

**CENTRE REGIONAL DES MÉTIERS
DE L'ÉDUCATION ET DE LA FORMATION
MARRAKECH-SAFI**

CPA-CRMEF

PHYSIQUE-1

Cours :

MÉCANIQUE 2

**MÉCANIQUE DES SYSTEMES
AGRÉGATION DE PHYSIQUE
OPTION PHYSIQUE
AGP-1**

Par :
ABDELFETTAH HABIB

2016

Table des matières

1 Propriétés d'un système matériel	4
1.1 Centre de masse G	4
1.2 Référentiel barycentrique	5
2 Résultante cinétique d'un système	5
3 Moment cinétique d'un système	6
3.1 Définition	6
3.2 Moment cinétique par rapport à un axe Δ	7
3.3 Théorème de KÆNIG pour le moment cinétique	7
3.4 Application	8
4 Énergie cinétique	8
4.1 Définition	8
4.2 Théorème de KÆNIG pour l'énergie cinétique	8
5 Cinétique d'un système solide	9
5.1 Définition	9
5.2 Champ des vitesses d'un solide	10
5.3 Solide en rotation autour d'un axe fixe	11
5.3.1 Moment cinétique	11
5.3.2 Théorème de HUYGENS	13
5.3.3 Énergie cinétique	14
5.3.4 Application	14
1 Actions extérieures et intérieures	15
2 Théorème de la résultante cinétique (TRC)	16
2.1 Énoncé	16
2.2 Application	17
3 Théorème du moment cinétique (TMC)	17
3.1 Énoncé du TMC	17
3.2 TMC en G	17
3.3 TMC dans un référentiel non galiléen	18
3.4 TMC dans le référentiel barycentrique	18
3.5 Applications	18
4 Théorème de l'énergie cinétique (TEC)	18
4.1 TEC dans un référentiel galiléen	18
4.2 TEC dans un référentiel <u>nongaliléen</u>	20
4.3 TEC dans le référentiel <u>barycentrique</u> \mathcal{R}^*	21
4.4 TEC pour un solide	21
5 Énergie mécanique d'un système de points matériels	23
5.1 Énergie potentielle	23
5.2 Théorème de l'énergie mécanique (TEM)	23
5.3 Conservation de l'énergie mécanique	23

6	Notion de torseur	24
6.1	Définition	24
6.2	Cas particuliers	24
6.3	Exemples	24
6.4	Formulation torsorielles des lois de la mécanique	25
	6.4.1 Principe fondamental	25
	6.4.2 Principe de l'action et de la réaction	26
1	Cinématique	28
1.1	Mouvements d'un solide	28
1.2	Mouvements d'un solide	28
1.3	Vitesse de glissement	28
1.4	Roulement et pivotement	29
2	Lois de COULOMB	30
2.1	Action de contact	30
2.2	Propriétés de la force de frottement	30
2.3	Application	31
3	Puissance des actions de contact	31
4	Quelques liaisons entre les solides	32
4.1	Liaison parfaite	32
4.2	Liaison rotule ou sphérique	32
4.3	Liaison pivot ou rotoïde	33

Chapitre 1

Cinétique d'un système de points matériels

1 Propriétés d'un système matériel

1.1 Centre de masse G

a-. Définition

Dans un référentiel \mathcal{R} , considérons un système fermé Σ de point matériels discrètes M_i de masse m_i : $\{M_i(m_i)\}$.

Le **centre de masse** G (ou centre d'inertie ou barycentre) du système Σ est défini par l'équation suivante :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0} \quad (1)$$

si O est un point quelconque, alors :

$$\sum_i m_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}_i) = \vec{0}$$

soit :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i \quad (2)$$

où $m = \sum_i m_i$ est la masse totale du système.

Le centre de masse G d'un système continu, où la masse est est répartie de manière continue dans un volume V , est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \iiint_V \rho(M) \overrightarrow{OM} d\tau(M) \quad (3)$$

Le centre d'inertie d'un système homogène se trouve sur ses éléments de symétrie (plan, axe).

Exemple : le centre d'inertie d'une tige homogène est à son milieu.

b-. Exemple

Calculer le centre de masse d'un cône homogène de sommet O, de base cylindrique circulaire de rayon R et de hauteur h.

Réponse : symétrie $\Rightarrow G \in (Oz)$; $OG = z_G = \frac{3h}{4}$.

Remarque : la dérivé de l'équation 2 donne :

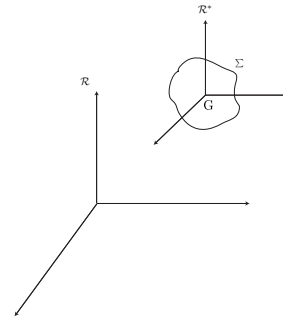
$$\vec{v}(G) = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (4)$$

1.2 Référentiel barycentrique

Soit un système Σ , de centre d'inertie G , dans un référentiel \mathcal{R} .

Par définition, le **référentiel barycentrique** \mathcal{R}^* du système (relatif au référentiel \mathcal{R}) est le référentiel en **translation** par rapport \mathcal{R} et dans lequel **G est fixe**.

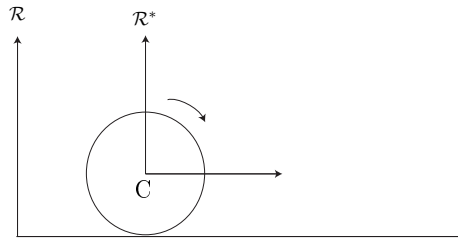
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}) &= \vec{0} \\ \vec{v}(G/\mathcal{R}^*) &= \vec{0} \end{aligned}} \quad (5)$$



Remarque 1 : tout vecteur lié à \mathcal{R}^* est fixe dans \mathcal{R} .

Remarque 2 : La vitesse d'entraînement d'un point M_i quelconque dans \mathcal{R}^* est $\vec{v}_e(M_i) = \vec{v}(G/\mathcal{R})$ (tout les points ont la même vitesse d'entraînement dans le référentiel barycentrique car il est en translation).

Exemple :



Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* du cerceau est en translation à la vitesse $\vec{v}(G/\mathcal{R})$.

2 Résultante cinétique d'un système

Considérons un système de points matériels $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ dans un référentiel \mathcal{R} , où $\vec{v}_i = \vec{v}(M_i/\mathcal{R})$ sont les vitesses des points M_i dans \mathcal{R} .

✓ La **résultante cinétique** (ou quantité de mouvement totale) du système dans \mathcal{R} est :

$$\boxed{\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i} \quad (6)$$

⇒

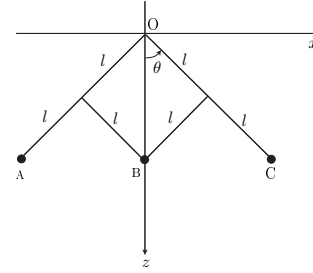
$$\vec{P} = \sum_i m_i \frac{d\vec{OM}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{OM}_i \right) = \frac{d}{dt} (m\vec{OG}) = m\vec{v}(G)$$

soit :

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{v}(G/\mathcal{R})} \quad (7)$$

Elle est égale à la quantité de mouvement d'un point matériel **factif** situé en G et affecté de la masse totale du système ("le point matériel G ")

Application :



Considérons le système schématisé ci-contre. Les tiges ont la même longueur l et des masses négligeables. Les points matériels A, B et C ont la même masse m . On repère la position du système par l'angle θ .

Calculer la résultante cinétique du système.

Réponse : $\vec{P} = -ml\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_z$.

✓ La **résultante cinétique** du système dans son référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est :

$$\vec{P}^* = m \vec{v}(G/\mathcal{R}^*) = \vec{0}$$

soit :

$$\boxed{\vec{P}^* = \vec{0}} \quad (8)$$

Remarque : le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est un référentiel en translation dans \mathcal{R} et dans lequel la résultante cinétique du système est nulle.

3 Moment cinétique d'un système

3.1 Définition

Le **moment cinétique** \vec{L}_A , en un point A, du système $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ dans un référentiel \mathcal{R} est :

$$\boxed{\vec{L}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_i} \quad (9)$$

où : $\vec{v}_i = \vec{v}(M_i/\mathcal{R})$.

Entre deux point A et B on :

$$\vec{L}_B = \sum_i \overrightarrow{BM}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}_i) \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_i + \overrightarrow{BA} \wedge \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i}_{\vec{P}} = \vec{L}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{P}$$

d'où la relation entre les moments cinétiques en deux point A et B :

$$\boxed{\vec{L}_B = \vec{L}_A + \vec{P} \wedge \overrightarrow{AB}} \quad (10)$$

Pour un système continu, le moment cinétique \vec{L}_A est donnée par :

$$\boxed{\vec{L}_A = \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}) dm} \quad (11)$$

Le moment cinétique, en A, dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est :

$$\boxed{\vec{L}_A^* = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i/\mathcal{R}^*)} \quad (12)$$

Il est indépendant du point A où on le calcule.

En effet, le moment cinétique barycentrique en un point B est :

$$\vec{L}_B^* = \sum_i \overrightarrow{BM}_i \wedge m_i \vec{v}_i^* = \sum_i \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}_i \right) \wedge m_i \vec{v}_i^* = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_i^* + \underbrace{\sum_i \overrightarrow{BA} \wedge m_i \vec{v}_i^*}_{\vec{0}} = \vec{L}_A^*$$

Application

Un cerceau homogène de centre O, de masse m et de rayon a tourne à vitesse angulaire constante ω autour de son axe fixe. Calculer son moment cinétique en O.

