

**CENTRE REGIONAL DES MÉTIERS
DE L'ÉDUCATION ET DE LA FORMATION
MARRAKECH-SAFI**

CPA-CRMEF

Cours de :

PHYSIQUE INSTRUMENTALE

**ÉLEMENTS DE MÉTROLOGIE
AGRÉGATION DE PHYSIQUE
OPTION PHYSIQUE
AGP-2**

**Par :
ABDELFETTAH HABIB**

Dernière mise à jour : Septembre 2021

Table des matières

1	Mesures et incertitudes en physique	5
1.1	Introduction	5
1.1.1	Erreur	5
1.1.2	Types d'erreurs	5
1.1.3	Incertitude	6
1.1.4	Incertitude relative	7
1.2	Présentation du résultat d'une mesure	7
1.2.1	Chiffres significatifs	7
1.2.2	Règles des chiffres significatifs	8
1.2.3	Arrondir un nombre	9
1.2.4	Résultat d'un calcul	9
1.2.5	Présentation des résultats	9
1.2.6	Comparaison entre les mesures physiques	10
1.3	Calcul des incertitudes	10
1.3.1	Incertitudes type A	10
1.3.2	Incertitude type B	12
1.3.3	Mesure indirecte–Propagation des incertitudes	14
1.4	Applications	15
1.4.1	Exemple 1 : Mesure d'une tension par un voltmètre	15
1.4.2	Exemple 2 : Mesures avec la carte d'acquisition SP5-LatisPro	15
1.4.3	Exemple 3 : Mesure d'un temps avec un chronomètre	16
2	Capteurs en instrumentation	17
2.1	Introduction	17
2.1.1	Capteurs passifs	17
2.1.2	Capteurs actifs	18
2.2	Caractéristiques métrologiques	20
2.2.1	Limites d'utilisation d'un capteur	20
2.2.2	Résolution	21
2.2.3	Caractéristique d'entrée-sortie d'un capteur	21
2.2.4	Sensibilité	21
2.2.5	Finesse	22
2.2.6	Linéarité	22
2.2.7	Caractéristiques statistiques d'un capteur	23
2.2.8	Temps caractéristiques	24
2.2.9	Étalonnage du capteur	25
2.3	Conditionneur des capteurs	25
2.3.1	Conditionneur des capteurs actifs	25

2.3.2	Conditionneurs des capteurs passifs : Montage potentiométrique	28
2.3.3	Conditionneurs des capteurs passifs : Les ponts	31
2.3.4	Conditionneurs des capteurs passifs : Les oscillateurs	37
2.4	Amplification du signal	38
2.4.1	Notion de tension de mode commun	38
2.4.2	Amplificateur différentiel et Taux de Réjection de Mode Commun	41
2.4.3	Amplificateur d'isolement	41
2.4.4	Amplificateur d'instrumentation	42
2.5	Exemples de capteurs	42
2.5.1	Capteur Optique	42
2.5.2	Capteur d'image	47
2.5.3	Capteur de température	48
2.5.4	Capteur acoustique : Le microphone	53
2.5.5	Capteur de pression	60
2.5.6	Jauge de contrainte (métallique)	62
2.6	Introduction	65
2.7	Système International d'Unités (SI)	65
2.7.1	Introduction	65
2.7.2	Les 7 constantes fondamentales	65
2.7.3	Les sept unités de base	66
2.8	Les étalons	67
2.8.1	Le kilogramme	67
2.8.2	Les divers définitions du kilogramme	67

Chapitre 1

Mesures et incertitudes en physique

1.1 Introduction

1.1.1 Erreur

Lorsqu'on mesure une grandeur physique x on trouve une *valeur mesurée* x_m . Si on note X la *vraie* valeur de x , l'*erreur* de mesure est :

$$\text{Erreur} = |X - x_m|$$

En pratique, la vraie valeur d'une grandeur est toujours inconnue (sinon, il serait inutile de faire la mesure), on ne peut donc en déduire l'erreur.

1.1.2 Types d'erreurs

Il y a deux types d'erreurs : erreur aléatoire et erreur systématique.

1.1.2.1 Erreur aléatoire

✓ **Exemple** : Dans l'expérience précédente, on constate qu'en répétant les mesures on trouve des résultats légèrement différents, dus surtout aux retards de déclenchement qui vont réduire ou accroître la valeur mesurée. On parle d'*erreur aléatoire*.

- ✓ Les erreurs aléatoires peuvent provenir :
 - du contrôle imparfait des conditions expérimentales dans lesquelles s'effectue la mesure ;
 - de faibles perturbations provenant du dispositif de mesure (ex : vibrations mécaniques, ...);
 - des variations des grandeurs extérieures (température, pression,...).
 - ...etc.

✓ Les erreurs aléatoires sont détectées et caractérisées par une étude *statistique*.

✓ Elles peuvent être réduites en augmentant le nombre de mesures.

1.1.2.2 Erreur systématique

✓ L'erreur systématique peut être considérée comme une erreur *constante* qui affecte *chacune* des observations de la *même* manière.

Exemple : Si le chronomètre dans l'expérience précédente n'est pas calibré, il va ajouter (ou retrancher) la même durée à toutes les mesures.

- ✓ Il existe de nombreuses sources d'erreurs systématiques, comme par exemple :
- l'effet des grandeurs d'influence (température, pression,...);
 - l'erreur de justesse des instruments (décalage du zéro par exemple, chronomètre mal calibré,...);
 - la position de l'objet mesuré. Exemple : erreur de parallaxe c-à-d, l'angle qui peut exister entre la direction du regard d'un observateur et la perpendiculaire à une graduation amenant une lecture inexacte de la mesure faite.
 - la perturbation due à la présence des instruments.
 - ... etc

✓ L'erreur systématique ne peut être réduite que par l'application d'une *correction*.

- ✓ Pour détecter et évaluer ces erreurs, on peut par exemple :
- mesurer la même grandeur avec un instrument différent ;
 - mesurer la même grandeur avec des méthodes différentes ;
 - ...

On voit que les erreurs aléatoires se repèrent encore facilement mais impossible de savoir s'il y a des systématiques (car on ne connaît pas la position de la cible).

1.1.3 Incertitude

✓ L'incertitude Δx d'une mesure définit *un intervalle autour de la valeur mesurée qui inclut la valeur vraie* avec une *probabilité* donnée (ou niveau de confiance).

- ✓ Puisque l'incertitude est définie positive ($\Delta x > 0$), les bornes de *l'intervalle d'incertitude* sont :
- $x_{\max} = x_m + \Delta x$: la valeur probable la plus élevée ;
 - $x_{\min} = x_m - \Delta x$: la valeur probable la plus faible.

soit :

$$x_m - \Delta x \leq x \leq x_m + \Delta x$$

✓ Le résultat de la mesure de la grandeur x est présenté sous la *forme standard* suivante :

$$x = x_m \pm \Delta x \quad (\text{unité})$$

Δx est l'incertitude sur la mesure, appelée aussi *incertitude absolue*.

Remarque : On doit écrire les unités après l'incertitude.

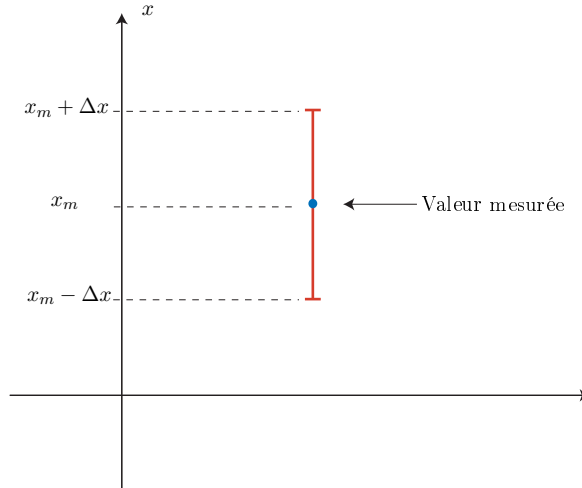
Exemple : Un étudiant mesure la longueur d'une table. Il trouve comme meilleur résultats $L_m = 110$ mm avec un intervalle probable allant de 108 mm à 112 mm. Exprimer ce résultat sous la forme standard.

Réponse : La longueur de la table est :

$$L = 110 \pm 2 \text{ mm}$$

✓ **Représentation graphique d'un résultat :**

Sur un graphe, on représente l'incertitude par une barre, appelée *barre-d'erreur*, dont la longueur est $2\Delta x$:

**1.1.4 Incertitude relative**

Considérons la mesure d'une grandeur x :

$$x = x_m \pm \Delta x$$

L'incertitude absolue Δx indique la précision de la mesure en relation avec la taille de x_m . Pour donner plus de sens à l'incertitude indépendamment de l'ordre de grandeur de x_m , on définit l'*incertitude relative* (ou la précision) :

$$\text{Incertitude relative} = 100 \frac{\Delta x}{x_m}$$

exprimée en pourcentage (%) avec 1 ou 2 chiffres significatifs.

