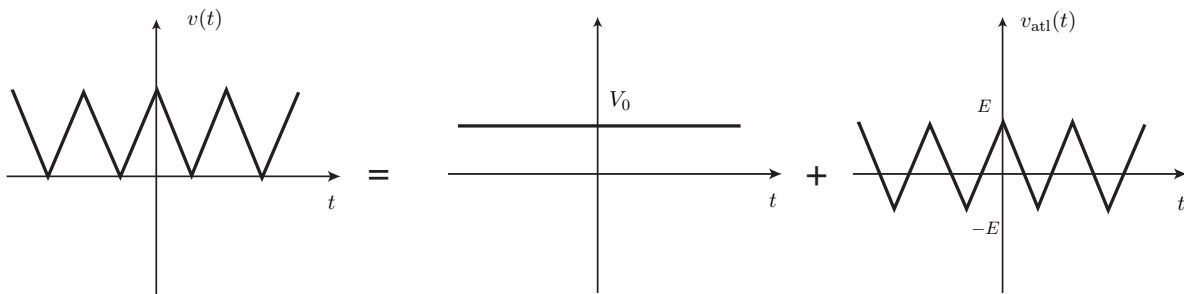
Représentation de l'intégrale d'un signal.

$$\int x(t)dt = \frac{X_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) = \frac{X_m}{\omega} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

Le vecteur de FRESNEL a pour module $\frac{X_m}{\omega}$ et pour phase initiale $\varphi - \frac{\pi}{2}$. Il s'agit donc du vecteur représentant $x(t)$ auquel on a fait subir une homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{\omega}$ puis une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens des aiguilles d'une montre.

Application TD2**5.2.2 Autres formes des signaux électrique**

Un signal électrique périodique quelconque peut être décomposé en somme de deux signaux distincts : la composante continue (valeur moyenne) et la composante alternative.



Signal électrique complet $v(t) =$ composante continue (V_0) + composante alternative ($v_{atl}(t)$)

$$v(t) = V_0 + v_{atl}(t)$$

La valeur moyenne V_0 est :

$$V_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t)dt$$

La valeur efficace de $v(t)$ est :

$$V_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt}$$

Cette valeur est appelée parfois valeur TRMS¹ (voir TP).

Exemples 1 : Signal sinusoïdal.

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_0) \rightarrow V_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) dt} \rightarrow V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Exemples 2 : Signal carré.

$$V_e = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{T/2} E^2 dt} \rightarrow V_e = E$$

Exemples 3 : Signal triangulaire.

$$v(t) = \frac{2E}{T} t \rightarrow V_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v^2(t) dt} \rightarrow V_e = \frac{E}{\sqrt{3}}$$

Remarque : La valeur efficace de $v_{\text{atl}}(t)$:

$$RMS = V_e' = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_{\text{atl}}^2(t) dt}$$

est appelée valeur RMS (voir TP).

Expérience : Visualisation des signaux et Mesure des grandeurs caractéristiques.

Liste du matériel :

- GBF ;
- Oscilloscope ;
- Multimètre ;
- Fils.

5.3 Circuits en régime sinusoïdal

5.3.1 Impédance complexe

5.3.1.1 Définition

Considérons un dipôle linéaire passif. En régime harmonique, il est parcouru par un courant sinusoïdal de la forme :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

et la tension à ses bornes est de la forme :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

1. TRMS : True Root Mean Square



En notation complexe :

$$\underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t}$$

L'impédance complexe du dipôle est la grandeur complexe :

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m}$$

avec :

- $|\underline{Z}(j\omega)| = \frac{U_m}{I_m}$ est l'impédance du dipôle ;
- $\arg(\underline{Z}(j\omega)) = \varphi(\omega) = \varphi_u - \varphi_i$ est le déphasage de la tension par rapport au courant.

L'admittance complexe du dipôle est :

$$\underline{Y}(j\omega) = \frac{1}{\underline{Z}(j\omega)}$$

5.3.1.2 Exemples

5.3.1.2.1 Résistor La tension aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance R parcouru par un courant est $i(t)$ est :

$$u(t) = Ri(t) \quad \rightarrow \quad \underline{u}(t) = R\underline{i}(t) \quad \rightarrow \quad \underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

d'où :

$$\underline{Z}(j\omega) = R$$

la tension et le courant sont en phase.

5.3.1.2.2 Bobine La tension aux bornes d'une bobine d'inductance L parcouru par un courant est $i(t)$ est :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad \underline{u}(t) = L \frac{d\underline{i}(t)}{dt} = Lj\omega \underline{i}(t) \quad \rightarrow \quad \underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

d'où :

$$\underline{Z}(j\omega) = jL\omega$$

Le module $Z = L\omega$ est d'autant plus élevé que la fréquence est élevée. En haute fréquence, elle se comporte comme un interrupteur ouvert ($Z \rightarrow \infty$). En revanche, en très basse fréquence, elle se comporte comme un interrupteur fermé ($Z \rightarrow 0$).

L'argument de $\underline{Z}(j\omega)$ est $\varphi = \frac{\pi}{2}$: La tension est en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant.

5.3.1.2.3 Condensateur La tension aux bornes d'un condensateur de capacité C est relié au courant qui lui parcourt par :

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad \underline{i}(t) = C \frac{d\underline{u}(t)}{dt} = Cj\omega \underline{u}(t) \quad \rightarrow \quad \underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

d'où :

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{1}{jC\omega}$$

Le module $Z = \frac{1}{C\omega}$ est d'autant plus faible que la fréquence est élevée. En haute fréquence, elle se comporte comme un interrupteur fermé ($Z \rightarrow 0$). En revanche, en très basse fréquence, elle se comporte comme un interrupteur ouvert ($Z \rightarrow \infty$).

L'argument de $\underline{Z}(j\omega)$ est $\varphi = -\frac{\pi}{2}$: La tension est en retard de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant.

5.3.1.3 Association des impédances

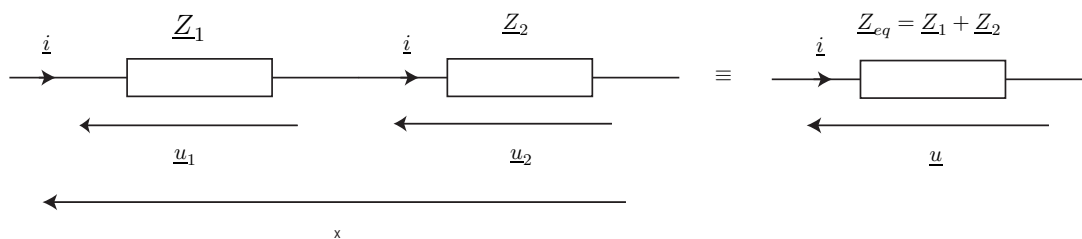


FIGURE 5.4 – Association série de deux dipôles.

5.3.1.3.1 Association série

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_k \underline{Z}_k$$

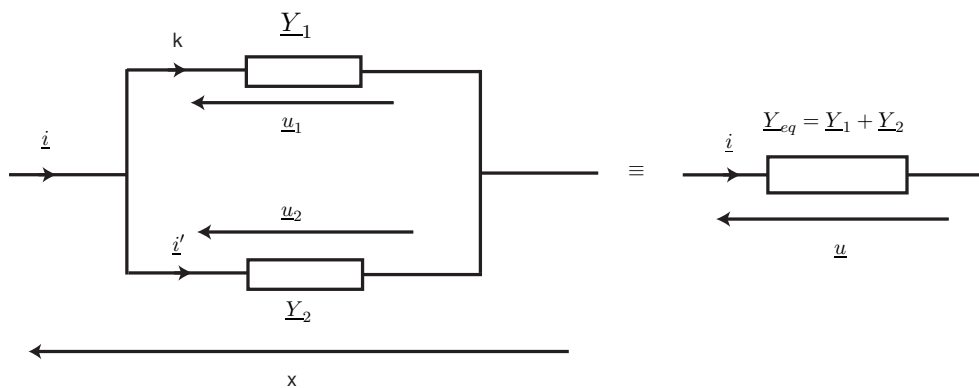


FIGURE 5.5 – Association série de deux dipôles.

5.3.1.3.2 Association parallèle

$$\underline{Y}_{eq} = \sum_k \underline{Y}_k$$

5.3.1.3.3 Applications : Angle de pertes d'une bobine +

5.3.1.4 Diviseur de tension-Diviseur de courant

La différence de potentiel aux bornes d'un dipôle en fonction de celle aux bornes de l'association des dipôles en série :

$$u_2 = u \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

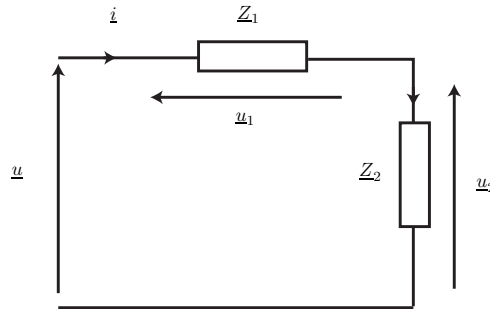


FIGURE 5.6 – Deux impédances en **série** forment un diviseur de tension.

Le courant qui traverse une impédance dans une association des dipôles en **parallèle** :

$$I_2 = I \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2}$$

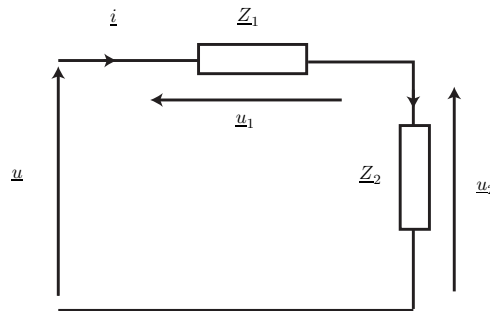


FIGURE 5.7 – Deux impédances en **parallèle** forment un diviseur de courant.

Application : sonde atténuatrice passive d'oscilloscope

5.3.2 Problème : Circuit RLC en régime sinusoïdal

Considérons un circuit (R, L, C) série soumis à une excitation sinusoïdale délivrée par un générateur basse fréquence. Nous supposons que le générateur délivre, à partir de l'instant $t = 0$, la tension $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant i . On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$.
2. Déterminer la solution générale de cette équation. Mettre en évidence un régime transitoire et un régime permanent.
3. Déterminer les réponses en courant et charge du circuit en régime permanent.
4. Déterminer la pulsation de résonance en courant. Quelle le déphasage entre le courant i et la tension excitatrice e ?

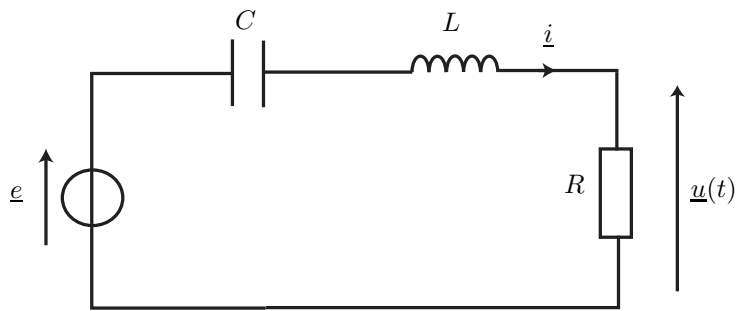


FIGURE 5.8 – Circuit RLC série en régime forcé.

5. Déterminer la pulsation de résonance en tension u . Quelle le déphasage entre la tension u et la tension excitatrice e ?

5.4 Complément : Décomposition d'un signal en série de FOURIER (TP)

5.4.0.1 Décomposition en série de FOURIER (DSF)

Soit $u(t)$ une fonction périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. D'après le théorème de FOURIER (voir cours de mathématiques) permet d'écrire cette fonction sous la forme :

$$u(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

où :

- $V_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$: valeur moyenne de u .
- $a_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega t) dt$
- $b_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega t) dt$

Le premier terme $n = 1$ est appelé le **fondamental**. Les autres termes ($n \geq 2$) sont appelés les **harmoniques**.