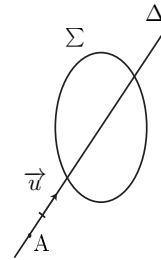
Réponse : $\vec{L}_O = m a^2 \omega \vec{e}_z$.

3.2 Moment cinétique par rapport à un axe Δ

Le moment cinétique L_Δ du système par rapport à un axe Δ est la projection du moment cinétique \vec{L}_A sur cet axe.

$$\boxed{L_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}} \quad (13)$$

où \vec{u} est le vecteur unitaire de l'axe Δ et A est un point quelconque de Δ ($A \in \Delta$).



Ce moment cinétique est indépendant du choix du point A.

3.3 Théorème de KÆNIG pour le moment cinétique

Ce théorème relie les moments cinétiques \vec{L}_O dans \mathcal{R} et le moment cinétique barycentrique \vec{L}^* .

Le moment cinétique, en un point O, du système $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ dans \mathcal{R} est :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i/\mathcal{R}) \\ &= \sum_i (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_i) \wedge m_i [\vec{v}(M_i/\mathcal{R}^*) + \vec{v}_e(M_i)] \\ &= \sum_i (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_i) \wedge m_i \left[\underbrace{\vec{v}(M_i/\mathcal{R}^*)}_{\vec{v}_i^*} + \vec{v}(G) \right] \\ &= \underbrace{\overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}(G)}_{=m} \sum_i m_i + \underbrace{\sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge m_i \vec{v}_i^*}_{=\vec{L}_G^*} + \underbrace{\overrightarrow{OG} \wedge \sum_i m_i \vec{v}_i^*}_{\vec{P}^*=\vec{0}} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i \right) \wedge \vec{v}(G)}_{=\vec{0}} \end{aligned}$$

d'où le théorème de KÆNIG pour le moment cinétique :

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}_G^* + \overrightarrow{OG} \wedge m \vec{v}(G/\mathcal{R})} \quad (14)$$

Le terme $\overrightarrow{OG} \wedge m \vec{v}(G/\mathcal{R})$ représente le moment cinétique en O du "point matériel G" dans \mathcal{R} .

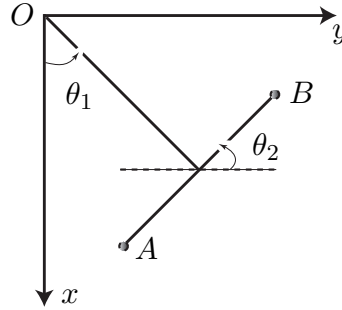
Remarque : si $O \equiv G$ alors :

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^*$$

3.4 Application

Deux boules identiques, assimilable à deux points matériels de masse m , sont fixées aux deux extrémités d'une barre AB de masse négligeable et de longueur l . Cette barre, astreinte à rester dans le plan (Ox, Oy) , est articulée en G à une tige OG de masse négligeable et de longueur a . Le mouvement est repéré par les angles θ_1 et θ_2 .

1. Calculer le moment cinétique \vec{L}_O du système en fonction de m , a , l , $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.



Réponse : $\vec{L}_O = m(2l^2\dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}a^2\dot{\theta}_2)\vec{e}_z$

4 Énergie cinétique

4.1 Définition

L'énergie cinétique du système $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ dans un référentiel \mathcal{R} est :

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}^2(M_i/\mathcal{R}) \quad (15)$$

Pour un système continu :

$$E_c = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \vec{v}^2(M/\mathcal{R}) dm \quad (16)$$

4.2 Théorème de KœNIG pour l'énergie cinétique

Ce théorème relie l'énergie cinétique E_c du système dans un référentiel \mathcal{R} à l'énergie cinétique E_c^* dans \mathcal{R}^* .

L'énergie cinétique du système $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ dans \mathcal{R} est :

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}^2(M_i/\mathcal{R}) \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i^* + \vec{v}(G/\mathcal{R}))^2 \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2(G/\mathcal{R}) + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{*2}}_{E_c^*} + \vec{v}(G/\mathcal{R}) \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i^*}_{\vec{0}} \end{aligned}$$

L'énergie cinétique dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est :

$$E_c^* = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{*2}$$

d'où le théorème de K ENIG pour l'énergie cinétique :

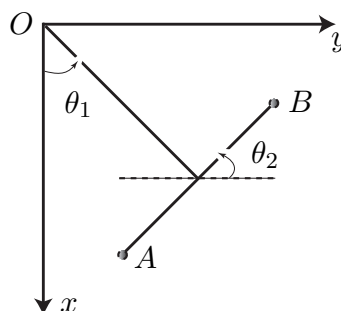
$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2}m\vec{v}^2(G/\mathcal{R}) \quad (17)$$

Le terme $\frac{1}{2}m\vec{v}^2(G/\mathcal{R})$ représente l'énergie cinétique du "point matériel G" dans \mathcal{R} .

Application

Deux boules identiques, assimilable à deux points matériels de masse m , sont fixées aux deux extrémités d'une barre AB de masse négligeable et de longueur l . Cette barre, astreinte à rester dans le plan (Ox, Oy) , est articulée en G à une tige OG de masse négligeable et de longueur a . Le mouvement est repéré par les angles θ_1 et θ_2 .

1. Calculer l'énergie cinétique E_c du système en fonction de m , a , l , $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.



Réponses :

Remarque : Parmi les grandeurs d'un système on trouve aussi :

-   la résultante dynamique : $\vec{S} = \sum_i m_i \vec{a}_i = m \vec{a}(G)$
-   le moment dynamique en un point A : $\vec{D}_A = \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{a}_i$

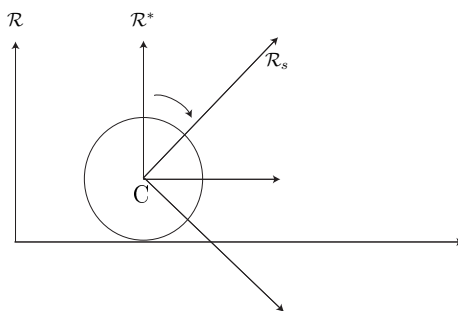
5 Cinétique d'un système solide

5.1 Définition

Un système solide (S) est corps indéformable, c- -d, la distance entre deux points quelconques A et B de ce corps reste constante au cours du temps :

$$S \text{ est un solide} \Rightarrow \forall A, B \in S : AB = \text{constante}$$

Au solide S on peut associer un référentiel \mathcal{R}_s dont l'origine est un point quelconque de S.



Le référentiel \mathcal{R}_s est lié au solide.

5.2 Champ des vitesses d'un solide

Soit un solide S qui se déplace dans un référentiel \mathcal{R} et considérons deux points A et B de ce solide (fixes dans \mathcal{R}_s).

La vitesse du point B dans le référentiel \mathcal{R} est :

$$\begin{aligned}\vec{v}(B/\mathcal{R}) &= \frac{d\vec{OB}}{dt} /_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{d(\vec{OA} + \vec{AB})}{dt} /_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{d\vec{OA}}{dt} /_{\mathcal{R}} + \frac{d\vec{AB}}{dt} /_{\mathcal{R}} \\ &= \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \frac{d\vec{AB}}{dt} /_{\mathcal{R}}\end{aligned}$$

or on sait que :

$$\frac{d\vec{AB}}{dt} /_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{AB}}{dt} /_{\mathcal{R}_s} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}) \wedge \vec{AB}$$

et puisque \vec{AB} est fixe dans \mathcal{R}_s , il vient :

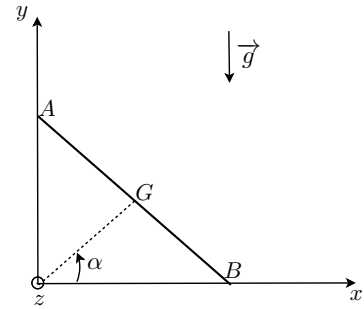
$$\boxed{\vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}) \wedge \vec{AB}} \quad (18)$$

avec : $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ est la vitesse de rotation de \mathcal{R}_s (donc de S) dans le référentiel \mathcal{R} .

Application

Une barre AB homogène de masse m , de longueur $2b$ et de centre G , milieu de AB , est posée sur le sol horizontal et repose contre un mur vertical. Sa position est déterminée par l'angle $\alpha = (\vec{Ox}, \vec{OG})$. Les contacts en A et B sont supposés sans frottements.

1. Déterminer les composantes de la vitesse $\vec{v}(G)$ du point G en fonction de α et de la dérivée de α .
2. En déduire le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de la tige.