La mesure exprimée avec l'incertitude relative s'écrit avec les unités après la mesure, par exemple : $L = 17 \text{ cm} \pm 3 \%$.

Par exemple, lorsqu'on dit qu'une incertitude sur une mesure d'une longueur L vaut $\Delta L = 2 \text{ cm}$, alors :

- si $L_m = 200 \text{ km}$ (distance entre deux villes par exemple), cette mesure est très précise : l'incertitude relative est $\frac{\Delta L}{L_m} = 10^{-7}$ ou 0,00001%
- par contre, si $L_m = 4 \text{ cm}$, la mesure est mauvaise : l'incertitude relative est $\frac{\Delta L}{L_m} = 0,5$ ou 50 %!

En générale :

- Une incertitude relative de 10 % caractérisent une mesure assez grossière (précision moyenne).
- Une incertitude relative de 1 % ou 2 % traduit une bonne mesure (bonne précision).

1.2 Présentation du résultat d'une mesure**1.2.1 Chiffres significatifs**

✓ Lorsqu'on écrit le résultat d'une mesure, on doit porter une grande attention au nombre de chiffres qui apparaissent dans le résultat numérique. Ces chiffres sont dites chiffres significatifs (**c.s**).

Les chiffres significatifs d'une mesure sont les *chiffres certains* et le *premier chiffre incertain*.

✓ Les chiffres significatifs nous renseignent sur la *précision de la mesure*.

Par exemple, lorsqu'on écrit un résultat de mesure comme : $x = 1258$, il y a quatre chiffres significatif. Le premier chiffre incertain est le 8.

Lorsqu'on présente le résultat final d'une mesure sous la forme $x_m \pm \Delta x$, on doit respecter le nombre de chiffres significatifs.

1.2.2 Règles des chiffres significatifs

Dans un nombre décimal, tous les chiffres écrits sont significatifs sauf les zéros à gauche

Exemples :

- 17,3 a 3 chiffres significatifs (la virgule n'intervient pas).
- 0,0020 a 2 chiffres significatifs.
- 7,100 a 4 chiffres significatifs.

En notation scientifique, les chiffres de la puissance de 10 ne sont pas significatifs.

Exemples : $1,33 \times 10^6$ a 3 chiffres significatifs.

Les zéro à droite dans un nombre **entier** ne sont pas significatifs (sauf s'il y a une indication qu'ils ont été mesurés)

Exemple :

$x = 300$ (sans indication) contient un seul chiffre significatif. Pour préciser que x contient plus qu'un chiffre significatif, on utilise à la notation scientifique :

- si on veut écrire x avec trois chiffres significatifs : $x = 3,00 \times 10^2$ (les deux zéros sont issus de la mesure)
- si on veut écrire x avec deux chiffres significatifs : $x = 3,0 \times 10^2$

Les nombres exacts sont considérés comme ayant un nombre infini de chiffres significatifs (incertitude = 0).

Ces nombres sont obtenus par exemple par comptage ou sont des constantes mathématiques,...

Exemple : Par comptage : $n = 33$ étudiants ($\Delta n = 0$)

1.2.3 Arrondir un nombre

Pour changer le nombre de chiffres significatifs dans un résultats, on procède à un arrondissement à fin de garder le *bon nombre de chiffres significatifs*.

L'arrondissement d'un nombre consiste à diminuer le nombre de chiffres qui y figurent.

Exemple :

On veut arrondir le chiffre 25,46X... par exemple, ou X représente un chiffre quelconque.

- si $X < 5$ (par exemple 25,462) : le nombre est arrondi à 25,46
- si $X > 5$ (par exemple 25,468) : le nombre est arrondi à 25,47.

Pour un chiffre qui se termine par 5 comme 15,Y5 par exemple :

- si Y est pair : le nombre est arrondi à 15,Y. Exemple : 12,45 \rightarrow 12,4
- si Y est impaire : le nombre est arrondi en augmentant d'une unité le chiffre Y. Exemple : 4,75 \rightarrow 4,8.
- si le chiffre cinq lui-même suivi par des chiffres différents de zéro (15,Y5...), alors Y sera augmenté d'une unité. Exemple : 4,752 \rightarrow 4,8.

Cette méthode est parfois appelée "arrondi au chiffre pair" et est employée afin d'éliminer le biais qui surviendrait en arrondissant à chaque fois par excès les nombres dont le dernier chiffre est cinq.

Exemples :

- 158,45 peut être arrondi à 4 chiffres 158,4 ou à 3 chiffres 158 ...

1.2.4 Résultat d'un calcul

1.2.4.1 Multiplication et division

Le résultat d'une multiplication ou d'une division a autant de chiffres significatifs que le nombre qui en a le moins dans l'opération.

Exemple :

- $2,6 \times \underline{\underline{3}} = 7,8 \rightarrow$ Arrondir le résultat à : $\underline{\underline{8}} \rightarrow$ un seul chiffre significatif.

1.2.4.2 Addition et soustraction

Pour l'addition et la soustraction, il faut arrondir le résultat pour qu'elle ait le même nombre de **décimales** que le nombre ayant le moins de décimales dans l'opération.

Exemple :

- $17,26 + \underline{\underline{4,6}} = 21,86 \rightarrow$ Arrondir le résultat à : $21,\underline{\underline{9}} \rightarrow$ un seul chiffre après la virgule.

Remarque : Dans le cas d'un calcul compliqué on applique la règle 1.

1.2.5 Présentation des résultats

Lorsqu'on présente le résultat d'une mesure on doit respecter les deux règles suivantes :

Les incertitudes expérimentales doivent être arrondies avec *un seul chiffre significatif*.

Le dernier chiffre significatif de tout résultat doit être du même ordre de grandeur (à la même position décimale) que l'incertitude.

Exemple :

La mesure d'une tension donne $v_m = 5,461$ V et l'incertitude sur la mesure est $\Delta v = 0,03468$ V. Cette incertitude doit être arrondie à $\Delta v = 0,03$ V alors :

$$v = 5,46 \pm 0,03 \text{ V}$$

Remarque 1 : Si le premier chiffre significatif de l'incertitude est 1 il s'avère préférable de conserver deux chiffres significatifs dans l'incertitude. Exemple $\Delta x = 0,14$, si on arrondi à $\Delta x = 0,1$ on réduit fortement l'intervalle d'incertitude!

Remarque 2 : Ces deux règles sont applicables pour le résultat **final** et *non pas pour les calculs intermédiaires* ou on doit garder au moins un chiffre significatif supplémentaire.

1.2.6 Comparaison entre les mesures physiques

La mesure d'une grandeur sans tirer une conclusion a peu d'intérêt. Souvent on compare la valeur mesurée à une autre valeur (mesurée ou acceptée) afin de conclure sur la qualité de la mesure.

Lorsque deux mesures d'une même grandeur diffèrent, on dit qu'il y a désaccord :

Le désaccord = Différence entre deux mesures d'une même grandeur.

Si le désaccord est inférieur ou de l'ordre de l'incertitude, on admet que les deux valeurs sont proches, sinon, elle ne le sont pas.

Exemple :

On a mesuré la même intensité de courant par deux méthodes :

$$- I_1 = 10 \pm 1 \text{ A} \quad \rightarrow \quad 9\text{A} < I_1 < 11\text{A}$$

$$- I_2 = 15 \pm 2 \text{ A} \quad \rightarrow \quad 13\text{A} < I_2 < 17\text{A}$$

Le désaccord est de 5 A. Il est significatif car aucune valeur n'est simultanément dans les deux intervalles. Donc, une des deux mesure s'avère incorrecte imposant une *vérification expérimentale*.

1.3 Calcul des incertitudes

1.3.1 Incertitudes type A

1.3.1.1 Présentation

Cette méthode est basée sur l'étude statistique des mesures.

Elle s'applique au cas des **erreurs aléatoires** et donne de très bonnes estimations des grandeurs physiques ainsi que leurs incertitudes.

Le principe de cette méthode est basé sur la **mesure répétée** d'une grandeur physique dans les mêmes conditions.

Soit, x_1, x_2, \dots, x_n les valeurs d'une même grandeur x , obtenues dans des conditions semblables.

✓ La meilleure estimation de la valeur de x est la **moyenne** de ces mesures :

$$\text{Meilleure estimation de } x = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

✓ L'incertitude moyenne sur **une mesure** x_i est l'**écart-type** obtenue à partir des n mesures x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\Delta x_i = \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Si on réalise, dans des mêmes conditions, une autre **mesure unique** x_{n+1} , l'incertitude serait $\Delta x_{n+1} = \sigma_x$ avec une probabilité (ou niveau de confiance) de 68 %¹.

✓ La meilleure estimation de *l'incertitude sur la moyenne* \bar{x} est :

$$\Delta \bar{x} = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

d'où la meilleur estimation de x :

$$x = \bar{x} \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

La probabilité (niveau de confiance) correspondante à cette incertitude est 68 (distribution gaussienne lorsque n est assez grand).

Remarque : Cette détermination est donc \sqrt{n} fois plus précise que celle obtenue à partir d'une mesure unique.