On peut également écrire la DSF de u sous la forme

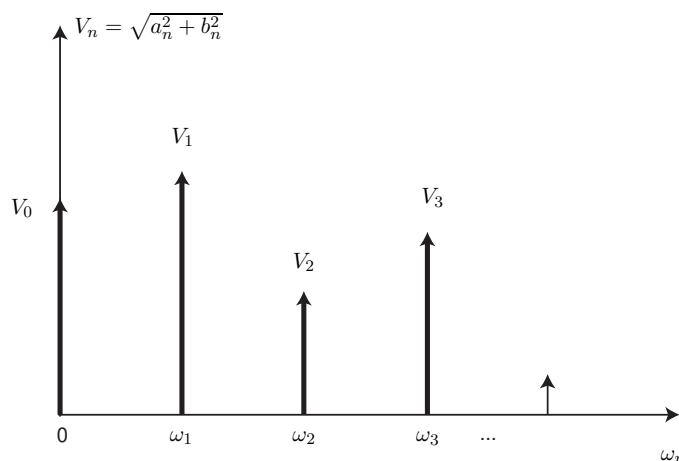
$$u(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} V_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

où :

- $V_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
- $\tan(\varphi_n) = -\frac{b_n}{a_n}$

5.4.0.2 Spectre d'un signal

Le spectre en amplitude du signal u est la représentation graphique de V_n en fonction de n (ou $\omega_n = n\omega$ ou $f_n = nf$)



On peut utiliser la carte d'acquisition (SP5) ou l'oscilloscope pour visualiser le spectre des signaux :

Propriétés :

- si la fonction u est paire alors $b_n = 0$
- si la fonction u est impaire alors $a_n = 0$
- si la fonction u est symétrique par rapport à l'axe t alors $V_0 = 0$.

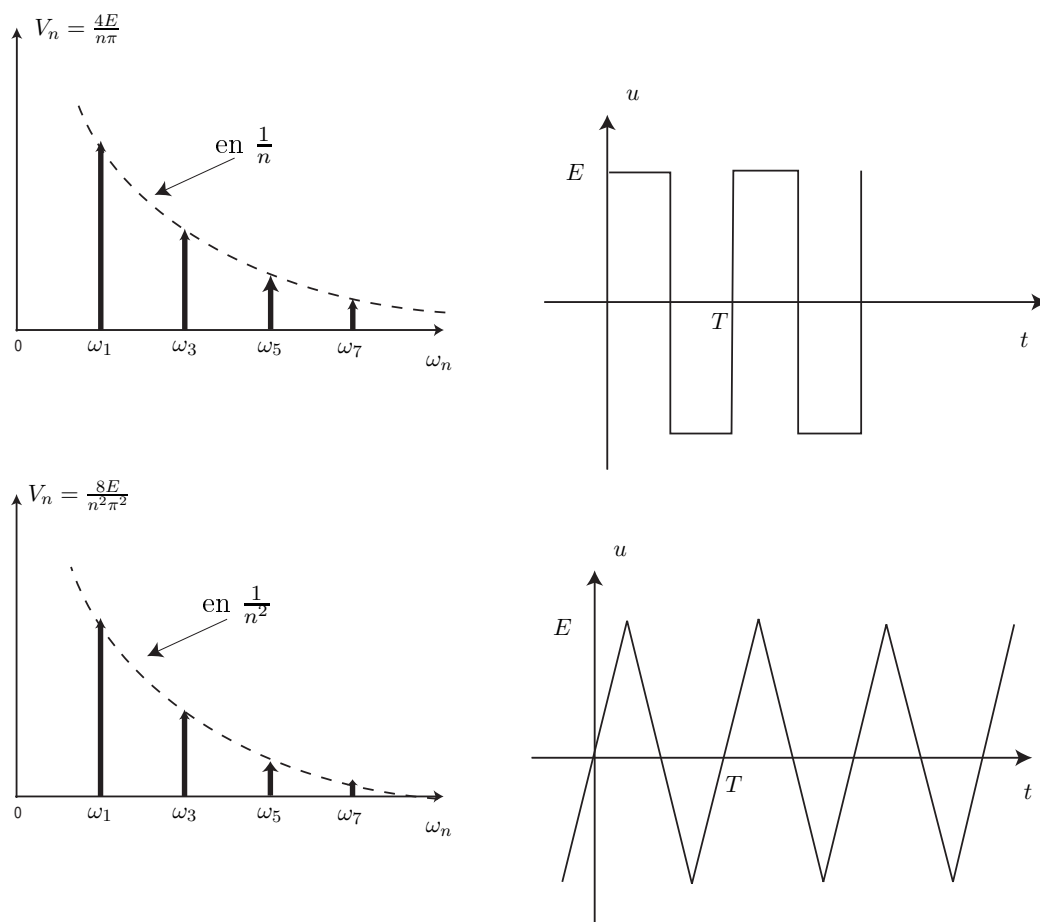


FIGURE 5.9 – Exemple de spectres.

5.4.0.3 Théorème de PARSEVAL

On peut calculer la valeur efficace du signal u à partir de son DSF :

$$U_e = \sqrt{V_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{V_n^2}{2}}$$

c'est le théorème de PARSEVAL.

Chapitre 6

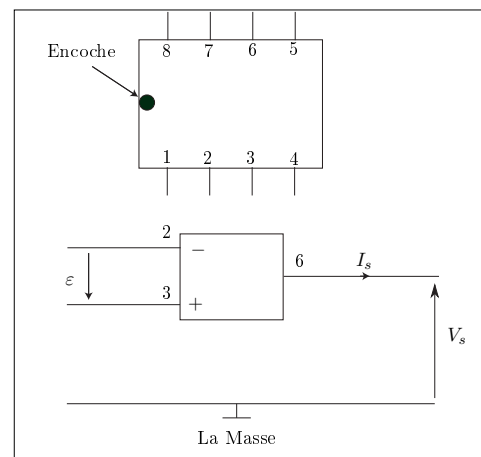
Amplificateur opérationnel-1 (AO)

6.1 Présentation de l'A.O

L' Amplificateur Opérationnel (A.O) est circuit intégré (ensemble de transistors, diodes, résistances, condensateurs placés sur d'un cristal de silicium) de 8 broches destinées à le relier au reste du circuit extérieur.

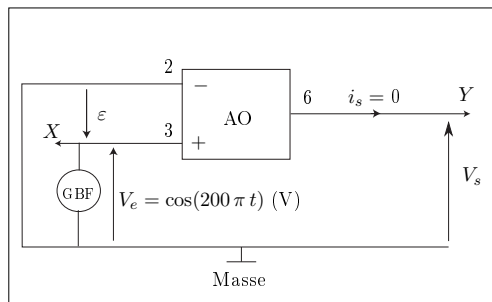
- 2 : entrée inverseuse (-) ;
- 3 : entrée non inverseuse (+) ;
- 4 : alimentation négative V_- (ici $V_- = -15\text{ V}$) ;
- 7 : alimentation positive V_+ (ici $V_+ = +15\text{ V}$) ;
- 6 : sortie ;
- 1 et 5 : réglage du décalage en tension (offset) ;
- 8 : n'est pas relié au circuit (non connecté).

En général, le circuit de polarisation de l'A.O. n'est pas représenté dans les schémas des montages. L'utilité de cette alimentation est de fournir de l'énergie à l'A.O. pour qu'il puisse amplifier la tension ε .

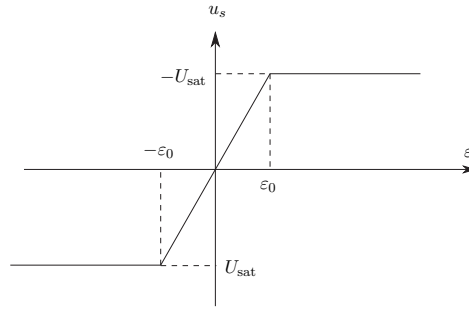


6.2 Caractéristique statique de transfert en sortie ouverte ($i_s = 0$)

Pour étudier la réponse de la tension de sortie u_s en fonction de la tension différentielle d'entrée ε , on peut, par exemple, utiliser le montage de la figure suivante en fixant la tension de l'entrée inverseuse à 0 et en connectant un générateur sinusoïdal à l'entrée non inverseuse.



En mode XY de l'oscilloscope par exemple, on obtient les résultats suivants :



On constate que l'A.O. a deux régimes de fonctionnement :

- Régime **saturé** :

- $u_s = U_{\text{sat}}$ pour $\varepsilon > \varepsilon_0$;
- $u_s = -U_{\text{sat}}$ pour $\varepsilon < -\varepsilon_0$;

Dans ces cas, la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel est constante et indépendante de la valeur de la tension différentielle d'entrée ε .

La tension de saturation est notée U_{sat} et sa valeur est habituellement comprise entre 12,5 et 14,5 V pour une alimentation de l'amplificateur opérationnel de -15 V/ +15 V. En pratique, la tension de saturation négative n'est pas forcément égale en valeur absolue à la tension de saturation positive. La valeur de cette tension dépend de l'alimentation du composant.

- Régime **linéaire** :

$$u_s = \mu_0 \varepsilon \quad \text{si} \quad -\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

où μ_0 est le coefficient d'amplification différentielle en régime continu avec $\varepsilon_0 \sim mV$ et $\mu_0 \sim 10^4$ à 10^6 .

On en déduit que la zone de passage de $-U_{\text{sat}}$ à $+U_{\text{sat}}$ est très étroite. Il sera donc en pratique délicat de se placer dans cet intervalle de valeurs pour la tension ε .

Pour fonctionner en régime linéaire, il doit y avoir une liaison (boucle de réaction) entre la sortie (6) et l'entrée inverseuse (2) appelée réaction négative (ou contre réaction).

6.2.1 Modèle de l'A.O idéal

Du fait des valeurs des grandeurs caractéristiques de l'AO, on peut utiliser une idéalisation de ce composant à fin de simplifier l'étude théorique.

Le modèle idéal de l'amplificateur opérationnel correspond à faire les hypothèses suivantes :

- *Courants d'entrée nul* :

$$i^+ = i^- = 0$$

cette hypothèse est justifié par le fait que leur ordre de grandeur qui est de l'ordre de 30 pA (TL081 par exemple).

- *Gain différentiel μ_0 infini* :

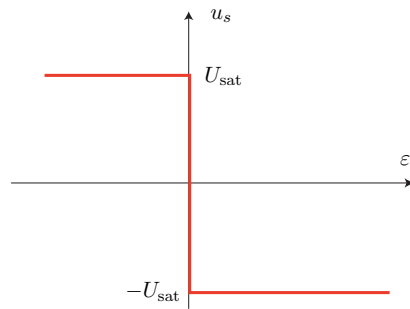
$$\mu_0 \rightarrow +\infty$$

ceci est justifié par le fait que μ_0 est assez élevé ($\sim 10^5$)

- *Résistance de sortie infinie* :

$$R_s = 0$$

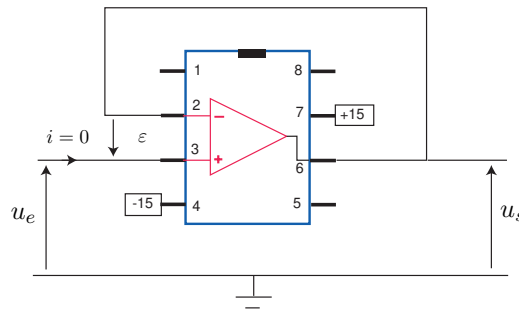
La caractéristique de l'AO idéal est alors :



En régime linéaire, la tension d'entrée de l'AO idéal est nulle : $\varepsilon = 0$.