Réponses :

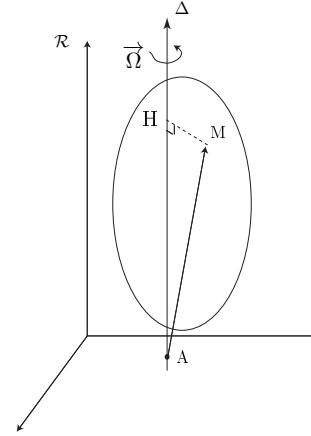
1. $\vec{v}(G) = -b(\Omega + 2\dot{\alpha}) \sin(\alpha) \vec{e}_x - b\Omega \cos(\alpha) \vec{e}_y$
2. $\vec{\Omega} = -\dot{\alpha} \vec{e}_z$

5.3 Solide en rotation autour d'un axe fixe

5.3.1 Moment cinétique

Considérons un solide S en rotation autour d'un axe Δ fixe dans le référentiel d'étude \mathcal{R} . Le moment cinétique en un point A fixe de l'axe est :

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_A &= \iiint_S \vec{AM} \wedge \vec{v}(M) dm \\
 &= \iiint_S \vec{AM} \wedge \left(\underbrace{\vec{v}(A)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{AM} \right) dm \\
 &= \iiint_S \vec{AM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{AM}) dm \\
 &= \left(\iiint_S AM^2 dm \right) \vec{\Omega} - \iiint_S (\vec{AM} \cdot \vec{\Omega}) \vec{AM} dm \\
 &= \left(\iiint_S AM^2 dm - \iiint_S AH^2 dm \right) \vec{\Omega} - \iiint_S (\vec{AH} \cdot \vec{\Omega}) \vec{HM} dm
 \end{aligned}$$



avec H est la projection de M sur l'axe Δ , d'où :

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_A &= \vec{\Omega} \iiint_S HM^2 dm - \iiint_S (\vec{AH} \cdot \vec{\Omega}) \vec{HM} dm \\
 &= \vec{L}_{A\parallel} + \vec{L}_{A\perp}
 \end{aligned}$$

avec :

- $\vec{L}_{A\parallel} = \vec{\Omega} \iiint_S HM^2 dm$: terme colinéaire au vecteur $\vec{\Omega}$
- $\vec{L}_{A\perp} = - \iiint_S (\vec{AH} \cdot \vec{\Omega}) \vec{HM} dm$: terme perpendiculaire au vecteur $\vec{\Omega}$

Le terme $\vec{L}_{A\parallel}$:

Le terme parallèle à l'axe de rotation s'écrit :

$$\vec{L}_{A\parallel} = J_{\Delta} \vec{\Omega} \tag{19}$$

J_{Δ} est le moment d'inertie (en kg.m²) du solide S par rapport à l'axe Δ . Il est défini par :

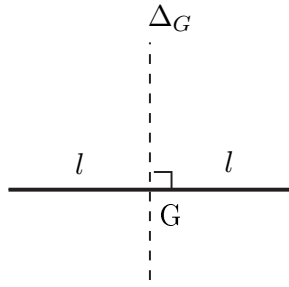
$$\boxed{J_{\Delta} = \iiint_S HM^2 dm} \tag{20}$$

il ne dépend que de la répartition des masses autour de Δ .

Exemples de moments d'inertie par rapport à un axe passant par G :

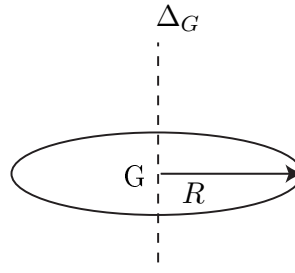
Le moment cinétique du solide par rapport à l'axe de rotation Δ est :

$$\boxed{L_{\Delta} = J_{\Delta} \Omega} \tag{21}$$



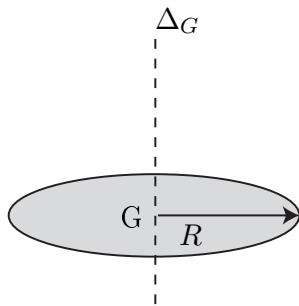
Tige de longueur $2l$, de masse m

$$J_{\Delta_G} = \frac{1}{3}ml^2$$



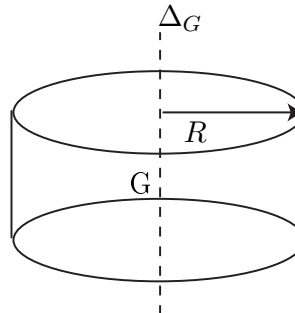
Cerceau de rayon R , de masse m

$$J_{\Delta_G} = mR^2$$



Disque de rayon R , de masse m

$$J_{\Delta_G} = \frac{1}{2}mR^2$$



Cylindre de rayon R , de masse m

$$J_{\Delta_G} = \frac{1}{2}mR^2$$

Le terme $\vec{L}_{A\perp}$:

Le terme perpendiculaire à l'axe de rotation (à $\vec{\Omega}$) est nul dans les cas suivants :

- 1) Lorsque l'axe de rotation Δ est l'axe de symétrie du solide S.
- 2) Lorsque le solide est plan et se déplace dans un plan perpendiculaire à Δ en A.

$$\vec{L}_{A\perp} = \vec{0}$$

ces deux cas sont les cas les plus rencontrés (programme MP).

Dans ces cas on a alors :

$$\boxed{\vec{L}_A = J_{\Delta} \vec{\Omega}} \quad (22)$$

avec : $A \in \Delta$.

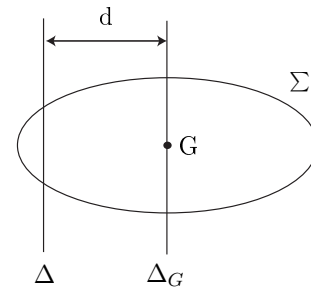
5.3.2 Théorème de HUYGENS

Le moment d'inertie du solide par rapport à un axe Δ parallèle à Δ_G est :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + m d^2$$

avec :

- J_{Δ_G} : un axe passant par G et parallèle à Δ
 - d : la distance entre les deux axes Δ et Δ_G
- c'est le théorème de HUYGENS.



Démonstration :

Le théorème de KOENIG s'écrit :

$$\vec{L}_A = \vec{L}_G^* + \vec{AG} \wedge m \vec{v}(G)$$

avec A un point fixe de Δ et $\vec{v}(G) = \vec{\Omega} \wedge \vec{AG}$

La projection sur l'axe de rotation donne :

$$L_{\Delta} = L_{\Delta}^* + m(\vec{AG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{AG})) \cdot \vec{u} =$$

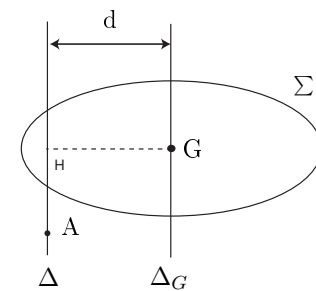
soit :

$$J_{\Delta} \Omega = J_{\Delta_G} \Omega + m(AG^2 - AH^2) \Omega$$

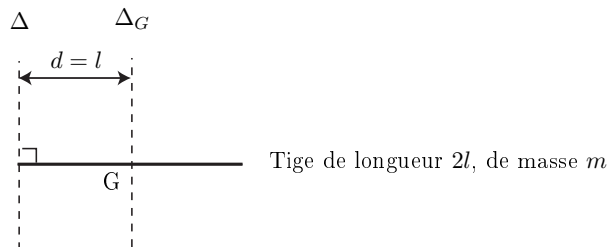
avec H est la projection de G sur l'axe.

d'où :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + m d^2$$



Exemple :



$$J_{\Delta_G} = \frac{1}{3} m l^2$$

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + m l^2 = \frac{4}{3} m l^2$$

5.3.3 Énergie cinétique

L'énergie cinétique du solide S dans le référentiel \mathcal{R} est :

$$\begin{aligned}
 E_c &= \iiint_S \frac{1}{2} \vec{v}(M)^2 dm \\
 &= \iiint_S \frac{1}{2} (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot \vec{v}(M) dm \\
 &= \iiint_S \frac{1}{2} (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M)) \cdot \vec{\Omega} dm \\
 &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\iiint_S (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M)) dm}_{\vec{L}_A} \right) \cdot \vec{\Omega}
 \end{aligned}$$

d'où l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ :

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{L}_A \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{L}_A \cdot \vec{e}_z \Omega = \frac{1}{2} L_{A\parallel} \Omega = \frac{1}{2} (J_\Delta \Omega) \Omega$$

soit :

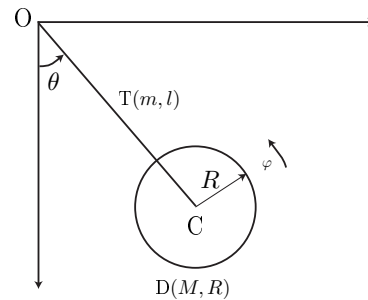
$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2} \quad (23)$$

Remarque importante :

Dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , le solide tourne autour d'un axe fixe passant par G (cas fréquent), les expressions de \vec{L}^* et E_c^* sont alors immédiates. On déduit ensuite les grandeurs (L_A et E_c) dans le référentiel \mathcal{R} par les théorèmes de KOENIG.

5.3.4 Application

Un disque $D(M, a)$ en rotation autour d'une tige $T(m, l)$ elle même en rotation autour d'un point O fixe. Calculer le moment cinétique par rapport à l'axe Oz et l'énergie cinétique E_c de l'ensemble dans le référentiel galiléen.



Réponse :

$$\begin{aligned}
 L_{Oz} &= \frac{1}{2} M a^2 \dot{\varphi} + (M + \frac{1}{3} m) l^2 \dot{\theta} \\
 E_c &= \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} M a^2 \dot{\varphi}^2
 \end{aligned}$$

Chapitre 2

Dynamique d'un système de points matériels

La dynamique des systèmes matériels tient compte de l'effet des actions (forces) sur le mouvement.