✓ L'incertitude élargie correspond à une probabilité plus grande que 68%. Elle est donnée par :

$$\Delta \bar{x} = k \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

avec (voir annexe pour la justification) :

- $k = 2$ pour un niveau de confiance de 95 %. C'est le plus utilisé en pratique.
- $k = 3$ pour un niveau de confiance de 99,7%.

1.3.1.2 Exemple : Analyse statistique d'une série de mesures

Huit étudiants mesurent la longueur d'onde λ de la raie verte du mercure en utilisant un spectromètre à réseau. Ils obtiennent les résultats suivants :

Numéro de l'étudiant	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda(\text{nm})$	538,2	554,3	545,7	552,3	566,4	537,9	549,2	540,3

En utilisant un logiciel de traitement des données (Excel,...) on trouve :

$$\bar{\lambda} = 548,04 \text{ nm} \quad \text{et} \quad \sigma_{\lambda} = 9,72 \text{ nm}$$

On en déduit que l'incertitude sur la moyenne des 8 mesures est :

$$\sigma_{\bar{\lambda}} = \frac{\sigma_{\lambda}}{\sqrt{8}} = 3,44 \text{ nm}$$

La meilleure estimation de λ est :

$$\lambda = 548 \pm 3 \text{ nm, avec un niveau de confiance de 68\%}$$

et avec une incertitude élargie (cas pratique)

$$\lambda = 548 \pm 7 \text{ nm avec un niveau de confiance de 95\%}$$

La valeur tabulée (mesurée avec précision) est $\lambda = 545,07 \text{ nm}$ est incluse dans l'intervalle d'incertitude de cette mesure. On conclue qu'il y a une bonne concordance.

1. Cette probabilité est déterminée par un calcul statistique dans le cas d'une distribution gaussienne.

1.3.2 Incertitude type B

1.3.2.1 Présentation

En plus de l'incertitude type A, l'incertitude peut aussi être déterminée à partir d'informations obtenues à partir de :

- information sur l'expérience ;
- certificat d'étalonnage ;
- notice du constructeur ;
- classe des instruments ;
- ...

Donc, dans le cas où l'on dispose d'une seule mesure, on évalue un écart-type à partir des données du constructeur de l'appareil de mesure et d'hypothèses sur la qualité de la lecture réalisée sur l'appareil.

✓ L'incertitude u (uncertainty), sur une mesure d'une grandeur x , résulte de la composition des incertitudes suivantes :

- u_l : incertitude due à la lecture sur l'instrument ;
- u_c : incertitude liée aux caractéristiques de l'appareil, donnée par le constructeur (précision, classe).
- u_a : autres incertitudes éventuellement disponibles (mises au point, parallaxe,...).

D'où :

$$u = \sqrt{u_l^2 + u_c^2 + u_a^2}$$

✓ L'incertitude **élargie** (avec un niveau de confiance 95%) :

$$\Delta x = 2u$$

✓ L'**incertitude-type** dépend de la **loi de distribution** des mesures données par l'instrument. En générale on utilise la loi rectangulaire (uniforme) ou la loi normale (gaussienne).

1.3.2.2 Incertitude-type liée à la résolution

Cette incertitude est liée à la **résolution** q de l'instrument (erreur de lecture) :

- si q est donnée par le constructeur (voir notice) alors ;

$$u_r = \frac{q}{\sqrt{3}}$$

- sinon, on prend " $q =$ **La moitié d'une unité** sur le *dernier chiffre significatif*" dans le cas d'un **instrument numérique**.

$$u_r = \frac{q}{\sqrt{3}} \quad (\text{loi uniforme})$$

- soit on prend " $q =$ **la moitié du plus petite division**" dans le cas d'un **instrument gradué** (oscilloscope, règle, thermomètre,...).

$$u_r = \frac{q}{3} \quad (\text{loi normale})$$

1.3.2.3 Incertitude-type liée à la précision

Cette incertitude est liée à la **précision** de l'instrument. Elle donnée par le constructeur (voit notice).

Pour un instrument numérique, elle est donnée :

- soit sous forme d'une **valeur** p .
- soit sous la forme d'une **formule**, par exemple :

$$p = 0,08\% x_{lue} + 3 \text{ UR}$$

où :

- x_{lue} la valeur lue sur l'affichage de l'appareil
- **UR** : Unité Représentative = $\frac{\text{Gamme}}{\text{Nombre de points}}$
- La "Gamme" et "Nombre de points" sont donnés par le constructeur.

La loi de probabilité considérée dans ce cas est la loi uniforme, donc l'**incertitude-type** liée à la précision est :

$$u_p = \frac{p}{\sqrt{3}}$$

1.3.2.4 Incertitude liée à la tolérance

Cette incertitude est liée l'erreur maximale tolérée de l'instrument (pipette, burette,).

Elle est donnée par le constructeur (selon la classe) sous forme : $\pm a$.

L'**incertitude-type** (précision) est :

$$u_t = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

1.3.2.5 Incertitude liée à une plage de mesure

Exemples : Erreur de mesure de la position par mise au point sur un banc d'optique. Dans ce cas on a

$$x_{\min} < x < x_{\max}$$

La loi de probabilité considérée dans ce cas est la loi uniforme. Donc l'**incertitude-type** est :

$$u = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2\sqrt{3}}$$

1.3.2.6 Cas d'un résultat indiqué "sans" incertitude

Lorsqu'un résultat est présenté sans indiquer l'incertitude, on considère que cette dernière est égale à la moitié du plus petit poids (c-à-d le poids du chiffre incertain qui est le dernier chiffre significatif).

$$u = \text{moitié du plus petit poids dans le résultat}$$

L'**incertitude-type** est :

$$u_t = \frac{u}{\sqrt{3}}$$

Exemples :

- $L = 1\underline{2}$ m : le poids le plus petit est celui des unités 1 (qui correspond au chiffre 2) alors $u = \Delta L = 0,5$ m.
- $m = 5,2\underline{4}$ kg : le poids le plus petit est celui des centièmes 0,01 (qui correspond au chiffre 4) alors $u = \Delta m = 0,005$ kg.

1.3.3 Mesure indirecte—Propagation des incertitudes

La plus part des grandeurs physiques ne sont pas accessibles par une mesure directe mais de manière indirecte en mesurant d'autres grandeurs. Par exemple, pour mesurer la surface S d'un rectangle, on mesure sa longueur L et sa largeur l puis on déduit : $S = Ll$.

On s'intéresse ici au problème suivant : on mesure les grandeurs expérimentales x, y, \dots avec les incertitudes $\Delta x, \Delta y, \dots$ (mesure unique), quelle est l'incertitude Δf sur la grandeur $f = f(x, y, \dots)$?

1.3.3.1 Formule générale de propagation des incertitudes

✓ Lorsque les incertitudes sur les grandeurs x et y, \dots sont *indépendantes* et *aléatoires* (cas général), la meilleure estimation de l'incertitude sur la grandeur $f(x, y, \dots)$ est donnée par la somme quadratique :

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \dots}$$

Remarque :

Δf est toujours majorée par :

$$\Delta f \leq \Delta f_{\max} = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \dots$$

Si on soupçonne que les incertitudes sont liées on prend $\Delta f = \Delta f_{\max}$.

1.3.3.2 Cas particuliers

Si $f = x/y$ ou $f = xy$ alors :

$$\frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

Si $f = x + y$ ou $f = x - y$ alors :

$$\Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

1.4 Applications

1.4.1 Exemple 1 : Mesure d'une tension par un voltmètre

On mesure une tension par un voltmètre numérique.

- Affichage numérique : $V = \dots$
- Incertitude de résolution (de lecture) : $q = \dots$
- Incertitude de précision (formule du constructeur) : $p = \dots$
- Incertitudes-type
 - $u_r = \frac{q}{\sqrt{3}} = \dots$ (loi uniforme)
 - $u_c = \frac{p}{\sqrt{3}} = \dots$ (loi uniforme)
- Incertitude-type :

$$u = \sqrt{u_r^2 + u_c^2} = \dots$$

- Incertitude élargie (avec un niveau de confiance de 95 %) :

$$U = 2u = \dots$$

- Résultat final :

$$V = \dots \pm \dots (\text{V})$$

1.4.2 Exemple 2 : Mesures avec la carte d'acquisition SP5-LatisPro

1.4.2.1 Mesure d'une tension

On va utiliser la méthode statistique.

- Régler le GBF pour sur une tension v continue de à 1 V.
- On utilisera Latis Pro avec un calibre +1/-1.
- Obtient-on une valeur unique de tension ? Comment l'expliquer ?
- Enregistrer la liste des valeurs de tension mesurées.
- Donner la valeur moyenne v et l'écart-type σ_v de la distribution de valeurs de v .
- Déterminer l'intervalle de confiance à 95%.
- Comparer avec la plage de mesure $a = \frac{v_{max} - v_{min}}{2}$.
- Résultat :

$$V = \dots \pm \dots \text{V}$$

Cette incertitude pourra être utilisée pour toute mesure ultérieure de la tension.