6.3 Montages à AO

6.3.1 Montage suiveur



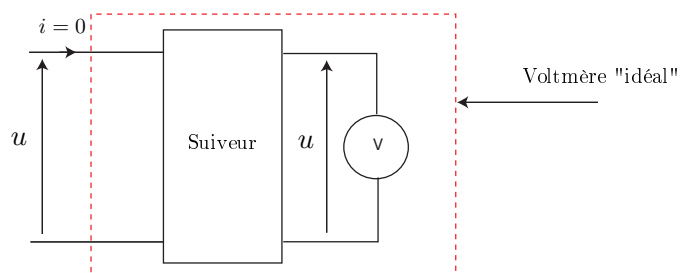
Il y a une boucle entre l'entrée inverseuse ($-$) est la sortie, donc l'AO fonctionne en régime linéaire $\rightarrow \varepsilon \approx 0$ ($\varepsilon \sim mV$ voir TP).

La loi des mailles donne :

$$u_s + \varepsilon - u_e = 0 \quad \rightarrow \quad u_s = u_e$$

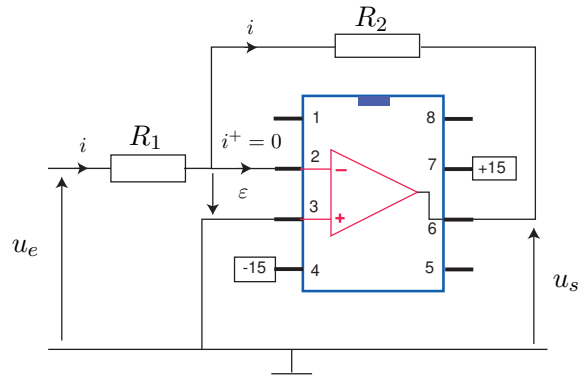
d'où le nom donné à ce montage : la tension de sortie est égale à la tension à vide du générateur placé à l'entrée du montage.

Puisque le courant d'entrée est très faible, ce montage peut être utilisé pour limiter l'influence entre deux étages (quadripôles) en série. Par exemple on peut transformer un voltmètre normale en un voltmètre de bonne qualité :



on a construit ainsi un voltmètre de grande résistance d'entrée (car $i = 0$), donc il n'influence pas le circuit lors de la mesure de la tension u .

6.3.2 Montage amplificateur



Il y a une boucle entre l'entrée inverseuse (-) est la sortie, donc l'AO fonctionne en régime linéaire $\rightarrow \varepsilon \approx 0$ ($\varepsilon \sim mV$ voir TP).

La loi des mailles donne :

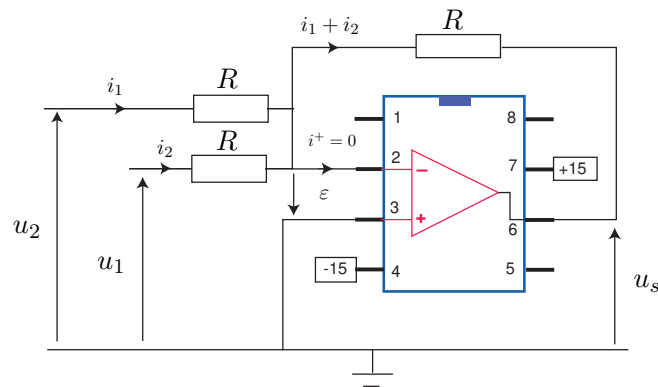
$$u_s + R_2 i + \varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad u_e - R_1 i + \varepsilon = 0$$

soit :

$$u_s = -\frac{R_2}{R_1} u_e$$

c'est un amplificateur inverseur.

6.3.3 Montage sommateur



Il y a une boucle entre l'entrée inverseuse (-) est la sortie, donc l'AO fonctionne en régime linéaire $\rightarrow \varepsilon \approx 0$ ($\varepsilon \sim mV$ voir TP).

La loi des mailles donne :

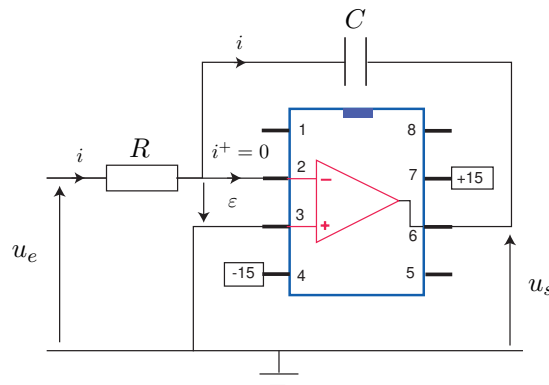
$$u_s + R(i_1 + i_2) + \varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad u_1 - R i_1 + \varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad u_2 - R i_2 + \varepsilon = 0$$

soit :

$$u_s = -(u_1 + u_2)$$

c'est un sommateur (avec inversion de signe).

6.3.4 Montage intégrateur



Il y a une boucle entre l'entrée inverseuse (-) est la sortie, donc l'AO fonctionne en régime linéaire $\rightarrow \varepsilon \approx 0$ ($\varepsilon \sim mV$ voir TP).

La loi des mailles donne :

$$u_s + u_c + \varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad u_e - Ri + \varepsilon = 0$$

avec : $i = C \frac{du_c}{dt}$.

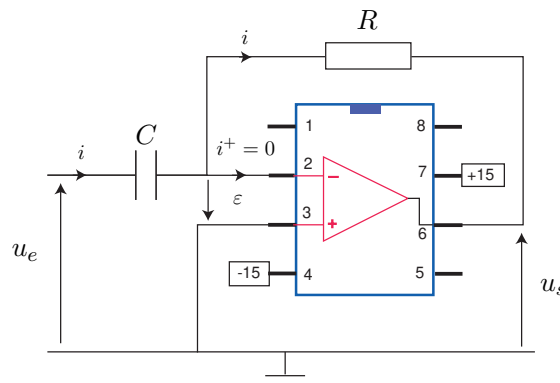
soit :

$$u_s = -\frac{1}{RC} \int u_e dt$$

c'est un intégrateur.

Remarque : En pratique, les défauts de l'AO réel le font saturer et par conséquent ce montage de principe ne fonctionne pas correctement. Pour remédier à cela on ajoute une résistance en parallèle avec le condensateur (voir TP).

6.3.5 Montage dérivateur



Il y a une boucle entre l'entrée inverseuse (-) est la sortie, donc l'AO fonctionne en régime linéaire $\rightarrow \varepsilon \approx 0$ ($\varepsilon \sim mV$ voir TP).

La loi des mailles donne :

$$u_s + Ri + \varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad u_e - u_c + \varepsilon = 0$$

avec : $i = C \frac{du_c}{dt}$.

soit :

$$u_s = -\frac{1}{RC} \frac{du_e}{dt}$$

c'est un dérivateur.

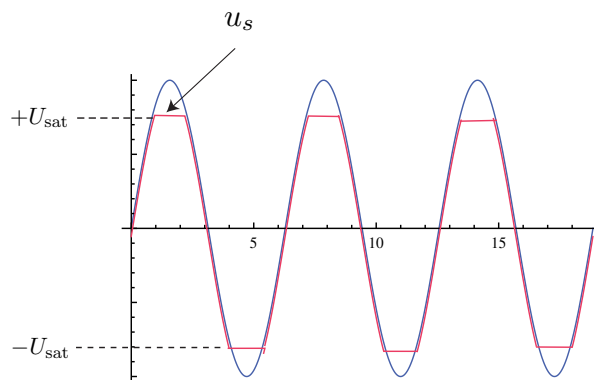
6.4 Limitations du fonctionnement linéaire de l'AO

Le modèle de l'amplificateur opérationnel idéal n'est qu'un modèle qui est satisfaisant dans une large mesure. Cependant, dans un certain nombre de cas, on observe des écarts entre les comportements réellement obtenus et ceux qui sont prédits dans le cadre du modèle idéal.

6.4.1 Limitation en tension de sortie

La valeur absolue de la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel ne peut dépasser une valeur appelée tension de saturation et notée U_{sat} .

$$|u_s| \leq U_{\text{sat}}$$



La solution pour pallier ce problème est de diminuer l'amplitude du signal d'entrée.

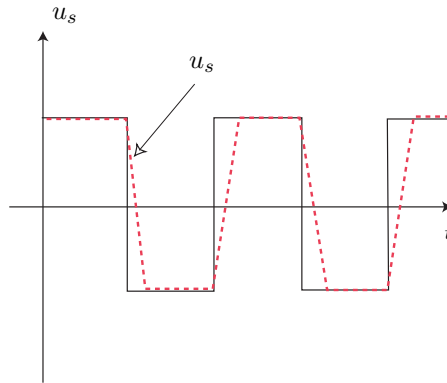
6.4.2 Limitation en courant de sortie

Un amplificateur opérationnel ne peut pas délivrer un courant de sortie dont l'intensité i_s dépasse une valeur limite $I_{s_{\text{max}}}$. Elle est généralement comprise entre 20 et 30 mA.

$$I_s \leq I_{s_{\text{max}}} \sim 20 \text{ mA}$$

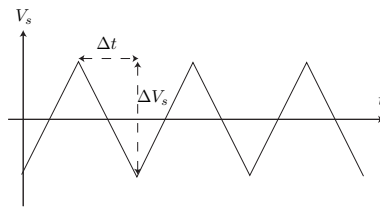
6.4.3 Vitesse de balayage ou "slew rate"

Expérimentalement, on constate qu'il existe une limitation de la vitesse de variation de la tension en sortie de l'amplificateur opérationnel. Elle correspond au fait que le temps de réponse de l'amplificateur opérationnel n'est pas négligeable et qu'il y aura un retard dans la réponse.



Ainsi pour un signal carré, le changement brutal de valeur pour la tension ne sera pas immédiat et cela entraîne un phénomène de triangularisation du carré. On parle de *slew rate* σ ou de vitesse de balayage limite en sortie.

$$\sigma = \left| \frac{du_s}{dt} \right|_{\max} = \left| \frac{\Delta V_s}{\Delta t} \right|$$



En régime sinusoïdal $u_s = U_m \cos(\omega t)$ on obtient une expression du slew rate : $\sigma = U_m \omega$.

La fréquence à laquelle cette limitation intervient dépend de l'amplitude U_m du signal : plus le signal aura une grande amplitude, plus la fréquence maximale d'utilisation (c'est-à-dire en dessous de laquelle aucune déformation du signal n'est visible) sera basse (voir TP).

Chapitre 7

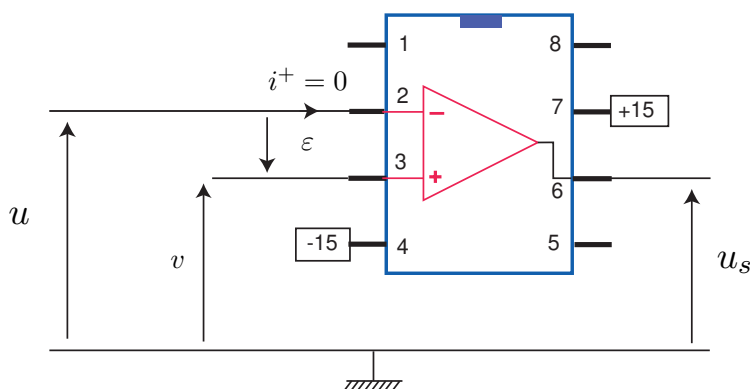
Amplificateur opérationnel-2 : Applications

7.1 Comparateurs

Les comparateurs sont des circuits fonctionnant en régime non linéaire. La tension de sortie ($\pm U_{sat}$) dépend du résultat de la comparaison de la tension d'entrée avec une tension de référence, d'où le nom donné à ces montages.

7.1.1 Comparateur simple

C'est le plus simple des montages comparateurs à amplificateur opérationnel.



Il y a *pas* de boucle entre l'entrée inverseuse (-) est la sortie, donc l'AO fonctionne en régime **saturé**.