1 Actions extérieures et intérieures

Pour un système matériel Σ , les actions mécaniques (forces) mises en jeu peuvent être classées en deux types :

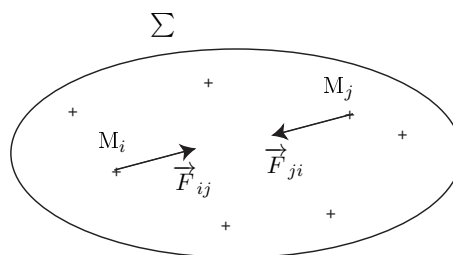
- les actions extérieures \vec{F}_{ext} : qui sont exercées par l'extérieur sur le système.
- Les action intérieures \vec{F}_{ext} : elles sont exercées par toute partie de Σ sur les autres parties.

D'après le principe de l'action et de la réaction, la force (intérieure) exercée par M_i sur M_j est opposée à celle exercée M_j sur M_i :

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

donc la résultante des actions intérieures à un système est nulle :

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}} \quad (24)$$



et le moment totale en un point A est aussi nulle :

$$\boxed{\sum_i \vec{M}_{A,\text{int}} = \vec{0}} \quad (25)$$

Exemple : Considérons un système constitué de deux corps A et B.

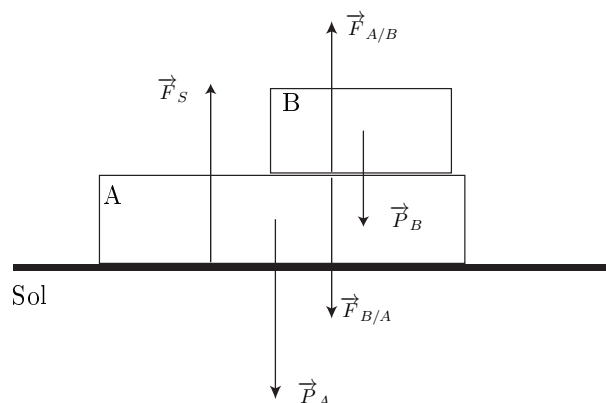
Pour le système $\Sigma = \{A + B\}$:

- les forces extérieures sont : \vec{P}_A , \vec{P}_B et \vec{F}_S .
- les forces intérieures sont : $\vec{F}_{A/B}$ et $\vec{F}_{B/A}$.

on a : $\vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = \vec{0}$.

Pour le système $\Sigma = \{A\}$:

- les forces : \vec{P}_A , $\vec{F}_{B/A}$ et \vec{F}_S sont des forces extérieures.



2 Théorème de la résultante cinétique (TRC)

2.1 Énoncé

✓ Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement \vec{P} d'un système fermé (de masse m) est égale à la somme des actions extérieures :

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} / \mathcal{R}_g = m \vec{a}(G/\mathcal{R}_g) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}}$$
 (26)

Remarque : Pour un système isolé ($\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$) : $\vec{P} = \vec{cte}$ (conservation de la quantité de mouvement totale d'un système isolé)

✓ Dans un référentiel non galiléen \mathcal{R} , le TRC s'écrit :

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} / \mathcal{R} = m \vec{a}(G/\mathcal{R}) = \sum \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}}$$
 (27)

avec :

— $\boxed{\vec{F}_{ie} = \sum_i -m_i \vec{a}_e(M_i) = -m \vec{a}_e(G)}$: Force d'inertie d'entraînement.

En effet :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ie} &= - \sum_i m_i \vec{a}_{ie}(M_i) \\ &= - \sum_i m_i \frac{d^2 \overrightarrow{OM}_i}{dt^2} / M_i \in R \\ &= - \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i \right) / M_i \in R \\ &= - \frac{d^2}{dt^2} \left(m \overrightarrow{OG} \right) / G \in R \\ &= -m \vec{a}_{ie}(G) \end{aligned}$$

— $\boxed{\vec{F}_{ic} = \sum_i -m_i \vec{a}_c(M_i) = -m \vec{a}_c(G)}$: Force d'inertie de CORIOLIS.

En effet :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ic} &= - \sum_i m_i \vec{a}_{ic}(M_i) \\ &= - \sum_i m_i 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_i \\ &= -2\vec{\Omega} \wedge \left(\sum_i m_i \vec{v}_i \right) \\ &= -2\vec{\Omega} \wedge m \vec{v}(G) \\ &= -m \vec{a}_{ic}(G) \end{aligned}$$

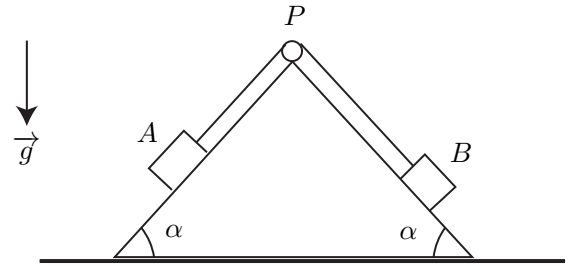
Remarque : Le TRC s'appelle aussi le théorème du centre de masse ou encore le théorème de la quantité de mouvement.

2.2 Application

Un prisme de masse M , dont la section droite a la forme d'un triangle isocèle d'angle α , peut glisser sans frottement sur le sol horizontal. Sur ce prisme, peuvent glisser sans frottement deux cubes A de masse $2m$ et B de masse m , reliés par un fil inextensible passant par une petite poulie P ; le fil et la poulie ont une masse négligeable et les deux brins de fil sont en permanence parallèles aux lignes de plus grande pente du prisme.

Calculer l'accélération a du prisme.

Réponse : $a = \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{M + 3m \sin^2 \alpha} g$



3 Théorème du moment cinétique (TMC)

3.1 Énoncé du TMC

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la dérivée par rapport au temps, du moment cinétique \vec{L}_A d'un système fermé, en un point A fixe dans \mathcal{R}_g , est égale au moment en A des actions extérieures.

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ext}}} \quad (28)$$

En effet, le TMC appliqué à un point M_i dans un référentiel galiléen est :

$$\frac{d\vec{L}_{i,A}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{i,A}^{\text{ext}} + \vec{\mathcal{M}}_{i,A}^{\text{int}}$$

où A est un point fixe.

soit :

$$\sum_i \frac{d\vec{L}_{i,A}}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{i,A}^{\text{ext}} + \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{i,A}^{\text{int}}$$

et puisque $\sum_i \vec{\mathcal{M}}_{i,A}^{\text{int}} = \vec{0}$, il vient :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ext}}$$

Remarque 1 : Pour un système isolé ($\sum \vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ext}} = \vec{0}$) : $\vec{L}_A = \text{cte}$ (il y a conservation du moment cinétique, en un point fixe, d'un système isolé).

Remarque 1 : si le point A n'est pas fixe on montre que :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{v}(A) \wedge m \vec{v}(G) = \sum \vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ext}}$$

3.2 TMC en G

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , le TMC appliqué en G (centre de masse du système) s'écrit :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{G,\text{ext}}} \quad (29)$$

cette expression est valable même si G n'est pas fixe dans \mathcal{R}_g .

3.3 TMC dans un référentiel non galiléen

Dans un référentiel non galiléen \mathcal{R} , le TMC en un point A fixe dans \mathcal{R} s'écrit :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ext}} + \vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ie}} + \vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ic}}} \quad (30)$$

avec :

$$\begin{aligned} - \quad & \boxed{\vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ie}} = - \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{a}_e(M_i)} && : \text{Moment des forces d'inertie d'entraînement} \\ - \quad & \boxed{\vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ic}} = - \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{a}_c(M_i)} && : \text{Moment des forces d'inertie de CORIOLIS} \end{aligned}$$

3.4 TMC dans le référentiel barycentrique

Dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , le TMC appliqué au point G s'écrit :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_G^*}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{G,\text{ext}}} \quad (31)$$

cette expression est valable même si \mathcal{R}^* n'est pas galiléen.

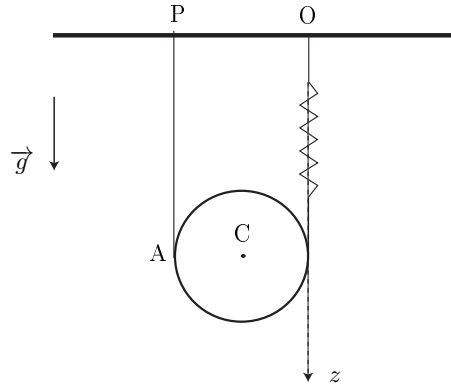
En effet, dans \mathcal{R}^* , qui est en translation, on a :

$$\begin{aligned} - \quad & \vec{\mathcal{M}}_{G,\text{ie}} = - \sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge m_i \vec{a}_e(M_i) = - \sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge m_i \vec{a}_e(G) = - \underbrace{\left(\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i \right)}_{=\vec{0}} \wedge \vec{a}_e(G) = \vec{0} \\ - \quad & \vec{\mathcal{M}}_{G,\text{ic}} = \vec{0} \text{ car } \mathcal{R}^* \text{ est en translation.} \end{aligned}$$

3.5 Applications

Considérons le système mécanique schématisé ci-contre. Le fil AP est inextensible, supposé sans masse, sans raideur et ne glisse pas sur le cylindre. Le ressort a une raideur k .

Calculer la période des oscillations verticales du centre C du cylindre homogène de masse m et de rayon R .