1.4.2.2 Incertitude sur une mesure mécanique

On va traiter un exemple simple de chute parabolique (la vidéo est disponible dans la bibliothèque de LatisPro)

1.4.2.2.1 Détermination des incertitudes

On va utiliser la méthode statistique.

- Ouvrir la vidéo est faire le paramétrage habituel (axes et étalon).
- Lancer l'acquisition et pointer le même point sur les images successives.
- Donner la valeur de l'écart-type σ_x de la distribution de valeurs de la position x (ou y).
- Donner alors l'incertitude élargie Δx sur une mesure la position.
- Donner une estimation de l'incertitude Δt sur le temps.

1.4.2.2 Détermination du champ de pesanteur

On va maintenant traiter la vidéo de chute parabolique pour déterminer la valeur du champ de pesanteur g .

- Ouvrir la vidéo est faire le paramétrage habituel (axes et étalon).
- Lancer l'acquisition et pointer la balle sur les images successives.
- Tracer les courbes de $x(t)$ et $y(t)$.
- Faire une modélisation. Introduire les incertitudes mesurées dans le paragraphe précédent.
- Déduire la valeur de g :

$$g = \dots \pm \dots \text{m.s}^{-2}$$

1.4.3 Exemple 3 : Mesure d'un temps avec un chronomètre

Exemple : Mesure de la période d'un pendule simple. Données du constructeur :

- Résolution : 1/100 s
 - Précision : 0,0006%
 - Affichage numérique : $T = \dots$
 - Incertitude de résolution : $q = \dots$
 - Incertitude de précision : $p = T * 0,0006/100 = \dots$
 - Incertitude aléatoire de l'opérateur lors du déclenchement et l'arrêt.
- On considère que $u_{op} \approx 0,1$ s (temps de réaction).

— Incertitudes-type

$$— u_r = \frac{q}{\sqrt{3}} = \dots$$

$$— u_c = \frac{p}{\sqrt{3}} = \dots$$

— L'incertitude-type sur T :

$$u = \sqrt{u_r^2 + u_c^2 + u_{op}^2} = \dots$$

— Incertitude élargie (avec un niveau de confiance de 95 %) :

$$U = 2u = \dots$$

— Résultat final :

$$T = \dots \pm \dots \text{s}$$

Chapitre 2

Capteurs en instrumentation

2.1 Introduction

Un capteur est un système qui permet la transformation d'une grandeur physique (le mesurande M) : température, pression, vitesse, accélération, déplacement, flux énergétique lumineux, ... en une grandeur électrique (S) : tension, courant, charge ou impédance. Il est caractérisé par sa fonction de transfert $F(M)$.

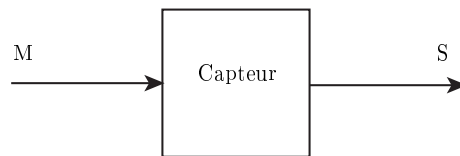


FIGURE 2.1 – Capteur

$$S = F(M)$$

La fonction F dépend du capteur (constitution, géométrie, température, alimentation,...) et peut être déterminée par étalonnage.

Il existe deux catégories de capteur, capteurs passifs et capteurs actifs.

2.1.1 Capteurs passifs

C'est une impédance dont l'un des paramètres caractéristiques est sensible au mesurande. En générale, l'impédance d'un capteur dépend de sa géométrie et de ses propriétés électriques (résistivité ρ , constante diélectrique ε , perméabilité magnétique μ ,...) et le mesurande agit sur l'un de ces paramètres.

Exemples :

- Le Platine : $\rho = \rho(T)$
- Un semiconducteur : $\rho = \rho(\text{flux optique})$
- Matériaux magnéto-résistant (Bismuth) : $\rho = \rho(\text{Position (aimant)})$
- Chlorure de lithium : $\rho = \rho(\text{Humidité})$
- Alliage ferromagnétique : $\mu = \mu(\text{Déformation})$

Pour mesurer l'impédance d'un capteur passif et ses variations, il faut l'introduire dans un circuit électrique que l'on appelle **conditionneur**¹ (Pont, montage potentiométrique, circuit oscillant).

1. Les performances de la chaîne de mesure (sensibilité, linéarité,...) dépendent du choix de l'association capteur-conditionneur.

2.1.2 Capteurs actifs

Ils fonctionnent comme un générateur en convertissant la forme d'énergie propre au mesurande (thermique, mécanique ou rayonnement) en énergie électrique. La conversion d'énergie par le capteur est toujours basé sur un phénomène physique :

2.1.2.1 Effet thermoélectrique

Un circuit formé de deux conducteurs C_1 et C_2 formant deux jonctions J_1 et J_2 à des températures T_1 et T_2 est le siège d'une f.é.m $e = e(T_1, T_2)$ (effet SEEBECK).

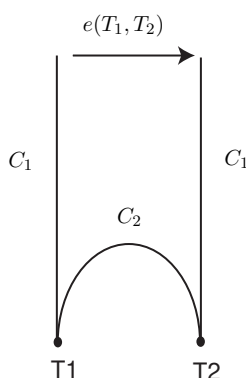


FIGURE 2.2 – Effet thermoélectrique.

Application : Mesure d'une température T_1 connaissant une autre température T_2 .²

2.1.2.2 Effet pyroélectrique

Un flux lumineux absorbé par un cristal pyroélectrique (comme le sulfate de triglycine) élève sa température ce qui entraîne une modification de sa polarisation³ qui est mesurable par un condensateur associé.

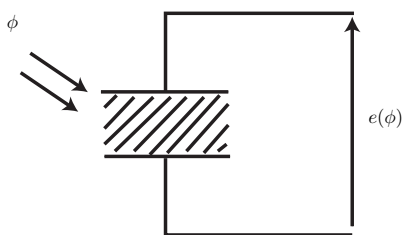


FIGURE 2.3 – Effet pyroélectrique.

Application : Mesure d'un flux lumineux.

2.1.2.3 Effet piézo-électrique

L'application d'une contrainte sur un matériau piézoélectrique (comme le quartz) entraîne une déformation qui suscite l'apparition de charges électriques sur les faces.

Application : Mesure d'une pression.

2. Cette température peut être réalisée par un mélange eau-glace, $t=0^\circ\text{C}$

3. Ces matériaux portent en surface des charges électriques proportionnelles à leur polarisation.

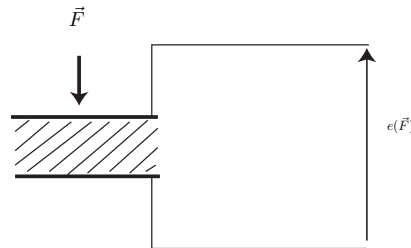


FIGURE 2.4 – Effet piézo-électrique.

2.1.2.4 Effet photoélectrique

C'est l'émission de charges électriques dans la matière sous l'influence d'un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde inférieure à un seuil.

2.1.2.5 Effet photoémissif

Les électrons libérés sont émis hors de la cible éclairée et forment un courant collecté par application d'un champ électrique.

2.1.2.6 Effet photovoltaïque

Des électrons et des trous sont libérés au voisinage d'une jonction de semi-conducteurs P et N illuminée ; leur déplacement dans le champ électrique de la jonction modifie la tension à ses bornes.

2.1.2.7 Effet photoélectromagnétique

L'application d'un champ magnétique perpendiculaire au rayonnement provoque dans le matériau éclairé l'apparition d'une tension électrique dans la direction normale au champ et au rayonnement.

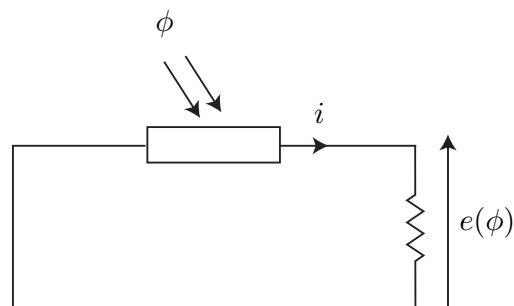


FIGURE 2.5 – Effet photoélectrique.

Applications : Mesure des grandeurs photométriques.⁴

4. Ils assurent d'autre part, la transposition en signal électrique des informations dont la lumière peut être le véhicule.

2.1.2.8 Effet Hall

Un matériau, généralement semi-conducteur et sous forme de plaquette, est parcouru par un courant I et soumis à une induction B faisant un angle θ avec le courant. Il apparaît, dans une direction perpendiculaire à l'induction et au courant une tension V_H qui a pour expression :

$$V_H = K_H I B \sin(\theta)$$

où K_H dépend du matériau et des dimensions de la plaquette.

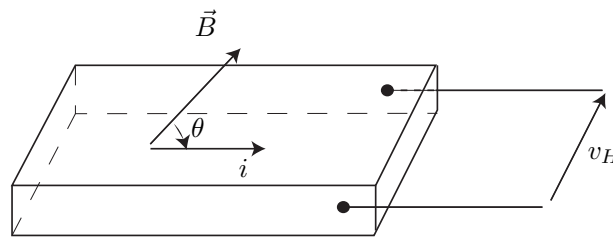


FIGURE 2.6 –

Application : Mesure d'un champ magnétique.⁵

2.2 Caractéristiques métrologiques

Pour classer les capteurs en fonction de leurs performances, on est amené à définir des paramètres qui permettent de les sélectionner en fonction de l'application.