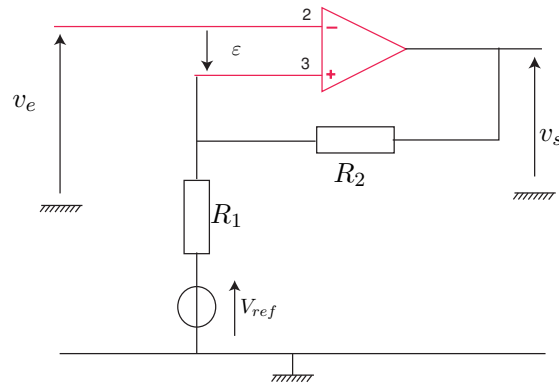
- si $u > v \rightarrow \varepsilon < 0 : u_s = -V_{sat}$
- si $u < v \rightarrow \varepsilon > 0 : u_s = +V_{sat}$

L'état de sortie indique laquelle des deux tension est plus élevée.

Ce comparateur est très sensible au bruit c'est-à-dire aux parasites.

7.2 Comparateur à hystérésis

Le schéma de principe de ce type de comparateur est donné sur la figure suivante.



Par application de la relation de MILLMAN à l'entrée non inverseuse de l'amplificateur opérationnel, nous obtenons :

$$v^+ = \frac{\frac{V_{ref}}{R_1} + \frac{v_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

soit :

$$\varepsilon = v^+ - v_e = \frac{R_2 V_{ref} + R_1 v_s}{R_1 + R_2} - v_e$$

Lorsque l'amplificateur opérationnel est saturé positivement, nous avons tout à la fois :

$$v_s = V_{sat} \quad \text{et} \quad \varepsilon > 0$$

soit :

$$v_e < \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{ref} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} = V_2$$

Le basculement de $v_s = +V_{sat}$ à $v_s = -V_{sat}$ se fait à la tension de seuil au point de fonctionnement B.

En revanche, lorsque l'amplificateur opérationnel est saturé négativement, nous avons :

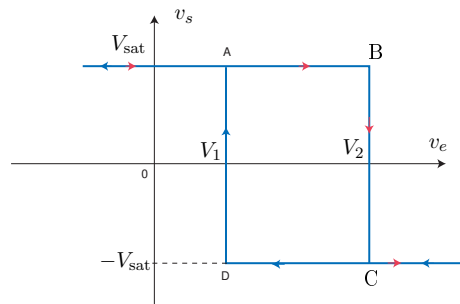
$$v_s = -V_{sat} \quad \text{et} \quad \varepsilon < 0$$

soit :

$$v_e > \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{ref} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} = V_1$$

Le basculement de $v_s = -V_{sat}$ à $v_s = +V_{sat}$ se fait à la tension de seuil au point de fonctionnement D.

D'où la caractéristique de transfert du comparateur à hystérésis :



Le cycle d'hystérésis est centré en :

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{ref}$$

sa largeur est :

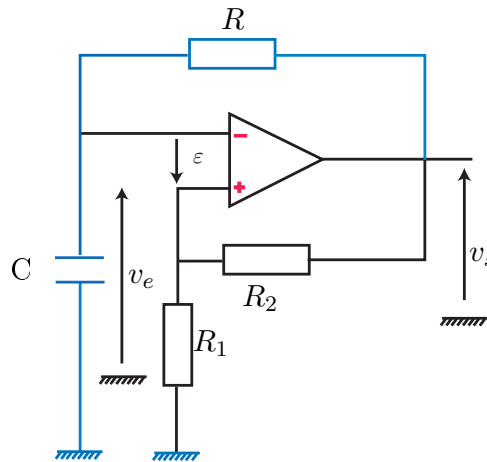
$$\Delta V = V_2 - V_1 = 2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$$

Remarque : La résistance d'entrée de ce comparateur est très grande.

7.3 Oscillateur à relaxation

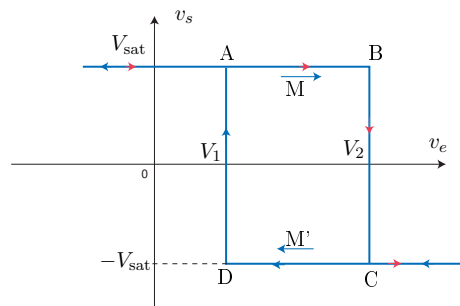
Considerons un comparateur inverseur a hysteresis pour lequel $V_{ref} = 0$.

L'oscillateur à relaxation est constitué de deux éléments : un comparateur à hystérésis et un intégrateur, dont le rôle est de faire glisser le point de fonctionnement M du comparateur vers ses points de basculement B et D.



Quand $v_s = V_{sat}$, le point de fonctionnement M du comparateur doit se déplacer de A vers B qui est le point de basculement à saturation positive.

En revanche, lorsque $v_s = -V_{sat}$, le point de fonctionnement M' du comparateur doit se déplacer de C vers D qui est le point de basculement à saturation négative.



Pour cela il faut et il suffit que :

$$\text{lorsque : } v_s = +V_{sat} \rightarrow v_e \uparrow \rightarrow \frac{dv_e}{dt} > 0$$

et

$$\text{lorsque : } v_s = -V_{sat} \rightarrow v_e \downarrow \rightarrow \frac{dv_e}{dt} < 0$$

Donc, le signe de $\frac{dv_e}{dt}$ doit être le même que celui de v_s .

Ces deux conditions sont simultanément réalisées par le circuit (R, C) . En effet :

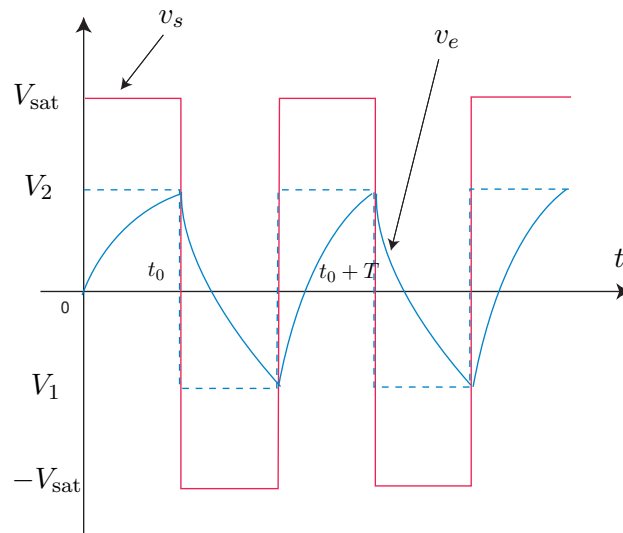
$$C \frac{dv_e}{dt} = \frac{v_s - v_e}{R}$$

puisque

$$|v_s| = V_{\text{sat}} > |v_e|$$

alors $\frac{dv_e}{dt}$ et v_s ont bien le même signe.

Donc, la tension de sortie v_s du circuit bascule *indéfiniment* entre V_{sat} et $-V_{\text{sat}}$: c'est un *multivibrateur astable*.



Calcul de la période T :

Pour ce calcul prenons comme nouvelle origine des temps $t = 0$ la date d'un basculement de V_{sat} à $-V_{\text{sat}}$.

$$v_e(0) = V_2$$

À partir de cette date, le condensateur se charge à travers R sous la tension constante $v_s = -V_{\text{sat}}$. Ce qui conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{\tau} = -\frac{V_{\text{sat}}}{\tau}$$

avec $\tau = RC$.

La solution est :

$$v_e(t) = (V_1 + V_{\text{sat}})e^{-\frac{t}{\tau}} - V_{\text{sat}}$$

La tension $v_e(t)$ décroît à partir de V_2 pour tendre vers la tension $-V_{\text{sat}}$ qu'elle n'atteindra pas. En effet, à $t = t_1$, la tension $v_e(t)$ aura la valeur :

$$V_1 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$$

et un nouveau basculement se produira amenant la tension de sortie de $-V_{\text{sat}}$ à $+V_{\text{sat}}$.

La date $t = t_1$ se calcule en écrivant :

$$v_e(t_1) = V_1 = (V_1 + V_{\text{sat}})e^{-\frac{t_1}{\tau}} - V_{\text{sat}}$$

d'où :

$$t_1 = \tau \ln \left(\frac{V_2 + V_{\text{sat}}}{V_1 + V_{\text{sat}}} \right) = \tau \ln \left(\frac{1+k}{1-k} \right)$$

avec $k = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$.

Le condensateur se charge alors à travers R sous la tension constante $v_s = V_{\text{sat}}$. La tension $v_e(t)$ croît à partir de V_1 pour tendre vers la tension $+V_{\text{sat}}$ qu'elle n'atteindra pas. En effet, à $t = t_1 + t_2$ la tension $v_e(t)$ aura la valeur V_2 et un nouveau basculement se produira amenant la tension de sortie de V_{sat} à $-V_{\text{sat}}$. Le phénomène se poursuit ainsi indéfiniment.

Le calcul de la durée t_2 , qui se mène comme celui de la durée t_1 , donne :

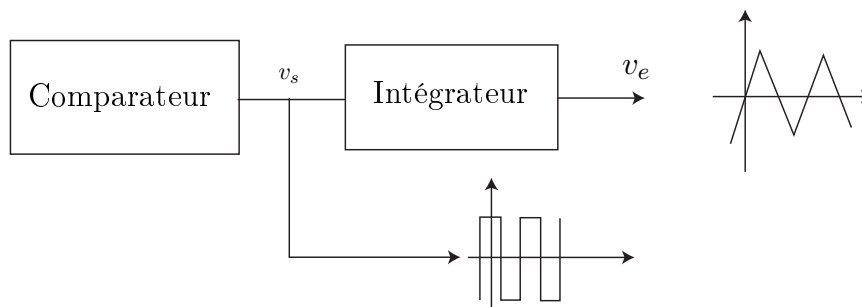
$$t_2 = t_1 = \tau \ln \left(\frac{1+k}{1-k} \right)$$

La période T est :

$$T = 2\tau \ln \left(\frac{1+k}{1-k} \right)$$

7.4 Principe d'un générateur de fonction

Un générateur de fonctions est généralement constitué d'une boucle comprenant un comparateur à hystérésis et un intégrateur.



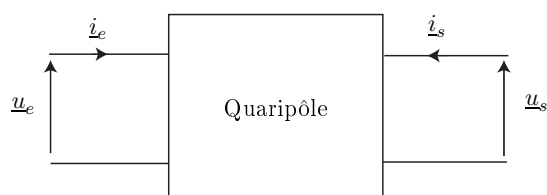
Chapitre 8

Filtres analogiques

8.1 Fonction de transfert d'un filtre

8.1.1 Définition

Un quadripôle est un circuit qui présente deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie.



- \underline{u}_e et \underline{i}_e sont respectivement la tension et le courant d'entrée.
- \underline{u}_s et \underline{i}_s sont respectivement la tension et le courant de sortie.

On régime harmonique on définit la fonction de transfert harmonique de ce quadripôle par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$$

ω est la pulsation du travail.

Un **filtre** est un quadripôle conçu pour transmettre sélectivement les diverses fréquences de la grandeur harmonique.

Lorsque le filtre est linéaire, sa fonction de transfert s'écrit toujours sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

où $N(j\omega)$ et $D(j\omega)$ sont deux polynômes à coefficients réels.

L'ordre du filtre est égal au degré le plus élevé de ces deux polynômes.

La fonction de transfert peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

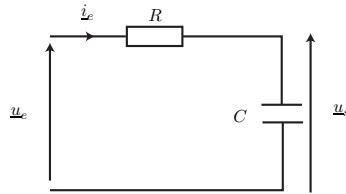
où

- $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ est le gain du filtre ;
- $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$ est la déphasage entre la tension d'entrée et celle de sortie.