Réponse : $T = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{8k}}$

4 Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

4.1 TEC dans un référentiel galiléen

Dans un référentiel \mathcal{R}_g , l'énergie cinétique d'un système de points matériels $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ est :

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dE_c}{dt} = \sum_i m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i$$

le PFD appliqué au point M_i dans le référentiel **galiléen** \mathcal{R}_g est :

$$m_i \vec{a}_i = \vec{f}_{i,ext} + \vec{f}_{i,int}$$

donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \vec{v}_i \cdot \vec{f}_{i,ext} + \sum \vec{v}_i \cdot \vec{f}_{i,int}$$

d'où le TEC pour un système quelconque dans un référentiel **galiléen** \mathcal{R}_g :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}_{ext} + \sum \mathcal{P}_{int}} \quad (32)$$

avec :

✓ $\sum \mathcal{P}_{ext} = \sum_i \left(\vec{f}_{i,ext} \cdot \vec{v}_i \right)$ la somme des puissances des actions extérieures appliquées sur le système (Σ).

✓ $\sum \mathcal{P}_{int} = \sum_i \left(\vec{f}_{i,int} \cdot \vec{v}_i \right)$ la somme des puissances des actions intérieures à (Σ).

En intégrant entre deux instants t_1 et t_2 il vient :

$$\boxed{E_{c2} - E_{c1} = \sum W_{ext}(t_1, t_2) + \sum W_{int}(t_1, t_2)} \quad (33)$$

où $\sum W_{int}(t_1, t_2)$ est la somme des travaux des actions intérieures entre les instants t_1 et t_2 .
et $\sum W_{ext}(t_1, t_2)$ est la somme des travaux des actions extérieures entre les instants t_1 et t_2 .

Remarque 1 : Bien que la somme des actions intérieures est nulle, la puissance de ces actions n'est pas nulle à priori.

Remarque 2 : La puissance \mathcal{P}_{int} des actions intérieures est indépendante du référentiel dans lequel on fait les calculs. En effet :

- Dans un référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, la puissance des actions intérieures est :

$$\mathcal{P}_{int} = \sum_i \left(\vec{f}_{i,int} \cdot \vec{v}_i \right)$$

- Dans un autre référentiel $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$, elle s'écrit :

$$\mathcal{P}'_{int} = \sum_i \left(\vec{f}_{i,int} \cdot \vec{v}'_i \right)$$

car la force est indépendante du référentiel.

D'après la loi de composition des vitesses, on a :

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M_i}$$

donc :

$$\mathcal{P}_{int} = \sum_i \left(\vec{f}_{i,int} \cdot \vec{v}'_i \right) + \left(\sum_i \vec{f}_{i,int} \right) \cdot \vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \cdot \sum_i \left(\overrightarrow{O'M_i} \wedge \vec{f}_{i,int} \right)$$

or :

$$\sum_i \vec{f}_{i,\text{int}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum_i \overrightarrow{O'M_i} \wedge \vec{f}_{i,\text{int}} = \vec{0}$$

d'où :

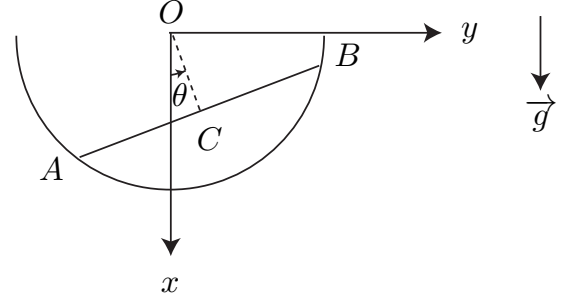
$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}'_{\text{int}}$$

Application :

Une tige homogène AB , de centre C , de longueur $2L$, de moment d'inertie $J = \frac{1}{3}mL^2$ par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par C , glisse sans frottement à l'intérieur d'un demi-cercle de centre O et de rayon $R = \frac{2}{\sqrt{3}}L$.

Ce demi-cercle est situé dans le plan vertical (Oxy) d'un référentiel galiléen.

1. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OC})$.



Réponse : $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta$

4.2 TEC dans un référentiel non galiléen

Dans un référentiel non galiléen \mathcal{R}' , l'énergie cinétique d'un système de points matériels $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ est :

$$E'_c = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}'_i \right) \implies \frac{dE'_c}{dt} = \sum_i (m_i \vec{a}'_i) \cdot \vec{v}'_i$$

le PFD appliquée au point M_i dans \mathcal{R}' est :

$$m_i \vec{a}'_i = \vec{f}_{i,\text{ext}} + \vec{f}_{i,\text{int}} + \vec{f}_{ie}(M_i) + \vec{f}_{ic}(M_i)$$

d'où :

$$\frac{dE'_c}{dt} = \sum \mathcal{P}'_{\text{ext}} + \sum \mathcal{P}'_{\text{int}} + \mathcal{P}_{ie} + \mathcal{P}_{ic}$$

avec :

- $\sum \mathcal{P}'_{\text{ext}} = \sum_i (\vec{f}_{i,\text{ext}} \cdot \vec{v}'_i)$ la puissance des actions extérieures.
- $\sum \mathcal{P}'_{\text{int}} = \sum_i (\vec{f}_{i,\text{int}} \cdot \vec{v}'_i)$ la puissance des actions intérieures.
- $\mathcal{P}_{ie} = \sum_i (\vec{f}_{ie}(M_i) \cdot \vec{v}'_i) = - \sum_i (m_i \vec{a}'_{ie}(M_i) \cdot \vec{v}'_i)$ la puissance des forces d'entraînement.
- $\mathcal{P}_{ic} = \sum_i (\vec{f}_{ic}(M_i) \cdot \vec{v}'_i) = -2 \sum_i m_i (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}'_i) \cdot \vec{v}'_i = \vec{0}$: la puissance des forces de CORIOLIS est nulle.

d'où le TEC pour un système quelconque dans un référentiel non galiléen :

$$\boxed{\frac{dE'_c}{dt} = \sum \mathcal{P}'_{\text{ext}} + \sum \mathcal{P}'_{\text{int}} + \mathcal{P}_{ie}} \quad (34)$$

4.3 TEC dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^*

Considérons un système de points matériels $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ dans un référentiel \mathcal{R} et soit \mathcal{R}^* le référentiel barycentrique (a priori non galiléen) par rapport à \mathcal{R} .

Le TEC dans \mathcal{R}^* s'écrit :

$$\frac{dE_c^*}{dt} = \sum \mathcal{P}_{\text{ext}}^* + \sum \mathcal{P}_{\text{int}}^* + \mathcal{P}_{\text{ie}}^*$$

avec :

$$\mathcal{P}_{\text{ie}}^* = \sum_i \left[\vec{f}_{\text{ie}}(M_i) \cdot \vec{v}_i^* \right] = - \sum_i [m_i \vec{a}_{\text{ie}}^*(M_i) \cdot \vec{v}_i^*]$$

or :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\text{ie}}^*(M_i) &= \vec{a}(G/\mathcal{R}) + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{GM_i} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{GM_i}) \\ &= \vec{a}_{G/\mathcal{R}} \quad \text{puisque } \vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{0} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{ie}}^* &= -\vec{a}_{G/\mathcal{R}} \cdot \sum_i [m_i \vec{v}_i^*] \\ &= -\vec{a}_{G/\mathcal{R}} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i [m_i \overrightarrow{GM_i}] \\ &= \vec{0} \quad \text{par définition du centre d'inertie G} \end{aligned}$$

donc la puissance des forces d'inertie dans le référentiel barycentrique est nulle :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{ie}}^* = 0} \tag{35}$$

Le TEC dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* (qui n'est pas a priori galiléen) s'écrit comme dans un référentiel galiléen :

$$\boxed{\frac{dE_c^*}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}}^* + \mathcal{P}_{\text{int}}^*} \tag{36}$$

4.4 TEC pour un solide

a/ Puissance des actions intérieures :

Considérons deux points M_i et M_j d'un solide. La puissance des forces intérieures \vec{F}_{ij} et \vec{F}_{ji} est :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_i + \vec{F}_{ji} \cdot \vec{v}_j$$

soit :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \quad \text{car} \quad \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} = F \frac{\overrightarrow{M_i M_j}}{M_i M_j} = \text{cte } \overrightarrow{M_i M_j}$$

d'où :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{F}_{ij} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_i M_j}}{dt} = \text{cte } \overrightarrow{M_i M_j} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_i M_j}}{dt} = \text{cte } \frac{1}{2} \frac{d\overrightarrow{M_i M_j}^2}{dt} = 0 \quad \text{car } \overrightarrow{M_i M_j}^2 = \text{cte (solide)}$$

Donc pour un système solide, la puissance des actions intérieures est nulle dans tout référentiel :

$$\boxed{\sum \mathcal{P}_{\text{int}} = 0} \quad (37)$$

b/ Puissance des actions extérieures :

Soit une force \vec{F} appliquée en un point M du solide et A un point quelconque de ce solide. La puissance de cette force dans une référentiel \mathcal{R} est :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \vec{F} \cdot \vec{v}(M) \\ &= \vec{F} \cdot (\vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) \\ &= \vec{F} \cdot \vec{v}(A) + \vec{F} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) \\ &= \vec{F} \cdot \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \cdot (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(A) + \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_A(F) \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum \mathcal{P}_{\text{ext}} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}(A) + \sum \vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ext}} \cdot \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}} \quad (38)$$

A est un point quelconque du solide.

c/ TEC pour un solide :

Pour un solide, le TEC dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}_{\text{ext}}} \quad (39)$$

✓ E_c est l'énergie cinétique du solide dans \mathcal{R}_g .

✓ $\sum \mathcal{P}_{\text{ext}}$ est la somme des puissances des actions extérieures appliquées sur le solide.