2.2.1 Limites d'utilisation d'un capteur

Lorsque les niveaux des contraintes (mécanique, thermiques, électrique...) dépassent des seuils définis, la caractéristique du capteur change⁶.

Il faut donc utiliser le capteur sans dépasser les limites d'utilisation.

1. **Zone nominale d'emploi** : elle correspond aux conditions normales d'utilisation du capteur. Ses limites sont les valeurs extrêmes des grandeurs physique⁷ qu'on peut atteindre sans modification du fonctionnement du capteur
2. **Zone de non-détérioration** : dans cette zone, la caractéristique risque de changer mais de manière réversible, le capteur retrouve ses caractéristiques lorsque les conditions de fonctionnement redeviennent celles du domaine normal.
3. **Zone de non-destruction** : dans cette zone, les modifications des caractéristiques du capteur sont irréversibles. La réutilisation du capteur dans son domaine nominal nécessite donc un nouvel étalonnage. Elle définit alors les limites garantissant la non-destruction du capteur.

Exemple : Jauge piézorésistive N556-1 :

- Zone nominale d'emploi : $0^{\circ}C < t < 60^{\circ}C$
- Zone de non-détérioration : $-20^{\circ}C < t < 100^{\circ}C$
- Zone de non-destruction : $-50^{\circ}C < t < 120^{\circ}C$

5. Un aimant lié à l'objet dont on veut connaître la position détermine les valeurs de B et θ au niveau de la plaquette : la tension v qui par ce biais est fonction de la position de l'objet en assure donc une traduction électrique.

6. Le constructeur nous donne la caractéristique et les limites d'utilisation.

7. Ces grandeurs sont le mesurande, température environnante,...

2.2.2 Résolution

Elle correspond à la plus petite variation du mesurande que le capteur est susceptible de déceler.

2.2.3 Caractéristique d'entrée-sortie d'un capteur

Elle donne la relation d'évolution de la grandeur de sortie en fonction de la grandeur d'entrée. Elle est donnée classiquement par une courbe en régime permanent. Elle ne donne pas d'information sur les caractéristiques transitoires du capteur.

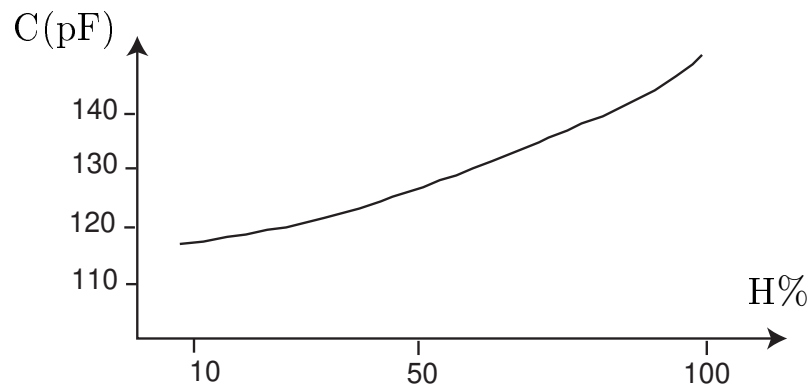


FIGURE 2.7 – Exemple de caractéristique d'un capteur d'humidité du type capacitif.

2.2.4 Sensibilité

Elle détermine l'évolution de la grandeur de sortie en fonction de la grandeur d'entrée en un point donné. C'est la pente de la tangente à la courbe, au point M_i , issue de la caractéristique du capteur.

$$s = \left(\frac{\Delta S}{\Delta M} \right)_{M=M_i} \quad (2.1)$$

Dans le cas d'un capteur linéaire, la sensibilité du capteur est constante.

La sensibilité est généralement donnée par le constructeur, son unité dépend du principe mis en jeu ; par exemple, pour une résistance thermique elle est exprimée en $\Omega/^\circ C$. Elle dépend du :

- matériau ;
- mode d'assemblage ;
- grandeurs d'influence (température du milieu, alimentation, fréquence du mesurande, ...), donc $s = s(M, g_i)$

⇒ La température est un paramètre important, la sensibilité doit être spécifiée :

- ★ à une température donnée ;
- ★ par son coefficient de variation thermique $\frac{1}{s} \frac{ds}{dT}$.

⇒ La fréquence du mesurande peut influencer sur la valeur de la sensibilité ; pour cela, on distingue :

- ◇ Le fonctionnement statique où le mesurande est constant ou varie très lentement.
- ◇ le fonctionnement dynamique (exemple : flux lumineux modulé, vibration,...)

2.2.4.0.1 Régime statique :

La sensibilité est égale à la pente de la courbe d'étalonnage au point de fonctionnement Q_0 .

$$s = \left[\frac{\Delta S}{\Delta M} \right]_{Q_0}$$

Lorsque la caractéristique n'est pas une droite, la sensibilité dépend du point de fonctionnement.

2.2.4.0.2 Régime dynamique :

Soit un mesurande qui est une fonction sinusoïdale du temps : $M(t) = M_0 + M_1 \cos(\omega t)$.

La réponse du capteur est de la forme : $S(t) = S_0 + S_1 \cos(\omega t + \psi)$.

Le point de repos $Q_0(M_0, S_0)$ appartient à la courbe d'étalonnage statique.

La sensibilité est alors :

$$s = \left(\frac{S_1}{M_1} \right)_{Q_0} \quad (2.2)$$

L'évolution de la sensibilité $S(f)$, en fonction de fréquence f , définit la réponse en fréquence du capteur.

La dépendance de s avec la fréquence est généralement due à l'inertie du capteur qui l'empêche de suivre instantanément les variations du mesurande.

Exemple : Réponse d'un système linéaire du premier ordre .

Un tel système est régi par une équation différentielle de la forme :

$$A \frac{dS}{dt} + BS = M(t)$$

A et B sont deux constante.

En régime sinusoïdal permanent on montre que : $s(f) = \frac{s(0)}{\sqrt{1+(\frac{f}{f_c})^2}}$.

La linéarité implique que $s(0)$ et f_c soient indépendants de la valeur du mesurande.

Remarque : Plus un capteur est sensible plus la mesure pourra être précise.

2.2.5 Finesse

C'est la qualité d'un capteur à ne pas venir modifier par sa présence la grandeur à mesurer. Cela permet d'évaluer l'influence du capteur sur la mesure. Finesse et sensibilité sont en général antagonistes. Il peut y avoir un compromis à faire.

Exemple 1 : Dans le cas d'une mesure thermique, on cherchera un capteur à faible capacité calorifique.

Exemple 2 : Pour un capteur d'induction \vec{B} , un capteur à forte perméabilité sera très sensible, par contre sa présence aura tendance à perturber les lignes de champ et la mesure de l'induction ne sera pas celle sans capteur, d'où une mauvaise finesse. Mais cette erreur peut être évaluée en vue d'une correction post-mesure et ainsi faire abstraction de la présence du capteur.

2.2.6 Linéarité

une zone de linéarité est une zone dans laquelle la sensibilité du capteur est indépendante de la valeur du mesurande.

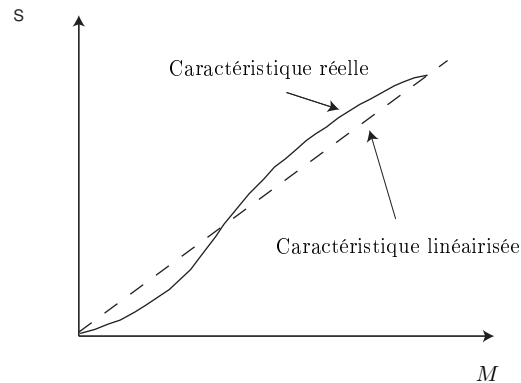


FIGURE 2.8 – Exemple de linéarisation de caractéristiques.

Cette zone peut être définie à partir de la définition d'une droite obtenue comme approchant au mieux la caractéristique réelle du capteur, par exemple par la méthode des moindres carrés.

On définit à partir de cette droite l'écart de linéarité qui exprime en entre la courbe réelle et la droite approchant la courbe.

2.2.7 Caractéristiques statistiques d'un capteur

Ces paramètres permettent de prendre en compte la notion d'erreurs accidentelles qui peuvent survenir sur un capteur.

Rappel : soit n mesures effectuées sur un mesurande, on définit à partir de ces n mesures :

- la valeur moyenne :

$$\langle m \rangle = \frac{\sum m_i}{n}$$

- l'écart type (dispersion des résultats autour de la valeur moyenne) :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (m_i - \langle m \rangle)^2}{n - 1}}$$

2.2.7.1 Fidélité

Elle définit la qualité d'un capteur à délivrer une mesure répétitive sans erreurs. L'erreur de fidélité correspond à l'écart type obtenu sur une série de mesures correspondant à un mesurande constant. Les erreurs accidentelles sont faibles (faible écart type).