Remarque : La fonction de transfert du quadripôle ne peut être définie que si le système est stable

8.1.2 Exemple

Considérons le circuit (R , C représenté sur la figure suivante, il est alimenté par un générateur sinusoïdal. La fonction de transfert de ce quadripôle est :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{Z_c}{R + Z_c} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Ce circuit est appelé filtre car il transmet différemment des signaux harmoniques de fréquences différentes.

8.1.3 Gain en décibel

Le gain en décibel est :

$$G_{\text{db}}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|$$

L'utilisation de l'échelle logarithmique permet de traiter avec autant de précision les faibles et les fortes amplitudes : la multiplication par 10 de H se traduit par un accroissement du gain de 20 dB, quelle que soit sa valeur initiale.

Par définition, une décade est un intervalle de fréquences $[f_1, f_2]$ tel que :

$$\frac{f_1}{f_2} = 10 \quad \text{ou} \quad \log(f_2) - \log(f_1) = 1$$

ou bien :

$$\text{décade} = [f, 10f] \quad ; \quad \forall f$$

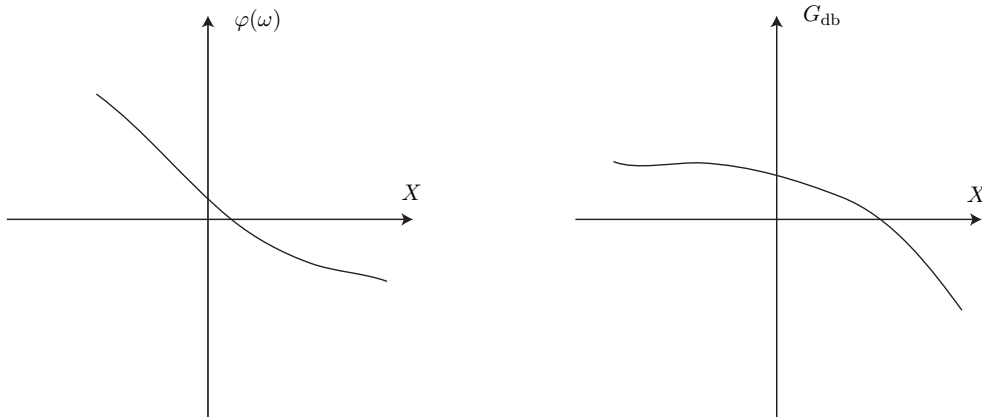
Le gain en puissance est :

$$G_{p(\text{db})} = 10 \log \frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_e}$$

8.1.4 Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est la représentation graphique des deux courbes suivante :

- la courbe de réponse en gain : $G_{\text{db}}(\omega)$ en fonction de $X = \log(\omega)$ (ou $X = \log(f)$) ;
- la courbe de réponse en phase : $\varphi(\omega)$ en fonction de $X = \log(\omega)$ (ou $X = \log(f)$).



8.1.5 Fréquence de coupure

Pour un filtre donné, on définit une fréquence de coupure f_c pour laquelle le gain diminue d'une certaine quantité (devient négligeable).

Souvent on choisit une fréquence de coupure à -3 dB définie par :

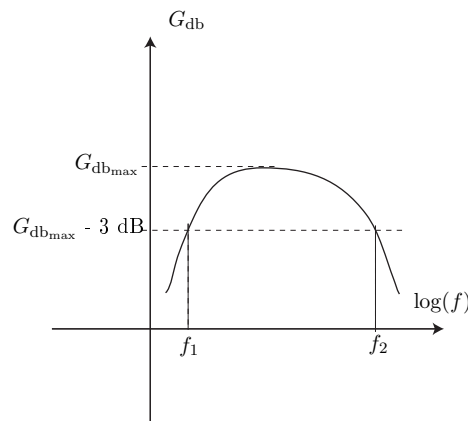
$$G_{\text{db}}(f_c) = G_{\text{db}_{\text{max}}} - 3\text{dB} \quad \Leftrightarrow \quad H(f_c) = \frac{H_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

où H_{max} est la valeur maximale du gain.

8.1.6 Bande passante

La bande passante d'un filtre est l'ensemble des fréquences telles que :

$$G_{\text{db}}(f) \geq G_{\text{db}}(f_c) = G_{\text{db}_{\text{max}}} - 3\text{dB} \quad \Leftrightarrow \quad H(f) \geq H(f_c)$$



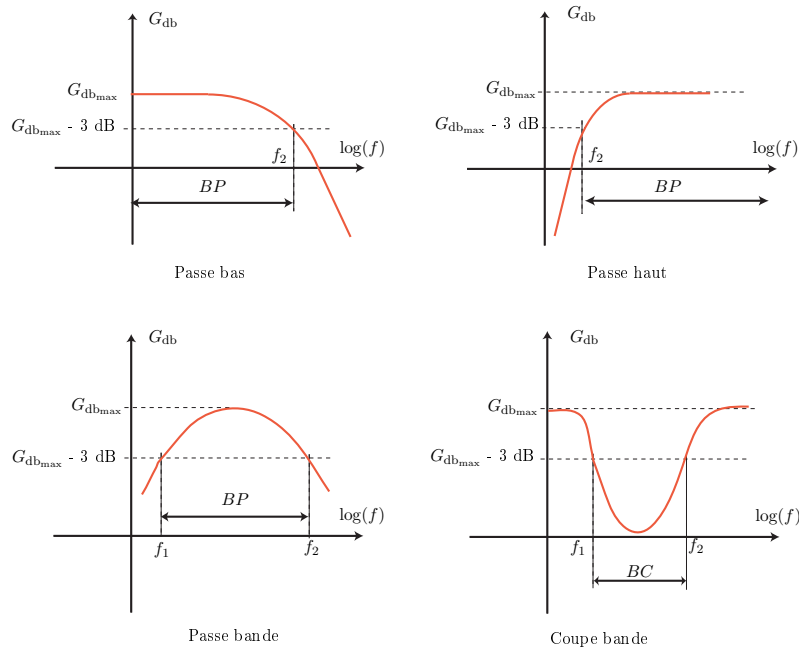
La bande passante est :

$$BP = [f_1, f_2]$$

On considérera qu'un filtre coupe les composantes du signal dont la pulsation est hors bande passante et laisse passer celles dont la pulsation est dans la bande passante.

8.1.7 Types de filtres

Selon la forme de la courbe du gain on peut distinguer plusieurs types de filtres (voir figure) :

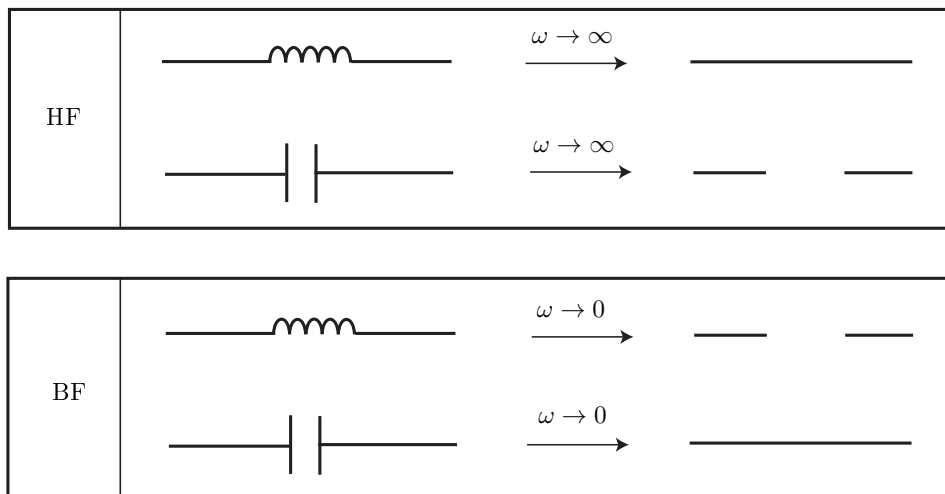


où :

- BP : Bande passante ;
- BC : Bande coupée ;
- f_1 et f_2 : les fréquences de coupure.

8.1.8 Nature du filtre

On peut déterminer la nature du filtre sans calculer sa fonction de transfert en étudiant son comportement en hautes fréquences (HF) et en basses fréquences (BF). Pour cela on utilise les propriétés suivantes :



En haute fréquences ($\omega \rightarrow \infty$) :

- $|Z_L| = L\omega \rightarrow \infty$: la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.

- $|Z_c| = \frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$: le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé

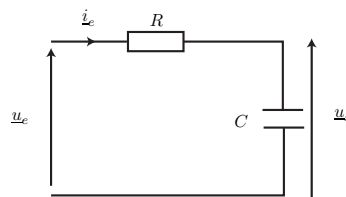
En basse fréquences ($\omega \rightarrow 0$) :

- $|Z_L| = L\omega \rightarrow 0$: la bobine se comporte comme un interrupteur fermé.
- $|Z_c| = \frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty$: le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert

8.2 Applications

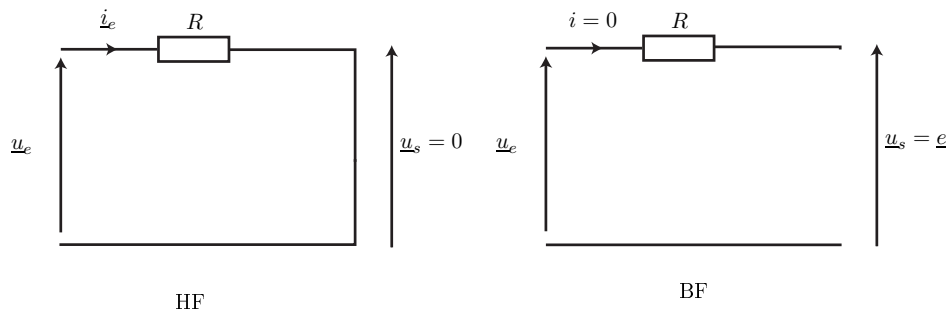
8.2.1 Filtre passe-bas d'ordre 1

Considérons le circuit (R, C) suivant :



Nature du filtre :

- En hautes fréquences le condensateur se comporte comme un fil : $\underline{u}_s = 0$ (voir figure).
- En basse fréquences le condensateur se comporte comme un circuit ouvert : $\underline{u}_s = \underline{e}$.



C'est un filtre passe-bas.

Fonction de transfert :

On peut utiliser la formule diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \frac{Z_c}{R + Z_c} \underline{u}_e$$

d'où la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

On peut déterminer la nature du filtre à partir de sa fonction de transfert :

- En HF ($\omega \gg \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \rightarrow 0$: $\underline{u}_s = 0$
- En BF ($\omega \ll \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \rightarrow 1$: $\underline{u}_s = \underline{e}$

Donc le filtre est un filtre passe bas.

Le module de la fonction de transfert :

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$

Le gain en décibel est :

$$G_{dB} = 20 \log(H) \quad \rightarrow \quad G_{dB} = -10 \log[1 + (\omega/\omega_0)^2]$$

La phase φ est :

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Équation différentielle :

En utilisant les propriétés de la notation complexe on peut déduire facilement l'équation différentielle à partir de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \rightarrow \quad \underline{u}_s + j\frac{\omega}{\omega_0}\underline{u}_s = \underline{u}_e$$

on passe à la notation réelle :

$$u_s + RC \frac{du_s}{dt} = u_e$$

c'est l'équation différentielle de u_s .

Pulsation de coupure :

La pulsation de coupure ω_c est solution de l'équation :

$$|\underline{H}(j\omega_c)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

avec $H_{\max} = 1$, soit :

$$\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Diagramme asymptotique :

- Le diagramme asymptotique est la représentation graphique des asymptotes de la fonction G_{dB} .
 - En HF : $G_{dB} \approx -20 \log[\omega/\omega_0]$. C'est une droite de pente -20 dB/décade.
 - En BF : $G_{dB} \approx -20 \log[1] = 0$. C'est une droite horizontale ($y = 0$).