En intégrant entre deux instants t_1 et t_2 il vient :

$$\boxed{E_{c2} - E_{c1} = \sum W_{\text{ext}}(t_1, t_2)} \quad (40)$$

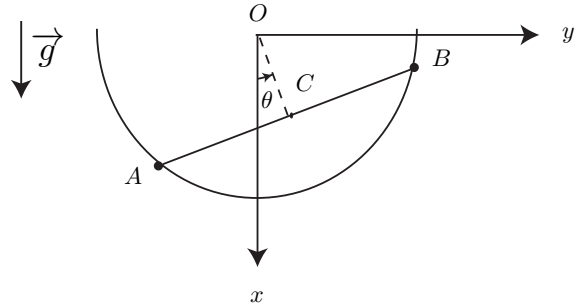
où $\sum W_{\text{ext}}(t_1, t_2)$ est la somme des travaux des actions extérieures entre les instants t_1 et t_2 .

Application :

Une tige homogène AB, de centre C, de longueur 2l, de moment d'inertie $J = \frac{1}{3} m l^2$ par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par C, glisse sans frottement à l'intérieur d'un demi-cercle de centre O et de rayon $R = \frac{2}{\sqrt{3}} L$.

Ce demi-cercle est situé dans le plan vertical (Oxy) d'un référentiel galiléen.

1. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OC})$.



Réponse : $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$

5 Énergie mécanique d'un système de points matériels

5.1 Énergie potentielle

Dans un référentiel \mathcal{R} , l'énergie potentielle E_p dont dérive une force \vec{F} appliquée sur un point matériel M est telle que :

$$\boxed{dE_p = -\vec{F} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R}) dt = -\delta W(\vec{F})} \quad (41)$$

On dit que la force \vec{F} est une force **conservative**.

L'énergie potentielle d'un système $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ est la somme des énergies potentielles de toutes les forces conservatives :

$$E_p = \sum_i E_{pi}$$

où E_{pi} est l'énergie potentielle de la force **conservative** f_i .

5.2 Théorème de l'énergie mécanique (TEM)

L'énergie mécanique du système $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ dans \mathcal{R} est :

$$E_m = E_c + E_p = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) + \sum_i E_{pi}$$

d'où :

$$dE_m = dE_c + dE_p$$

or :

$$dE_c = \sum \delta W^c + \sum \delta W^{nc} \quad \text{et} \quad dE_p = -\delta W^c$$

avec δW^c et δW^{nc} sont respectivement les travaux élémentaires des forces conservatives et non conservatives.

d'où le théorème de l'énergie mécanique (TEM) :

$$\boxed{dE_m = \sum \delta W^{nc}} \quad (42)$$

5.3 Conservation de l'énergie mécanique

Si toutes les forces non conservatives appliquées sur un système ne travaillent pas, alors :

$$\delta W^{nc} = 0 \quad \implies \quad \boxed{E_m = \text{cte}}$$

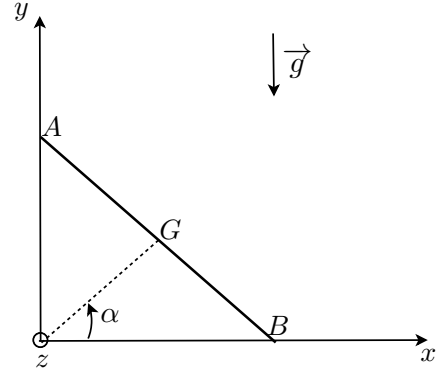
dans ce cas, et le système est dit **conservatif**.

L'équation $\boxed{E_m = E_c + E_p = \text{cte}}$ est une intégrale première du mouvement : c'est l'**intégrale première de l'énergie** .

Remarque : Dans un référentiel non galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie d'entraînement qui peuvent éventuellement dériver d'une énergie potentielle.

Application :

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Une barre AB homogène de masse m , de longueur $2b$ et de centre G , milieu de AB , est posée sur le sol horizontal et repose contre un mur vertical. Sa position est déterminée par l'angle $\alpha = (\vec{Ox}, \vec{OG})$. Les contacts en A et B sont supposés sans frottements.



1. Écrire l'intégrale première de l'énergie en supposant qu'à l'instant initial, la barre est immobile avec une inclinaison α_0 .
2. Calculer la réaction \vec{R}_A , du mur sur la barre, et en déduire pour quelle inclinaison α_1 , la barre quitte le mur. On donne le moment d'inertie de la barre par rapport à sa médiatrice $J = \frac{1}{3}mb^2$.

Réponses : $E_m = \frac{2}{3}mb^2\dot{\alpha}^2 + mgb \sin \alpha = mgb \sin \alpha_0$; $R_A = \frac{3}{2}mg \cos \alpha (\frac{3}{2} \sin \alpha - \sin \alpha_0)$; $\sin \alpha_1 = \frac{2}{3} \sin \alpha_0$

6 Notion de torseur

6.1 Définition

Considérons, dans un référentiel \mathcal{R} , un système de point matériels $\Sigma\{M_i(m_i)\}$. À chaque point matériel M_i est associé un vecteur $\vec{Q}_i (= \vec{v}_i, \vec{a}_i, \vec{F}_i, m_i \vec{v}_i, \dots)$.

On définit pour ce système de vecteur :

- la **résultante** : $\vec{R} = \sum_i \vec{Q}_i$
- le **moment** en un point A : $\vec{M}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{Q}_i$

le moment en un autre point B est :

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

La résultante \vec{R} et le moment \vec{M}_A sont appelés **éléments de réduction en A** du **torseur** $\tau = [\vec{R}, \vec{M}_A]$ associé au système $\{\vec{Q}_i\}$.

6.2 Cas particuliers

- si la résultante d'un torseur est nulle ($\vec{R} = \vec{0}$), le torseur est appelé **un couple**.
- si le moment, en un point, d'un torseur est nul ($\vec{M}_A = \vec{0}$), le torseur est appelé **un glisseur**.

6.3 Exemples

✓ Torseur cinétique τ_c :

- Les éléments de réduction sont : $\vec{R} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m \vec{v}(G) = \vec{P}$ et $\vec{M}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \vec{L}_A$

- On montre que :

$$\vec{L}_B = \vec{L}_A + \vec{P} \wedge \overrightarrow{AB}$$

- On note le torseur cinétique :

$$\tau_c = [\vec{P}, \vec{L}_A]$$

✓ Torseur dynamique τ_d :

• Les éléments de réduction sont : $\vec{R} = \sum_i m_i \vec{a}_i = m \vec{a}(G) = \vec{S}$ et $\vec{M}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{a}_i = \vec{D}_A$

• On montre que :

$$\vec{D}_B = \vec{D}_A + \vec{S} \wedge \overrightarrow{AB}$$

• On note le torseur dynamique :

$$\tau_d = [\vec{S}, \vec{D}_A]$$

Remarque : il est facile de montrer qu'en un point fixe A on a : $\vec{D}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$.

✓ Torseur des actions mécaniques (forces) τ_f :

• Les éléments de réduction sont : $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ et $\vec{M}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{F}_i$

• On montre que pour une force \vec{F} appliquée en un point M, on a :

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \wedge \overrightarrow{AB}$$

• On note le torseur des forces :

$$\tau_f = \left[\sum_i \vec{F}_i, \vec{M}_A(\vec{F}_i) \right]$$

✓ Torseur des vitesses d'un solide (cinématique) τ_v :

Pour deux points d'un solide on a : $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{BA}$
d'où le torseur cinématique d'un solide :

$$\tau_v = [\vec{\Omega}, \vec{v}_A]$$

6.4 Formulation torsorielles des lois de la mécanique

6.4.1 Principe fondamental

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , le torseur dynamique τ_d d'un système fermé est égal au torseur des actions mécaniques extérieures $\tau_{f,ext}$:

$$[\vec{S}, \vec{D}_A] = \left[\sum_i \vec{F}_{i,ext}, \vec{M}_A(\vec{F}_{i,ext}) \right]$$

d'où le TRC :

$$m \vec{a}(G) = \sum_i \vec{F}_{i,ext}$$

et le TMC en un point fixe A :

$$\vec{D}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{F}_{i,ext})$$

6.4.2 Principe de l'action et de la réaction

Le torseur des actions mécaniques exercées par un système Σ_1 sur un système Σ_2 est opposé à celui exercé par Σ_2 sur Σ_1 .

$$\tau_{f,1\rightarrow 2} = -\tau_{f,2\rightarrow 1}$$

d'où :

$$\vec{F}_{1\rightarrow 2} = -\vec{F}_{2\rightarrow 1}$$

et

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{1\rightarrow 2}) = -\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{2\rightarrow 1})$$

Annexe B : Lois de composition des vitesses et des accélérations

Considérons un référentiel fixe $R(O, x, y, z)$ (celui du laboratoire) et un référentiel $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ mobile par rapport à R .

On va appeler :

- R le référentiel **absolu**.
- R_1 le référentiel **relatif**.

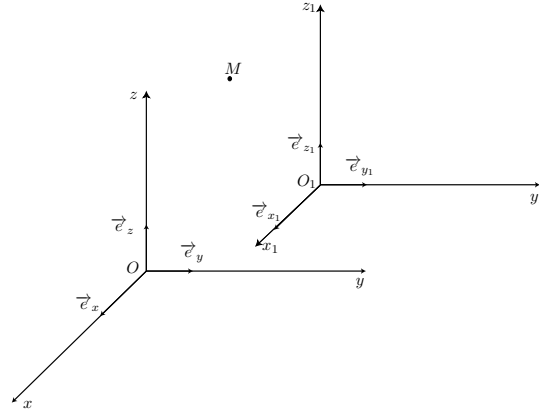


FIGURE 1 – Le référentiel R_1 est en mouvement par rapport à R .