2.2.7.2 Justesse

C'est l'aptitude d'un capteur à délivrer une réponse proche de la valeur vraie et ceci indépendamment de la notion de fidélité. Elle est liée à la valeur moyenne obtenue sur un grand nombre de mesures par rapport à la valeur réelle. Les erreurs systématiques sont réduites.

2.2.7.3 Précision

Elle définit l'écart que l'on peut obtenir entre la valeur réelle et la valeur obtenue en sortie du capteur. Ainsi un capteur précis aura à la fois une bonne fidélité et une bonne justesse.

La précision p est généralement exprimée en pourcentage :

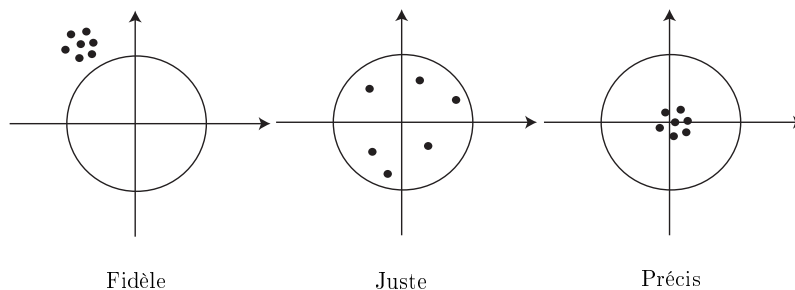


FIGURE 2.9 – Caractéristiques statistiques d'un capteur.

$$p = \frac{\Delta M}{M} \%$$

2.2.8 Temps caractéristiques

Un capteur est d'autant plus rapide que sa sortie suit dans le temps les variations du mesurande. Il est caractérisé par trois intervalle de temps : t_r , t_d et t_m

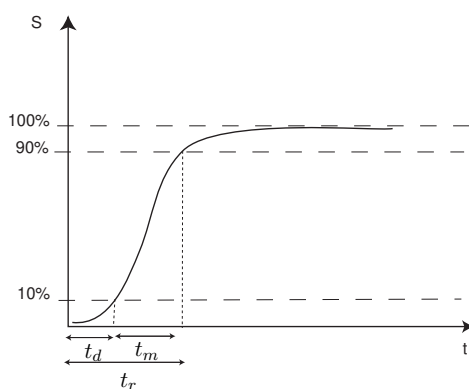


FIGURE 2.10 – Les divers intervalles de temps caractéristiques du régime transitoire.

- t_r est le temps de réponse à 10 % ;
- t_d est le temps de retard ;
- t_m est le temps de montée.

Exemple : Réponse à un échelon d'un système du premier ordre :

$$S = S_0 [1 - \exp(-\frac{t}{\tau})]$$

où τ est la constante de temps.

Le temps de réponse à $\varepsilon\%$ est :

$$t_r(\varepsilon\%) = -\tau \ln(\varepsilon/100)$$

2.2.9 Étalonage du capteur

L'étalonnage permet d'ajuster et de déterminer, sous forme graphique ou algébrique, la relation entre le mesurande et la grandeur électrique de sortie. Très souvent l'étalonnage n'est valable que pour une seule situation d'utilisation du capteur.

2.2.9.1 Étalonage simple

Il s'applique à un mesurande (statique) défini par une grandeur physique unique et à un capteur non sensible (ou non soumis) aux grandeurs d'influence.

Exemple : Capteur de température (thermocouple, thermomètre, résistance de platine, ...).

- Étalonage absolu : Par les points fixes de l'eau ;
- Étalonage par comparaison avec un autre capteur dont on possède les caractéristiques (courbe d'étalonnage ou équation caractéristique). Les deux capteurs sont soumis dans les mêmes conditions à l'action du mesurande.

2.2.9.2 Étalonage multiple

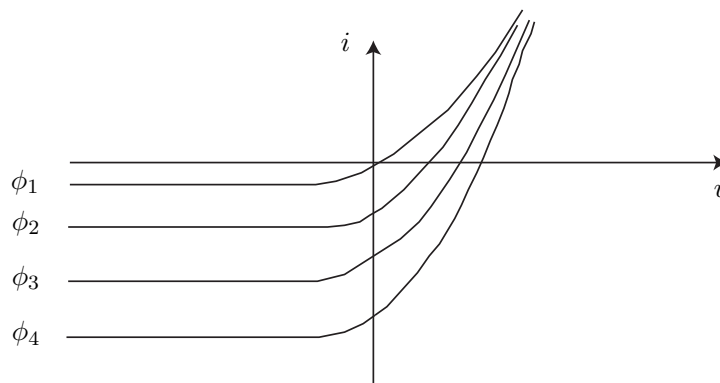


FIGURE 2.11 – Réseau de caractéristiques d'une photodiode.

Il s'applique à un capteur dont la réponse dépend de plusieurs paramètres.

Exemple : Phototransistor : La grandeur de sortie est le courant collecteur I_c , elle dépend du flux de rayonnement (ϕ), de la longueur d'onde λ , de l'angle d'incidence sur la surface éclairée, de la tension v_{ce} et de la résistance de charge R_c . Pour chacun de ces paramètres, on doit disposer de l'étalonnage correspondant.

Remarque : En général, le capteur se trouve soumis à d'autres grandeurs physiques "parasites" g_i (grandeurs d'influence) auxquelles la réponse du capteur peut être sensible, donc S devient $S = F(M, g_1, g_2, \dots)$.

2.3 Conditionneur des capteurs

Le conditionnement de la mesure consiste à rendre exploitable la mesure issue du capteur. L'association capteur-conditionneur détermine le signal électrique et ses caractéristiques.

2.3.1 Conditionneur des capteurs actifs

Le capteur actif se comporte comme une source (de tension, de courant ou de charge).

2.3.1.1 Capteur source de tension

On peut adopter le modèle suivant pour la sortie du capteur auquel on vient connecter une impédance correspondant à l'impédance d'entrée du conditionneur.

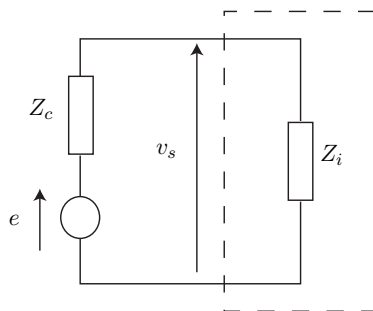


FIGURE 2.12 – Modèle du capteur source de tension.

On utilisera des dispositifs à forte impédance d'entrée de manière à obtenir une tension en sortie du conditionneur aussi proche que la tension en sortie du capteur.

On a :

$$v_s = \frac{Z_i}{Z_i + Z_c} e$$

et si :

$$Z_i \gg Z_c$$

alors

$$v_s \simeq e$$

On pourra utiliser un montage suiveur (inverseur ou non), ou un amplificateur différentiel plus classiquement appelé amplificateur d'instrumentation.

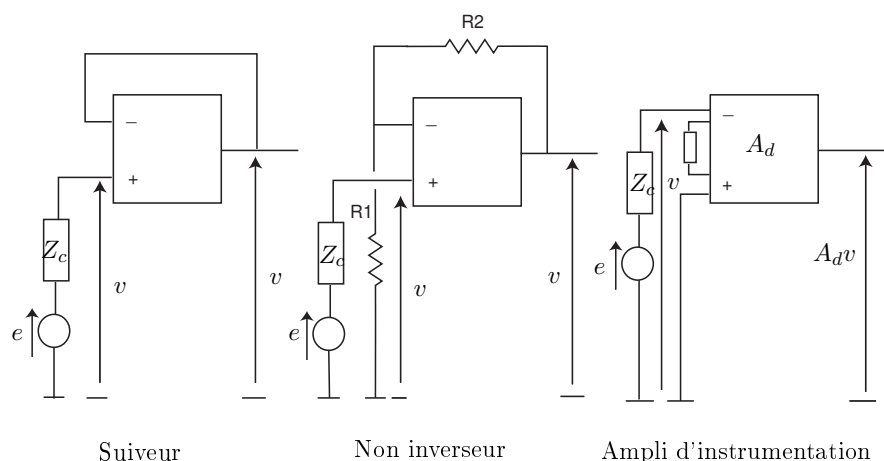


FIGURE 2.13 – Exemples de conditionneur.

2.3.1.2 Capteur source de courant

Dans ce cas, le capteur peut se modéliser par une source de courant avec une impédance en parallèle.

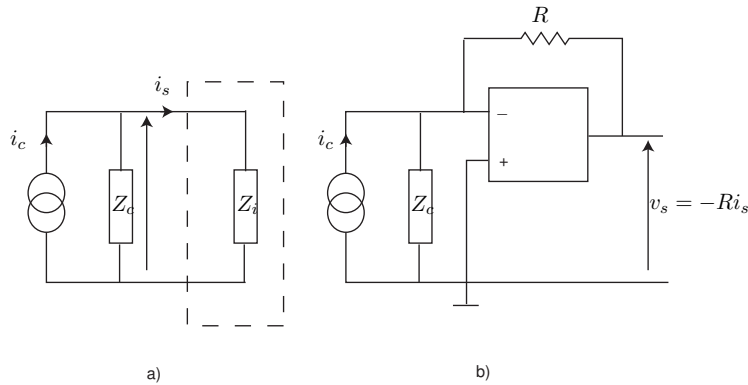


FIGURE 2.14 – a) Modèle du capteur type source de courant. b) convertisseur courant-tension.