- Le diagramme asymptotique de la phase :

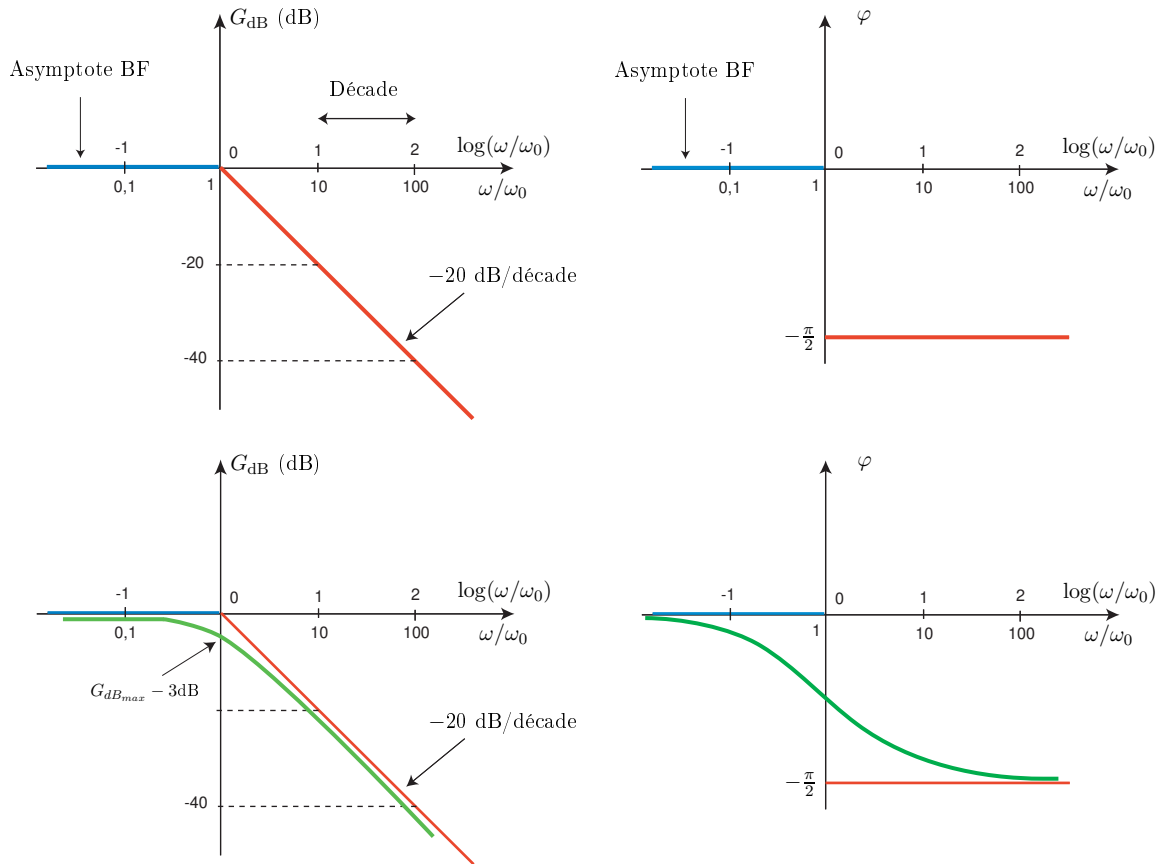
- En HF : $\varphi(\omega) \approx -\frac{\pi}{2}$. C'est une droite horizontale ($y = -\frac{\pi}{2}$).
- En BF : $\varphi(\omega) \approx 0$. C'est une droite horizontale ($y = 0$).

Maintenant, on peut tracer le diagramme de BODE réel (figure) :

Comportement intégrateur de ce filtre :

La tension de sortie d'un intégrateur est :

$$u_s = A \int u_e dt \quad \rightarrow \quad \underline{u}_s = A \int \underline{u}_e dt \quad \rightarrow \quad \underline{u}_s = A \frac{1}{j\omega} \underline{u}_e$$



où A est une constante qui dépend des éléments du circuit.

donc la fonction de transfert d'un intégrateur est :

$$\underline{H}_i(j\omega) = \frac{A}{j\omega}$$

Le gain en décibel de l'intégrateur est un droite de pente -20 dB/décade.

Dans le cas du circuit RC en haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$), la fonction de transfert devient :

$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{j\omega}$$

donc, le circuit RC se comporte comme un intégrateur lorsque $\omega \gg \omega_0 = \frac{1}{RC}$.

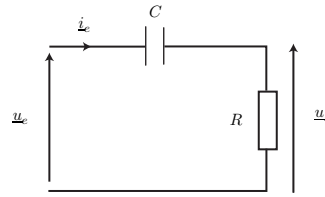
Si ω_0 est assez faible, la bande passante du circuit RC devient très étroite et par conséquence le filtre ne laisse passer que la composante continue ($\omega \approx 0$). Le circuit se comporte comme un circuit moyenneur :

$$u_s = \langle u_e \rangle$$

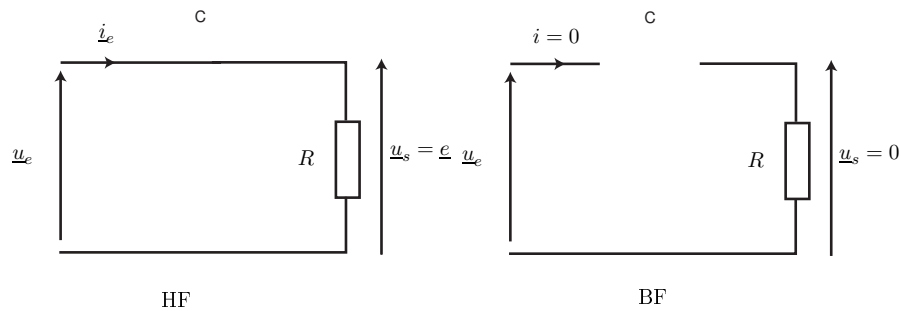
8.2.2 Filtre passe-haut d'ordre 1

Considérons le circuit (C, R) suivant :

Nature du filtre :



- En hautes fréquences le condensateur se comporte comme un fil : $\underline{u}_s = \underline{u}_e$ (voir figure).
- En basse fréquences le condensateur se comporte comme un circuit ouvert : $\underline{u}_s = 0$.



C'est un filtre passe-haut.

Fonction de transfert :

On peut utiliser la formule diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \frac{R}{R + Z_c} \underline{u}_e$$

d'où la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

On peut déterminer la nature du filtre à partir de sa fonction de transfert :

- En HF ($\omega \gg \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \rightarrow 1$: $\underline{u}_s = \underline{u}_e$
- En BF ($\omega \ll \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \rightarrow 0$: $\underline{u}_s = 0$

Donc le filtre est un filtre passe haut.

Le module de la fonction de transfert :

$$H(\omega) = \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$

Le gain en décibel est :

$$G_{dB} = 20 \log(H) \quad \rightarrow \quad G_{dB} = 20 \log(\omega/\omega_0) - 10 \log[1 + (\omega/\omega_0)^2]$$

La phase φ est :

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Pulsation de coupure :

La pulsation de coupure ω_c est solution de l'équation :

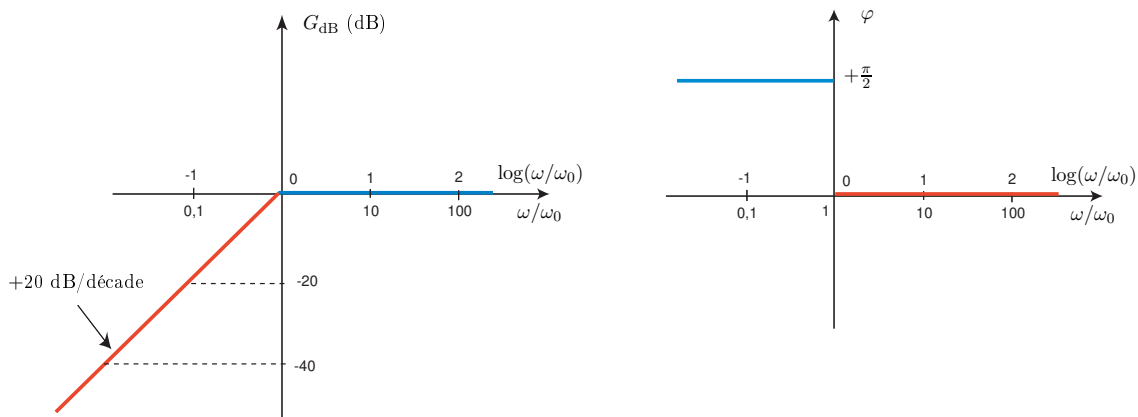
$$|\underline{H}(j\omega_c)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

avec $H_{\max} = 1$, soit :

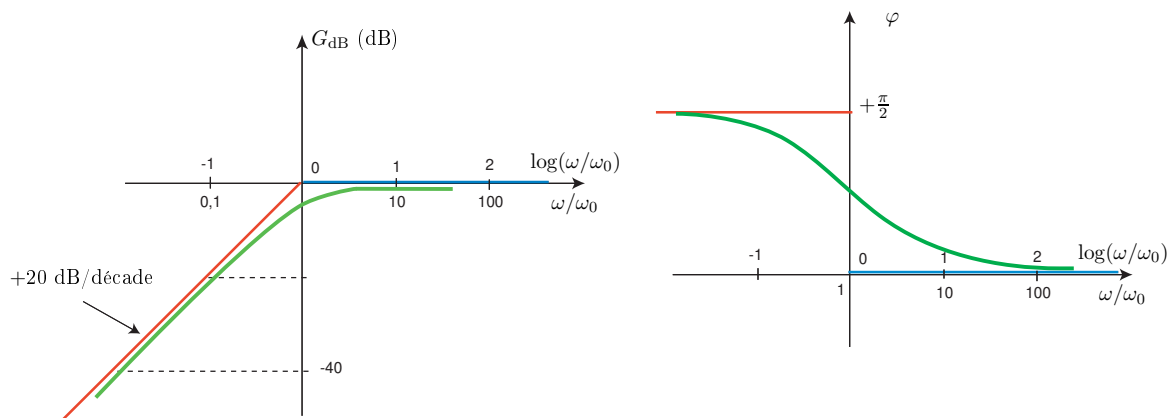
$$\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Diagramme asymptotique :

- Le diagramme asymptotique est la représentation graphique des asymptotes de la fonction G_{dB} .
 - En HF : $G_{dB} \approx 0$. C'est une droite horizontale .
 - En BF : $G_{dB} \approx +20 \log[\omega/\omega_0]$. C'est une droite de pente +20 dB/décade.
- Le diagramme asymptotique de la phase :
 - En HF : $\varphi(\omega) \approx 0$. C'est une droite horizontale ($y = 0$).
 - En BF : $\varphi(\omega) \approx \frac{\pi}{2}$. C'est une droite horizontale ($y = \frac{\pi}{2}$).



Maintenant, on peut tracer le diagramme de BODE réel (figure) :

**Comportement dérivateur de ce filtre :**

La tension de sortie d'un dérivateur est :

$$u_s = A \frac{du_e}{dt} \quad \rightarrow \quad \underline{u}_s = A \frac{d\underline{u}_e}{dt} \quad \rightarrow \quad \underline{u}_s = Aj\omega \underline{u}_e$$

où A est une constante qui dépend des éléments du circuit.

donc la fonction de transfert d'un intégrateur est :

$$\underline{H}_i(j\omega) = Aj\omega$$

Le gain en décibel du dérivateur est un droite de pente +20 dB/décade.

Dans le cas du circuit CR en basse fréquences ($\omega \ll \omega_0$), la fonction de transfert devient :

$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{j\omega}{\omega_0}$$

donc, le circuit CR se comporte comme un dérivateur lorsque $\omega \ll \omega_0 = \frac{1}{RC}$

8.2.3 Autres filtres (TD)

Annexe : Calcul opérationnel des circuits

Le but de ce paragraphe est d'introduire une méthode d'étude des circuits électriques dans un régime quelconque. Pour cela, on va utiliser une variable $p = \nu + j\omega$ et utiliser la transformée de LAPLACE. En régime sinusoïdal on a $\nu = 0$ donc $p = j\omega$. On retrouve alors les résultats précédents.