La loi de composition des vitesses est :

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)$$

La loi de composition des accélérations est :

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{v}_e(M) &= \vec{v}(O_1/R) + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ \vec{a}_e(M) &= \vec{a}(O_1/R) + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \left(\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M} \right) + \frac{d}{dt} [\vec{\omega}(R_1/R)]_{/R} \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ \vec{a}_c(M) &= 2\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{v}_r \end{aligned}$$

Chapitre 3

Solides en contact

1 Cinématique

1.1 Mouvements d'un solide

Le mouvement le plus général d'un solide S dans un référentiel \mathcal{R} peut se décomposer en :

- un mouvement de G dans \mathcal{R} qui traduit la translation d'ensemble de S ;
- un mouvement autour de G dans \mathcal{R}^* : il correspond à un mouvement de rotation autour d'un axe fixe passant par G .

Un solide S est en translation dans un référentiel \mathcal{R} lorsque un vecteur quelconque fixe dans \mathcal{R}_s reste constant dans \mathcal{R} au cours du temps. Dans ce cas on a :

$$\vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

1.2 Mouvements d'un solide

Le mouvement le plus général d'un solide S dans un référentiel \mathcal{R} peut se décomposer en :

- un mouvement de G dans \mathcal{R} qui traduit la translation d'ensemble de S ;
- un mouvement autour de G dans \mathcal{R}^* : il correspond à un mouvement de rotation autour d'un axe fixe passant par G .

Un solide S est en translation dans un référentiel \mathcal{R} lorsque un vecteur quelconque fixe dans \mathcal{R}_s reste constant dans \mathcal{R} au cours du temps. Dans ce cas on a :

$$\vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

1.3 Vitesse de glissement

Considérons deux solides S_1 et S_2 en mouvement dans un référentiel \mathcal{R} et qui sont en contact en un point I .

Soit Π le plan tangent aux deux solides en I .

✓ On appelle **vitesse de glissement** $\vec{v}_g(I)$ en I de S_1 sur S_2 à l'instant t :

$$\vec{v}_g(I) = \vec{v}(I \in S_1/\mathcal{R}) - \vec{v}(I \in S_2/\mathcal{R}) = \vec{v}(I \in S_1/\mathcal{R}_{s_2}) \quad (1)$$

où \mathcal{R}_{s_2} est le référentiel lié au solide S_2 .

✓ Si le **mouvement** de S_1 sur S_2 se fait **sans glissement** alors :

$$\vec{v}_g(I) = \vec{0} \quad (2)$$

Application :

Calculer la vitesse de glissement en I dans les cas suivants :

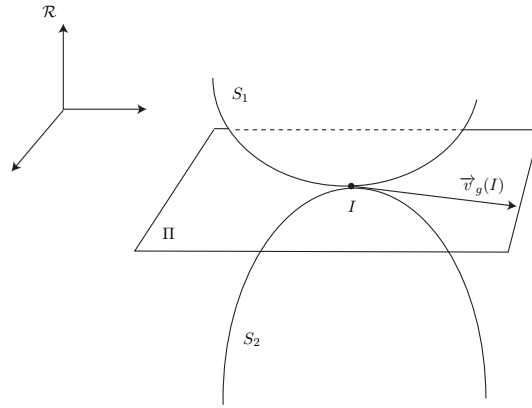
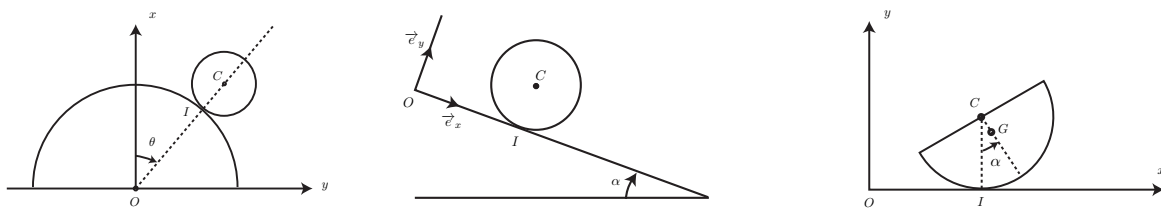


FIGURE 2 – Deux solides en contact en un point I .



Réponses :

1) $v_g(I) = (a + b)\dot{\theta} - b\dot{\varphi}$; 2) $v_g(I) = \dot{x}_c + R\omega$; 3) $v_g(I) = \dot{x}_c + R\dot{\alpha}$

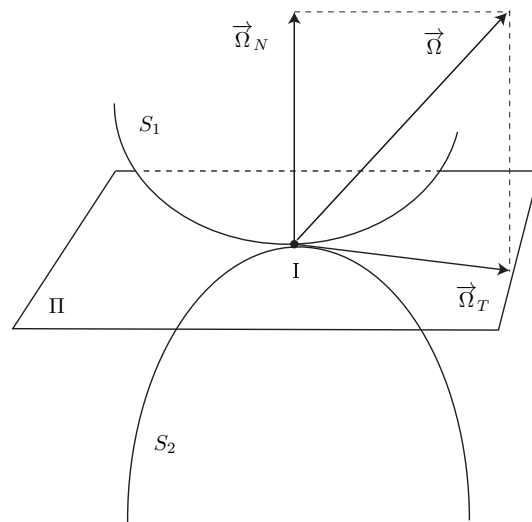
1.4 Roulement et pivotement

Soient $\vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R})$ et $\vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R})$ les vitesses de rotation des deux solides S_1 et S_2 respectivement. La **vitesse de rotation relative** de S_1 par rapport à S_2 est :

$$\vec{\Omega}(S_1/S_2) = \vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}) - \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R})$$

Ce vecteur peut se décomposer en deux vecteurs :

- un vecteur **normal** $\vec{\Omega}_N$ au plan tangent Π en I : c'est le vecteur rotation de **pivotement**.
- un vecteur **tangent** $\vec{\Omega}_T$ au plan tangent Π en I : c'est le vecteur rotation de **roulement**.

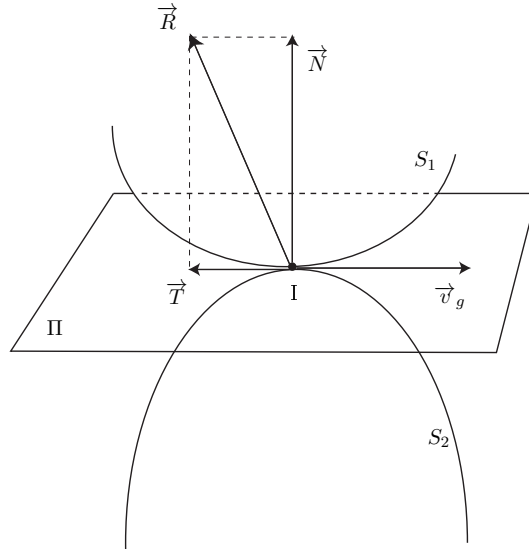


2 Lois de COULOMB

Les lois de Coulomb sont des lois phénoménologique (basées sur l'expérience et les modèles) qui complètent le système d'équations du mouvement.

2.1 Action de contact

considérons deux solides dans un référentiel \mathcal{R} et qui sont en contact en un point I.



La résultante \vec{R} des actions de contact peut se décomposer en deux composantes :

- ✓ une composante \vec{N} normale au plan tangent Π : c'est la **réaction normale**. Elle assure le contact entre les deux solides.
si : $N = 0$ alors il y a rupture de liaison (pas de contact).
- ✓ une composante \vec{T} tangentielle au plan tangent Π : c'est la **force de frottement** (de glissement).

On alors :

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

2.2 Propriétés de la force de frottement

On distingue deux cas : cas où il y a glissement et cas où il n'y a pas de glissement.

- ✓ S'il y a **glissement** de S_1 sur S_2 alors : $\vec{v}_g \neq \vec{0}$.

Dans ce cas on a :

- \vec{T} et \vec{v}_g sont colinéaires et de sens opposés.

$$\vec{T} \wedge \vec{v}_g = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0 \quad (3)$$

- Les **modules** de \vec{T} et \vec{N} sont proportionnels :

$$\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\| \quad (4)$$

f est le coefficient de frottement de glissement (cinétique)

✓ S'il n'y a pas de glissement de S_1 sur S_2 alors : $\vec{v}_g = \vec{0}$.

Dans ce cas on a :

$$\|\vec{T}\| \leq f_0 \|\vec{N}\| \quad (5)$$

f_0 est le coefficient de frottement de glissement (statique).

Remarque : Dans la plus part des problèmes on confond f avec f_0 .

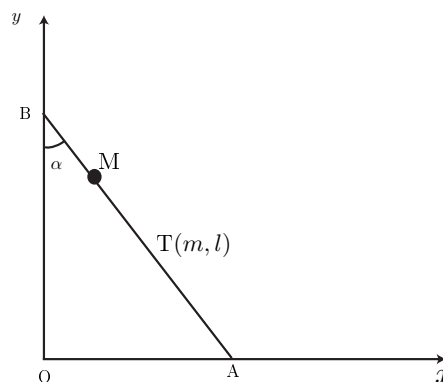
Le coefficient de frottement f dépend de la nature des surfaces en contact. Exemples :

- Métal-Métal : $f = 0,1$ à $0,2$.
- Bois-Bois : $f = 0,3$ à $0,4$.