Nous avons :

$$Z_c(i_c - i_s) = Z_i i_s$$

soit :

$$i_s = \frac{Z_c}{Z_i + Z_c} i_c$$

et si :

$$Z_i \ll Z_c$$

alors :

$$i_c \simeq i_s$$

On fait appel dans ce cas à un convertisseur courant-tension de manière à obtenir une tension proportionnelle au courant de sortie du capteur.

2.3.1.3 Capteur source de charge

Ce type de capteur, en tant que générateur, présente une impédance interne capacitive. C'est le cas d'un cristal piézo-électrique par exemple. Il faut faire attention dans le cas où l'on vient brancher une impédance équivalente résistive à ses bornes. Cette résistance peut engendrer une décharge trop rapide de la capacité empêchant toute mesure. Dans ce cas, il est préférable d'utiliser un amplificateur de charge.

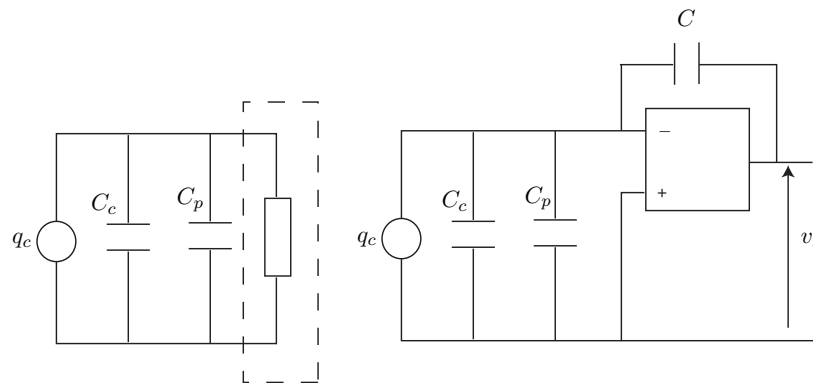


FIGURE 2.15 – Modèle du capteur type source de charge & amplificateur de charge.

La capacité C_p représente les parasites et les connexions.

La tension de sortie est :

$$v_s = -\frac{1}{C}q_c(M)$$

2.3.2 Conditionneurs des capteurs passifs : Montage potentiométrique

Pour traduire les variations de l'impédance Z_c d'un capteur passif sous forme d'une tension elle doit être introduite dans un circuit électrique. Ce circuit s'appelle **conditionneur du capteur passif**.

La variation du mesurande ΔM entraîne une variation de l'impédance ΔZ_c qui se traduit par une variation soit de l'amplitude de la tension entre ses bornes soit de sa fréquence.

2.3.2.1 Mesure des résistances par montage potentiométrique

On a :

$$\begin{aligned} v_s &= \frac{R_c \parallel R_a}{R_c \parallel R_a + R_1 + r} \\ &= \frac{R_c R_a}{R_c R_a + (R_c + R_a)(R_1 + r)} \end{aligned}$$

soit :

$$v_s = \frac{R_c R_a}{R_c(r + R_1) + R_a(r + R_1 + R_c)}$$

et si $R_a \gg R_c$ alors :

$$v_s = E \frac{R_c}{R_c + r + R_1} \tag{2.3}$$

v_s n'est pas une fonction linéaire de R_c .

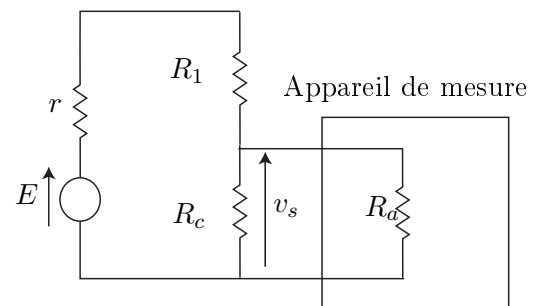
2.3.2.1.1 Calcul de la tension de déséquilibre :

Considérons des petites variations ΔR_c de la résistance du capteur R_c autour d'une valeur R_{c0} :
L'équation (2.3) donne :

$$\frac{dv_s}{dR_c} = E \frac{R_1 + r}{(R_c + R_1 + r)^2}$$

Si La résistance du capteur varie de R_{c0} à $R_{c0} + \Delta R_c$ ($\Delta R_c \ll R_{c0}$) la tension de sortie varie de v_{s0} à $v_{s0} + \Delta v_s$ telle que :

$$\Delta v_s = E \frac{R_1 + r}{(R_{c0} + R_1 + r)^2} \Delta R_c$$



La sensibilité du conditionneur $\frac{\Delta v_s}{\Delta R_c}$ est maximale pour $R_{c0} = R_1 + r \simeq R_1$; dans ce cas :

$$\Delta v_s = \frac{E}{4R_1} \Delta R_c \quad (2.4)$$

Les variations de R_c sont donc proportionnelles à celles de v_s . Ce qui simplifie la mesure du mesurande.

2.3.2.2 Utilisation d'une source de courant

On peut aussi utiliser une source de courant comme le montre le schéma suivant :

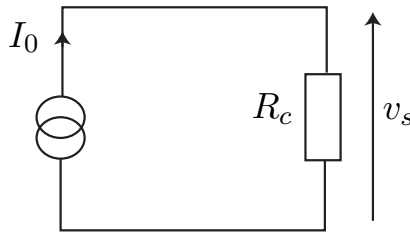


FIGURE 2.16 – Source de courant.

On a :

$$v_s = I_0 R_c$$

où I_0 est constant.

D'où :

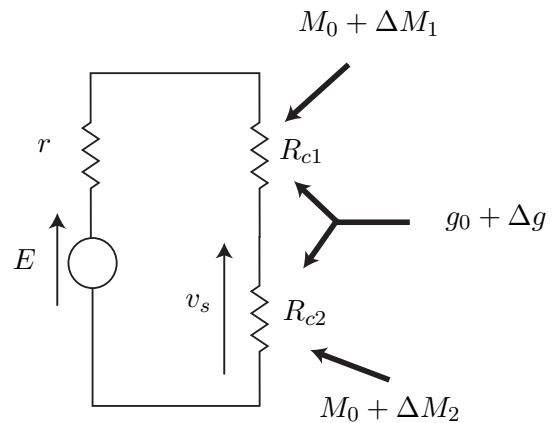
$$\Delta v_s = I_0 \Delta R_c \quad (2.5)$$

2.3.2.3 Montage push-pull

On peut utiliser deux résistances R_{c1} et R_{c2} sont identiques mais leurs variations sont de signe contraire : $R_{c1} = R_{c0} - \Delta R_c$ et $R_{c2} = R_{c0} + \Delta R_c$ (Exemple : deux jauges identiques subissant des déformations de de signe contraire).

Lorsque $R_{c1} = R_{c2} = R_{c0}$ on a :

$$\begin{aligned} v_{s0} &= \frac{R_{c2}}{R_{c2} + R_{c1} + r} E \\ &= \frac{R_{c0}}{2R_{c0} + r} E \end{aligned}$$



si la résistance R_{c2} varie de ΔR_c , la tension v_s varie de Δv_s telle que :

$$v_{s0} + \Delta v_s = E \frac{R_{c0} + \Delta R_c}{R_{c0} + \Delta R_c + R_{c0} - \Delta R_c + r}$$

Soit :

$$\Delta v_s = E \frac{\Delta R_c}{2R_{c0} + r} \quad (2.6)$$

2.3.2.4 Mesure des impédances complexes

Le capteur est capacitif (détecteur de niveau par exemple) ou inductif (détecteur de position). On utilise alors une source d'alimentation sinusoïdale associée à pont diviseur.

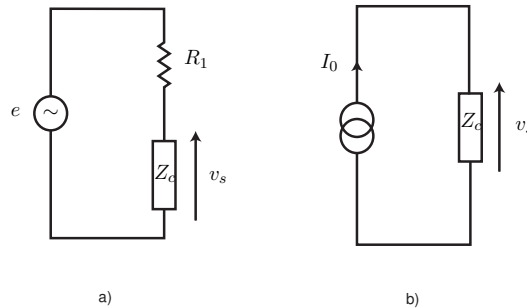


FIGURE 2.17 – Montage en pont dans le cas d'impédances complexes.