8.2.4 Transformée de LAPLACE

8.2.4.1 Définition

Soit $f(t)$ une fonction qui commence à $t = 0$ (càd : $f(t < 0) = 0$). On appelle transformée de LAPLACE (TL) de $f(t)$ la fonction de la variable complexe p définie par :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

On va noter la TL par :

$$F(p) = TL[f(t)]$$

La transformée de **Laplace** inverse de $F(p)$ sera notée TL^{-1} :

$$f(t) = TL^{-1}[F(p)]$$

En conclusion :

$$F(p) = TL[f(t)] \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = TL^{-1}[F(p)]$$

Remarque : la variable p s'écrit :

$$p = \nu + j\omega$$

en régime sinusoïdal on a $\nu = 0$ donc $p = j\omega$. On retrouve alors les résultats précédents.

8.2.4.2 Propriétés

- Linéarité :

$$TL[af(t) + bg(t)] = a \times TL[f(t)] + b \times TL[g(t)]$$

- Cas d'une translation $u(t - t_0)$ (retard temporel) :

$$TL[u(t - t_0)] = e^{-pt_0} TL[u(t)]$$

- TL de la dérivée de $f(t)$:

$$\text{si : } F(p) = TL[f(t)] \quad \Rightarrow \quad TL[f'(t)] = pF(p) - \mathbf{f(0)}$$

$f(0)$ est une **condition initiale** de $f(t)$.

Si $f(0) = 0$, alors la dérivée dans l'espace t correspond à une multiplication par p dans l'espace p :

$$TL \left[\frac{df}{dt} \right] = pF(p)$$

et on a alors :

$$TL \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = p^n F(p)$$

- TL de la primitive de $f(t)$:

$$\text{si : } F(p) = TL[f(t)] \quad \Rightarrow \quad TL \left[\int_0^t f(x) dx \right] = \frac{F(p)}{p}$$

Une intégration dans l'espace t correspond à une division par p dans l'espace p .

- Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

- Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p)$$

8.2.4.3 Exemples

- TL d'une tension échelon $u(t)$:

$$U(p) = TL[u(t)] = \frac{E}{p}$$

- TL d'une tension rampe $u(t) = \alpha t$:

$$U(p) = TL[u(t)] = \frac{\alpha}{p^2}$$

- TL d'une tension sinusoïdale de la forme $u(t) = V_m \cos(\omega t)$:

$$u(t) = V_m \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad U(p) = TL[u(t)] = V_m \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

- TL d'une tension sinusoïdale de la forme $u(t) = V_m \sin(\omega t)$:

$$u(t) = V_m \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad U(p) = TL[u(t)] = V_m \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

- TL d'une impulsion de Dirac :

$$U(p) = TL[u(t)] = 1$$

- TL d'une tension amortie $u(t)e^{-\lambda t}$:

$$TL[e^{-\lambda t} u(t)] = U(p + \lambda)$$

Une multiplication par $e^{-\lambda t}$ dans l'espace t correspond à une translation de λ dans l'espace p .

Exemple : Tension sinusoïdale amortie :

$$u(t) = e^{-\lambda t} V_m \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad U(p) = V_m \frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$$

8.2.4.4 Inversion

Pour retrouver $f(t)$ à partir de $F(p)$, on va utiliser les transformées de Laplace des fonctions simples données dans le tableau en annexe.

Exemple : Considérons un circuit dont la TL du courant qui y circule est

$$I(p) = \frac{E}{R} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}$$

alors

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

8.2.5 Utilisation de la TL pour l'étude des circuits

8.2.5.1 Impédance opérationnelle

Un dipôle linéaire est caractérisé par une équation différentielle linéaire à coefficients constants qui relie $u(t)$ et $i(t)$. Quelle est alors la relation entre $U(p)$ et $I(p)$?

✓ Pour une résistance :

$$u(t) = Ri(t) \quad \Rightarrow \quad U(p) = RI(p)$$

✓ Pour une inductance :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad U(p) = LpI(p) - Li(0)$$

$Li(0)$ la condition initiale représentée dans l'espace des p .

✓ Pour un condensateur :

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad I(p) = CpU(p) - Cu(0)$$

$Cu(0)$ la condition initiale représentée dans l'espace des p .

On définit l'impédance (opérationnelle) par :

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)}$$

alors :

- Résistance : $Z(p) = R$;
- Inductance : $Z(p) = Lp$ (si $i(0)=0$);
- Condensateur : $Z(p) = \frac{1}{Cp}$ (si $u(0)=0$).

Dans le cas du régime sinusoïdal $p = j\omega$, on retrouve :

$$\underline{Z}_R = R \quad ; \quad \underline{Z}_L = jL\omega \quad ; \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

Pour un quadripôle, la fonction de transfert opérationnelle (ou transmittance opérationnelle) en régime permanent est :

$$H(p) = \frac{E(p)}{S(p)}$$

avec :

- $E(p)$ est la TL de la tension d'entrée $v_e(t)$
- $S(p)$ est la TL de la tension de sortie $v_s(t)$.

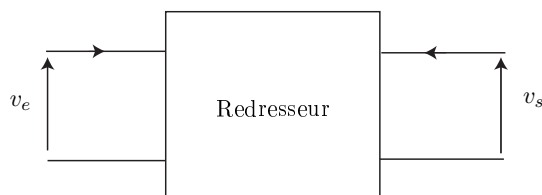
En régime sinusoïdal on retrouve : $H(p) = \underline{H}(j\omega)$.

Chapitre 9

Redressement

9.1 Introduction

les redresseurs permettent de fournir une tension toujours positive à partir d'une tension alternative. Cette tension redressée est ensuite "lissée" pour obtenir une tension continue.

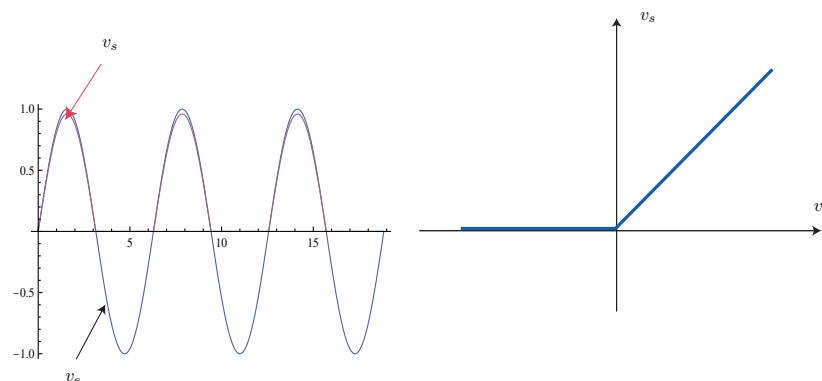


9.2 Redressement simple alternance

9.2.1 Présentation

Un redresseur *simple* alternance est un quadripôle dont la caractéristique s'écrit :

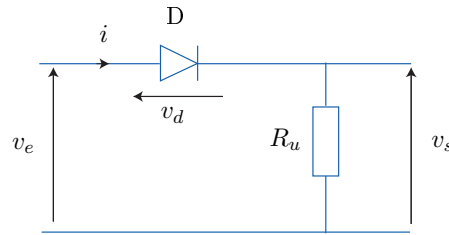
$$v_s = v_e \quad \text{si} \quad v_e > 0 \quad \text{et} \quad v_s = 0 \quad \text{si} \quad v_e < 0$$



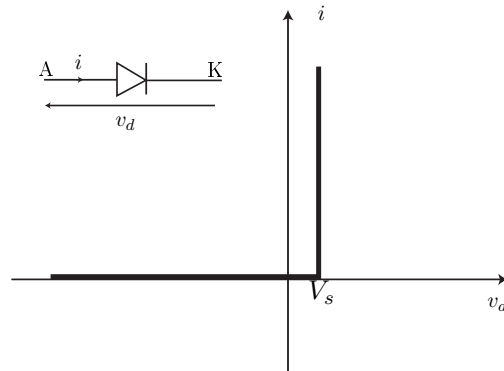
9.2.2 Exemple 1 : Redresseur à diode

Un redresseur à diode est constitué d'une est une diode de redressement et d'une résistance symbolisant un circuit d'utilisation et le signal sinusoïdal délivré par le G.B.F.

$$v_e(t) = V_m \sin(\omega t)$$



On choisit le modèle de la diode avec tension de seuil $V_s = 0,6$ V.

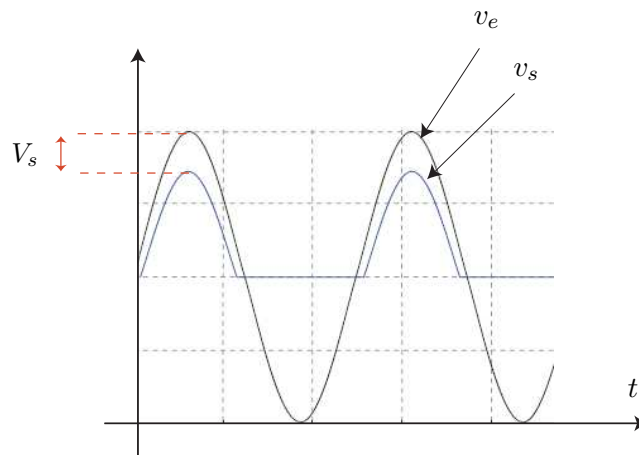


Lorsque la diode conduit ($i > 0$; $v_d = V_s$), alors :

$$v_s = V_m \sin(\omega t) - V_s = R_u i > 0 \quad \rightarrow \quad V_m \sin(\omega t) > V_s$$

Quand l'inégalité précédente n'est pas satisfaite la diode est bloquée : $i(t) = 0$ alors :

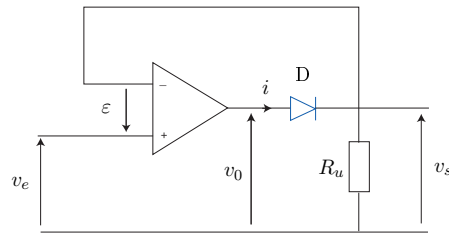
$$v_s(t) = 0$$



L'effet de seuil (existence d'une tension de seuil V_s) est perceptible puisque $v_s(t)$ ne s'annule pas avec $v_e(t)$. Quand la diode conduit, elle forme avec la charge R_u un diviseur de tension : cet effet est très marqué si R_u est faible.

9.2.3 Exemple 2 : Redresseur sans seuil

Pour éliminer le défaut du seuil V_s , réalisons le circuit suivant avec un amplificateur opérationnel supposé idéal. **Lorsque la diode conduit :**



L'amplificateur opérationnel est en régime linéaire, car la boucle de rétroaction est fermée sur l'entrée inverseuse.

Donc,

$$\varepsilon = 0 \quad \rightarrow \quad v_s = v_e$$

La diode étant passante, $i > 0$, il en résulte que $v_s = v_e = R_u i > 0$.

En conclusion,

$$v_s = v_e \quad \text{quand} \quad v_e > 0$$

Lorsque la diode est bloquée :

L'amplificateur opérationnel est en boucle ouverte, c'est-à-dire en régime de saturation.

Comme $i = 0$, la tension de sortie du redresseur est $v_s = 0$ et celle de l'amplificateur opérationnel :

$$v_0 < v_s = 0$$

car puisque la diode est bloquée ($v_d < 0$).