2.3 Application

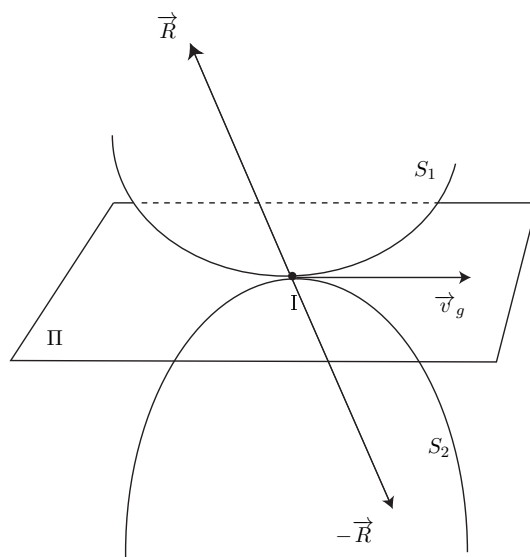
Une tige AB de masse m , de longueur l , repose sur un sol horizontal et appuyée sur un mur vertical avec une inclinaison α . Le contact en A présente un coefficient de frottement f alors qu'en B il n'y a pas de frottement. Un point matériel P de masse M se déplace sur la tige. À quelle condition la tige reste en équilibre quelle que soit la position de P entre A et B ?

Réponse : $\tan(\alpha) \leq 2f \frac{M+m}{2M+m}$



3 Puissance des actions de contact

Dans un référentiel \mathcal{R} , considérons deux solides en contact en un point I. Le solide S_2 exerce une force \vec{R} sur S_1 . D'après le principe de l'action et de la réaction, le solide S_1 exerce une force $-\vec{R}$ sur S_2 .



La puissance totale des actions de contact dans \mathcal{R} est :

$$\mathcal{P}_c = \mathcal{P}(\vec{R}) + \mathcal{P}(-\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{v}(I \in S_1) + (-\vec{R}) \cdot \vec{v}(I \in S_2) = \vec{R} \cdot \underbrace{(\vec{v}(I \in S_1) - \vec{v}(I \in S_2))}_{\vec{v}_g(I)}$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{P}_c = \vec{R} \cdot \vec{v}_g(I) = \vec{T} \cdot \vec{v}_g(I) \leq 0} \quad (6)$$

- Selon les lois de COULOMB cette puissance est négative ou nulle.
- $\mathcal{P}_c = 0$ en l'absence de frottement ($\vec{T} = \vec{0}$ car $\vec{R} \perp \vec{v}_g(I)$) ou en l'absence de glissement ($\vec{v}_g = \vec{0}$).
- Si toutes les autres forces sont conservatives alors le TEM donne : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_c \leq 0$, donc l'énergie mécanique du système $\{S_1, S_2\}$ diminue. Elle se transforme en énergie d'agitation thermique (chaleur).

Remarque : cette puissance est une puissance des actions intérieures au système $\{S_1, S_2\}$ donc indépendante du référentiel.

Application :

Exercice 13* : Rotation d'un cylindre dans une cornière

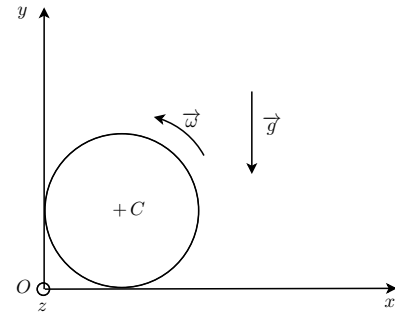
Un cylindre de masse m , de rayon R , tournant, à l'instant initial, à la vitesse angulaire positive ω_0 autour de son axe, est posé sur une cornière. On suppose que le cylindre reste en permanence en contact avec les plans horizontal (Oxz) et vertical (Oyz) de la cornière et on appelle f le coefficient de glissement entre le cylindre et les plans de la cornière.

1.- En appliquant le théorème du moment cinétique en C , déterminer la loi horaire $\omega(t)$.

2.- Calculer l'instant t_0 auquel le cylindre s'immobilise.

3.- Établir un bilan énergétique entre l'instant initial et l'instant t_0 .

Le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son axe est $J = \frac{1}{2}mR^2$.



Réponses :

4 Quelques liaisons entre les solides

4.1 Liaison parfaite

Une liaison entre deux solides S_1 et S_2 est dite **parfaite** si la puissance totale des actions de contact est nulle au cours du mouvement.

$$\mathcal{P}_c = 0$$

4.2 Liaison rotule ou sphérique

Les deux solides S_1 et S_2 ont une **liaison rotule** s'il y a un point A de S_1 fixe par rapport à S_2 . Donc le seul mouvement de S_1 par rapport à S_2 est un mouvement de **rotation autour d'un point** lié à S_2 .

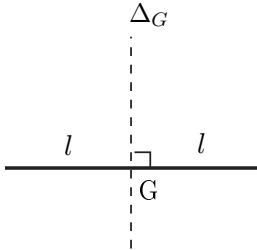
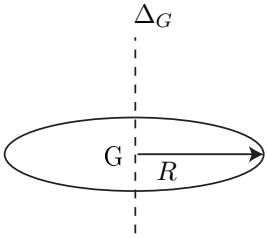
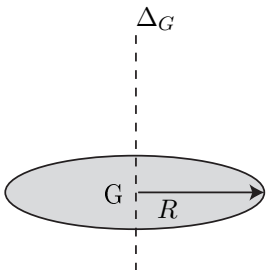
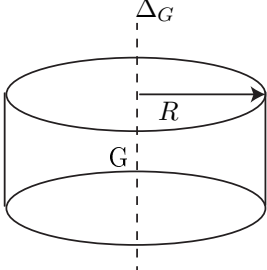
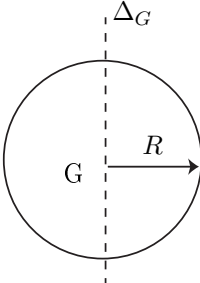
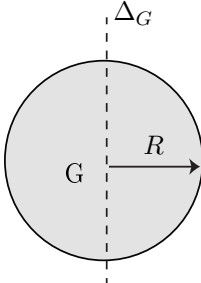
4.3 Liaison pivot ou rotoïde

Les deux solides S_1 et S_2 ont une **liaison pivot** s'il y a un axe Δ de S_1 fixe par rapport à S_2 . Donc le seul mouvement de S_1 par rapport à S_2 est un mouvement de **rotation autour d'un axe Δ** lié à S_2 .

Application :

Annexe A

Exemples de moments d'inertie par rapport à un axe Δ_G passant par G

 <p>Tige de longueur $2l$, de masse m</p> $J_{\Delta_G} = \frac{1}{3}ml^2$	 <p>Cerceau de rayon R, de masse m</p> $J_{\Delta_G} = mR^2$
 <p>Disque de rayon R, de masse m</p> $J_{\Delta_G} = \frac{1}{2}mR^2$	 <p>Cylindre de rayon R, de masse m</p> $J_{\Delta_G} = \frac{1}{2}mR^2$
 <p>Sphère creuse de rayon R, de masse m</p> $J_{\Delta_G} = \frac{2}{3}mR^2$	 <p>Sphère pleine de rayon R, de masse m</p> $J_{\Delta_G} = \frac{2}{5}mR^2$

Dynamique d'un système matériel

	Réf. galiléen \mathcal{R}_g	Réf. barycentrique \mathcal{R}^*	Réf. non galiléen \mathcal{R}'
TRC	<ul style="list-style-type: none"> • $m \vec{a}(G/\mathcal{R}_g) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$ 		$m \vec{a}(G/\mathcal{R}') =$ $\sum \vec{F}_{\text{ext}} - m \vec{a}_{ie}(G) - m \vec{a}_{ic}(G)$
TMC	<ul style="list-style-type: none"> • $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{M}_{A,\text{ext}}$; A est fixe • $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \sum \vec{M}_{G,\text{ext}}$ <p>G n'est pas forcément fixe</p>	<ul style="list-style-type: none"> • $\frac{d\vec{L}_G^*}{dt} = \sum \vec{M}_{G,\text{ext}}$ 	$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{M}_{A,\text{ext}} + \vec{M}_{A,ie} + \vec{M}_{A,ic}$ A est fixe dans \mathcal{R}'
TEC	<ul style="list-style-type: none"> • $\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}_{\text{ext}} + \sum \mathcal{P}_{\text{int}}$ <p style="text-align: center;">$\sum \mathcal{P}_{\text{int}}(\text{solide}) = 0$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • $\frac{dE_c^*}{dt} = \sum \mathcal{P}_{\text{ext}}^* + \sum \mathcal{P}_{\text{int}}^*$ <p style="text-align: center;">$\sum \mathcal{P}_{\text{int}}^*(\text{solide}) = 0$</p>	$\frac{dE'_c}{dt} = \sum \mathcal{P}'_{\text{ext}} + \sum \mathcal{P}'_{\text{int}} + \mathcal{P}'_{ie}$
TEM	<ul style="list-style-type: none"> • $\frac{dE_m}{dt} = \sum \mathcal{P}^{\text{nc}}$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\frac{dE_m^*}{dt} = \sum \mathcal{P}^{*\text{nc}}$ 	$\frac{dE'_m}{dt} = \sum \mathcal{P}'^{\text{nc}}$ \vec{F}_{ie} peut être conservative ou non