L'amplificateur opérationnel étant en régime de saturation, nous avons :

$$v_0 = -U_{sat}$$

donc :

$$\varepsilon < 0 \quad \rightarrow \quad v_e < 0$$

En conclusion,

$$v_s = 0 \quad \text{quand} \quad v_e < 0$$

La valeur moyenne de la tension redressée est :

$$\langle v_s \rangle = \dots$$

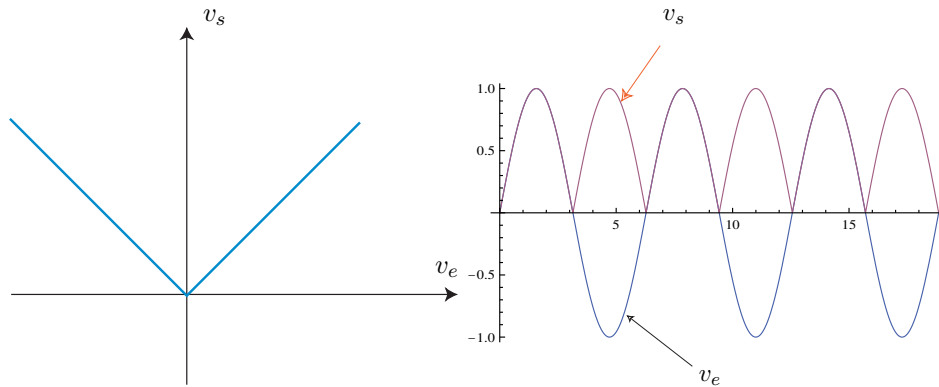
Pour augmenter la valeur moyenne (et donc la puissance transmise), on utilise un redresseur double alternance.

9.3 Redresseur double alternance

9.3.1 Présentation

Un redresseur double alternance est un quadripôle pour lequel les tensions v_s est :

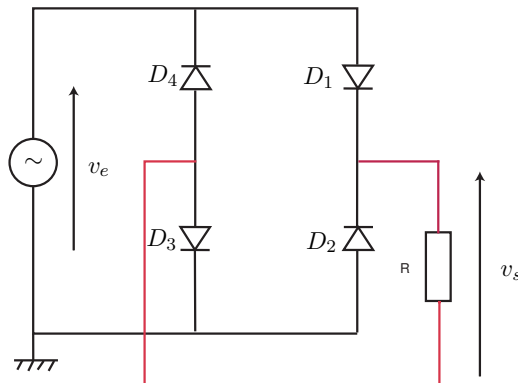
$$v_s = |v_e|$$



Le redresseur double alternance d'une tension alternative double sa fréquence et double la valeur de sa composante continue par rapport à la même tension redressée simple alternance.

9.3.2 Redresseur double alternance à pont de diodes

Considérons le circuit suivant, réalisé avec quatre diodes identiques (pont de GRAETZ), une résistance de charge R_u modélisant un réseau d'utilisation et un générateur basse fréquence.



Lorsque la tension $v_e > 2V_s$ (positive), les diodes D_1 et D_3 conduisent et la tension de sortie est :

$$v_s(t) = v_e(t) - 2V_s$$

Lorsque la tension $v_e < -2V_s$ (négative), ce sont les diodes D_2 et D_4 qui conduisent, et la tension de sortie est :

$$v_s(t) = -(v_e(t) - 2V_s)$$

Le courant qui circule dans la résistance a toujours le même sens.

Remarque : l'effet du seuil est important ($2V_s$).

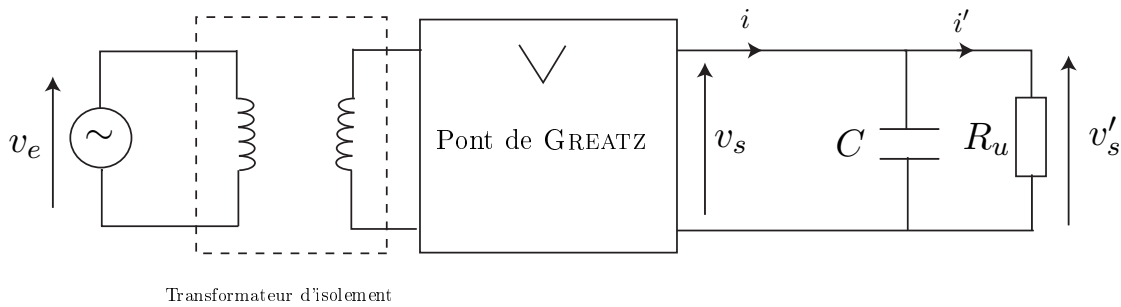
La valeur moyenne de la tension redressée est :

$$\langle v_s \rangle = \dots$$

Elle est plus grand que celle obtenue avec le redresseur simple d'où l'intérêt d'utiliser le redresseur double alternance.

9.4 Redressement avec lissage

Pour alimenter certains appareils, il est nécessaire de produire une tension *continue* à partir de la tension alternative sinusoïdale délivrée par le secteur. Les redresseurs étudiés fournissent bien une tension de signe constant, donc de valeur moyenne non nulle, mais non constante.

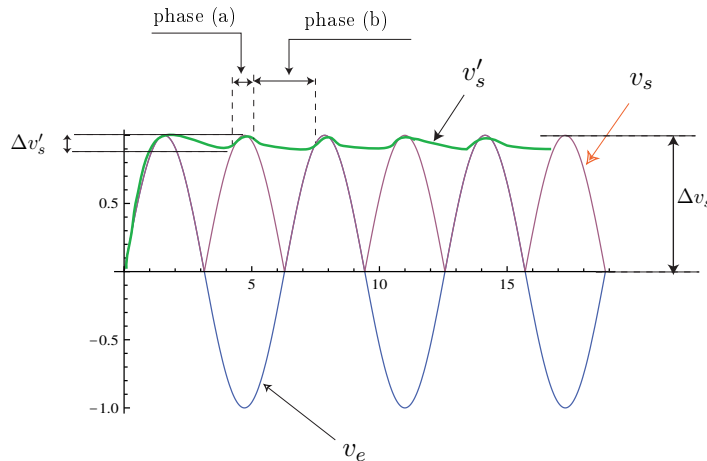


Un lissage par condensateur permet d'obtenir une tension quasi constante, avec un faible taux d'ondulation.

Le condensateur C doit avoir une grande capacité, il est placé en parallèle sur l'utilisation modélisée par la résistance R_u .

Le courant i ne peut circuler que dans un seul sens (le sens permis par le redresseur).

Le transformateur d'isolement permet de séparer la masse du G.B.F. de celle du redresseur afin d'éviter un court-circuit.



Phase (a) : Le condensateur C stocke une partie de la charge débitée par le redresseur pendant sa période de conduction.

Phase (b) : Le condensateur restitue la charge dans l'utilisation R_u pendant la période de blocage du redresseur.

L'ondulation de la tension de sortie est diminuée : $\Delta v'_s < \Delta v_s$. Le circuit (R_u, C) doit avoir une grande constante de temps ($\tau = R_u C \gg T$) pour de bien minimiser l'ondulation (le condensateur se décharge très peu durant la phase b ou le redresseur est bloqué).

On montre que le taux d'ondulation est donné par :

$$\frac{\Delta v'_s}{v'_{s,m}} \approx \frac{T}{2R_u C} = \frac{T}{2\tau}$$

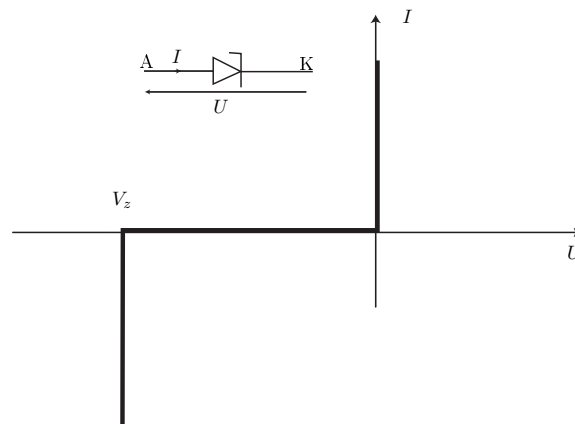
9.5 Régulation

La régulation permet de maintenir constante la tension de sortie à une valeur précise peu importe les variations de la tension l'entrée.

Deux montages de régulation sont possibles.

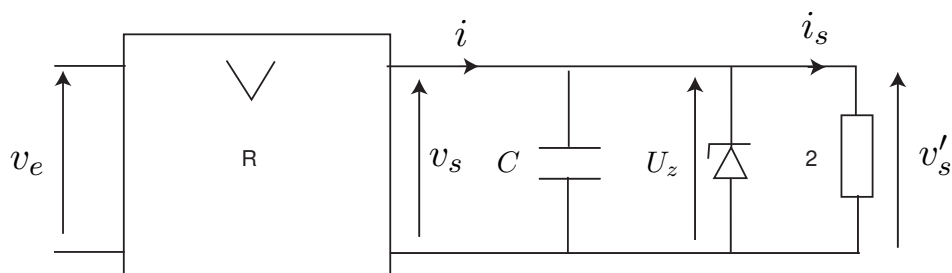
9.5.1 Régulation par diode Zener

La diode ZENER est une diode utilisée en polarisation inverse. La tension ZENER V_z est la tension inverse pour laquelle le courant inverse croît rapidement.



En inverse, la pente de la caractéristique est très forte, on néglige souvent $R_z = \frac{\Delta U}{\Delta I}$. La diode Zener est alors modélisée en inverse par une source de tension parfaite V_z .

On branche la diode Zener en parallèle avec le condensateur de filtrage (dans le bon sens).

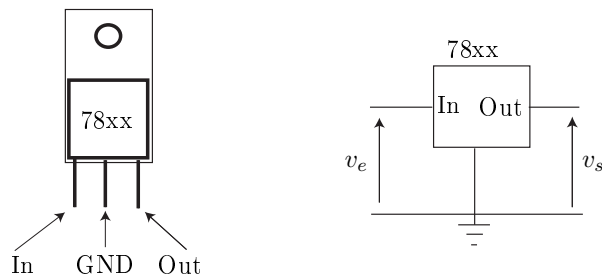


R_p est une résistance de protection de la diode.

puisque $U_z \approx$ constante, alors la tension aux de R_u devient pratiquement sans ondulation $\Delta v'_s \approx 0$

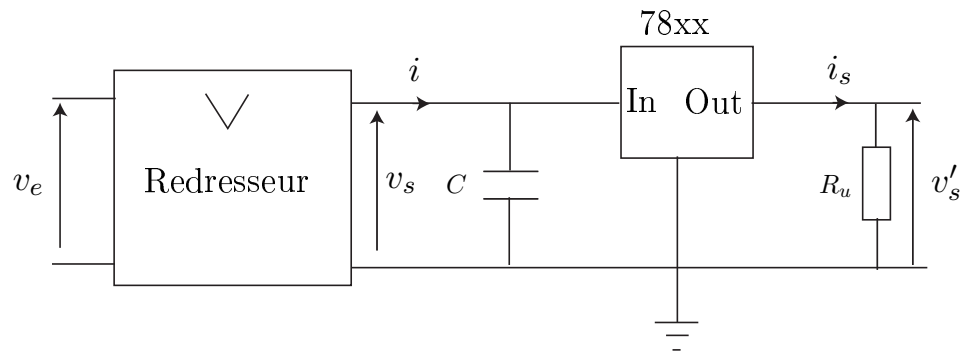
9.5.2 Utilisation d'un RIT

On peut utiliser un Régulateur Intégré de Tension (RIT) pour rendre la tension filtré plus lisse (constante). Le RIT est un circuit intégré qui possède trois broches



Pour fonctionner correctement l'entrée du régulateur (Input) doit être alimentée par la tension une redressée et aussi *filtrée* grâce au montage avec condensateurs.

Les régulateurs de tension conventionnels sont dénommés (ex : LM78xx) selon la tension de sortie qu'ils fournissent. Ainsi un 7805 fournit 5 volts en sortie, un 7812 fournit 12 volts.



La tension d'entrée du régulateur de tension doit être supérieure à la valeur de tension que l'on souhaite avoir en sortie (Output). La chute de tension est d'environ 2 volts.

9.6 Principe d'une alimentation continue