Nous avons (Fig. a) :

$$v_s = e \frac{Z_{c0}}{Z_{c0} + R_1}$$

si Z_c varie de ΔZ_c alors :

$$v_s + \Delta v_s = e \frac{Z_{c0} + \Delta Z_c}{Z_{c0} + \Delta Z_c + R_1}$$

soit :

$$\begin{aligned} \Delta v_s &= e \left\{ \frac{Z_{c0} + \Delta Z_c}{Z_{c0} + \Delta Z_c + R_1} - \frac{Z_{c0}}{Z_{c0} + R_1} \right\} \\ &= e \frac{R_1}{(R_1 + Z_{c0})^2} \frac{1}{1 + \frac{\Delta Z_c}{R_1 + Z_{c0}}} \end{aligned}$$

et si $R_1 \gg |Z_c|$, on obtient pour les petites variations :

$$\Delta v_s = \frac{e}{R_1} \Delta Z_c$$

Z_c est alimentée par une source de courant $\frac{e}{R_1}$

De même en utilisant une source de courant $I_0 = constante$ (Fig b), on obtient :

$$\Delta v_s = I_0 \cdot \Delta Z_c$$

2.3.2.5 Inconvénient de cette méthode potentiométrique

Ce montage est sensible aux dérives et aux parasites.

2.3.2.5.1 a-Cas d'une alimentation non-symétrique (Fig.a) :

Si la tension de la source E subit une variation ΔE ($E = E_0 + \Delta E$), la variation Δv_s est, au second ordre près :

$$\Delta v_s = E \frac{R_1 + r}{(R_{c0} + R_1 + r)^2} \Delta R_c + \frac{R_{c0}}{R_{c0} + R_1 + r} \Delta E$$

Dans ce cas il est difficile -à priori- de déduire les variations de R_c à partir de celles de v_s .

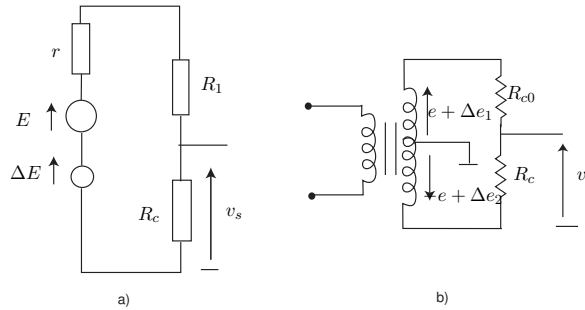


FIGURE 2.18 – Influence des dérives de la source.

2.3.2.5.2 b-Cas d’une alimentation symétrique (Fig.b) :

On a :

$$v_s = \frac{R_c}{R_1 + R_c}(e_1 + e_2)$$

$$\Delta V_s = e/2 \frac{\Delta R_c}{R_{c0}} + \frac{\Delta e_1 + \Delta e_2}{2}$$

Sauf si $\Delta e_1 + \Delta e_2 = 0$, il est difficile d’avoir les variations de la résistance du capteur.

2.3.2.6 Elimination de la composante continue

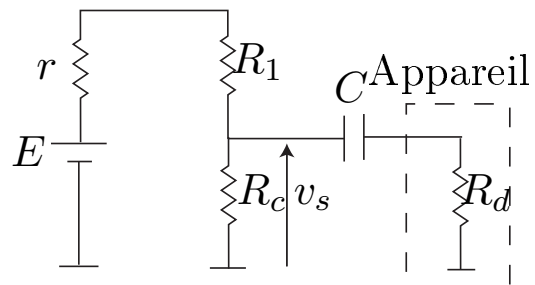
Dans certains cas, la composante continue risque de rendre la mesure des variations (porteuses d’information) imprécise (Ex : $100 \pm 0,01$ V!!).

On peut utiliser un filtre passe haut pour ne garder que la partie variable de la tension de sortie.

La fréquence de coupure est :

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_d C}$$

elle doit être inférieure à la fréquence la plus basse du phénomène étudié.



2.3.3 Conditionneurs des capteurs passifs : Les ponts

Le pont permet de réaliser une mesure différentielle ce qui minimise les effets du bruit et des dérives de la source.

2.3.3.1 Capteur résistif

Pour calculer le résistance d'un capteur résistif on peut utiliser le pont de WHEATSTONE .

On a :

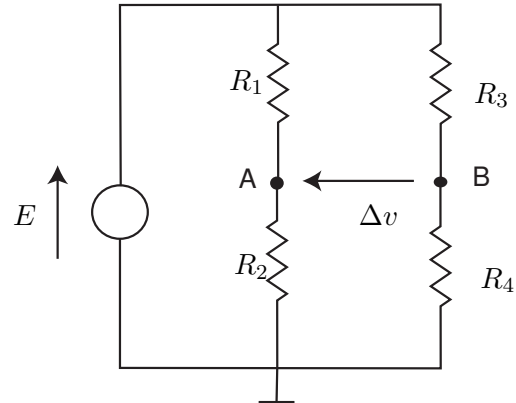
$$v_a = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

et

$$v_b = E \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

la tension entre les deux point A et B est :

$$\Delta v = v_a - v_b = E \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$



La condition d'équilibre du pont est $\Delta v = 0$ soit : $R_2 R_3 = R_1 R_4$

Le pont étant équivalent à un double potentiomètre, donc la sensibilité du montage est maximale à l'équilibre si $R_1 = R_2$ et $R_3 = R_4$. Pour simplifier les calculs on va prendre $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_0$.

Si, par exemple, la résistance R_2 varie de ΔR (cas d'un capteur résistif), la tension de déséquilibre est :

$$\Delta v = \frac{E}{4R_0} \frac{\Delta R}{1 + \frac{\Delta R}{2R_0}}$$

La tension de déséquilibre n'est pas une fonction linéaire des variations de la résistance du capteur résistif, d'où la nécessité d'une linéarisation de cette équation.

Remarque : Si on utilise une source de courant (I_0, R_s) telle que $R_s \gg R_i$, on montre que :

$$\Delta v = \frac{I_0}{4} \frac{\Delta R}{1 + \frac{\Delta R}{4R_0}}$$

Donc l'utilisation d'une source de courant permet de réduire la non-linéarité du pont (absence du terme R_0).

2.3.3.2 Linéarisation

1. Petits signaux :

Si on travaille avec des petits signaux, les variations de la résistance du capteur seront très faibles par rapport à la valeur de la résistance à l'équilibre ($\Delta R \ll R_0$), donc l'équation précédente devient :

$$\Delta v = \frac{E}{4R_0} \Delta R$$

Donc la tension de déséquilibres est proportionnelle aux variations de la résistance du capteur. si en plus ce capteur est linéaire, on peut déduire facilement les variations de la grandeur mesurée.

2. Montage Push-Pull :

Une autre solution consiste à utiliser deux capteurs **linéaires** contigües R_1 et R_2 identiques mais les variations de leurs résistances sont opposées ($\Delta R_1 = -\Delta R_2$ et $\Delta R_3 = \Delta R_4 = 0$). Dans ce cas on

aura :

$$\Delta v = E \frac{R_0(R_0 + \Delta R_2) - R_0(R_0 - \Delta R_1)}{(2R_0 + \Delta R_1 + \Delta R_2)2R_0}$$

soit :

$$\Delta v = \frac{E \Delta R_2}{2 R_0}$$

Si les capteurs ne sont pas linéaires, des variations égales du mesurande ne provoquent pas des variations égales et opposées des leurs résistances.

3. Rapport potentiométrique :

Une autre façon de réduire la non-linéarité consiste à prendre des résistances telles que à l'équilibre on a : $R_1 = R_3 = NR_0$ et $R_2 = R_4 = NR_0$.

Si la résistance du capteur R_2 varie de ΔR_2 alors :

$$\Delta v = \frac{N}{(N+1)^2} E \frac{\Delta R_2}{R_0} \frac{1}{1 + \frac{\Delta R_2}{(N+1)R_0}}$$

On voit que le terme de la non-linéarité est réduit dans le rapport $\frac{N+1}{2}$, mais la sensibilité est réduite dans le rapport $\frac{(N+1)^2}{4N}$

4. Réaction sur la tension du déséquilibre du pont :

On place le capteur dans la boucle d réaction d'un amplificateur avec $R_1 = R_3 = R_4 = R_{c0}$

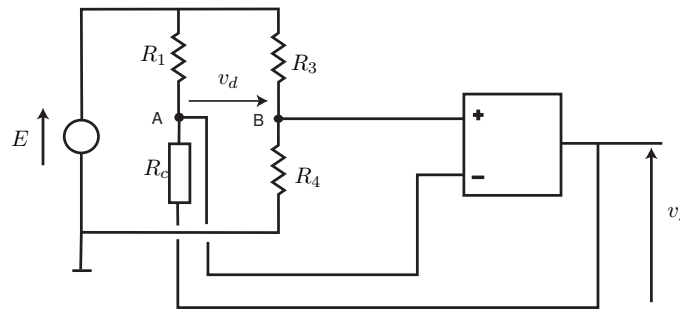


FIGURE 2.19 – Linéarisation du pont de WHEATSTONE.

(2.7)

Si la résistance du capteur varie de R_{c0} à $R_{c0} + \Delta R_c$, la tension de déséquilibre est :

$$v_d = v_B - v_A$$

$$\text{Avec : } v_B = E/2, v_A = \frac{R_c}{R_1 + R_c} E + \frac{R_1}{R_1 + R_c} \cdot v_s$$

L'amplificateur étant supposé idéal, la réaction négative maintient $v_A = v_B$, d'où :

$$v_s = -E/2 \frac{\Delta R_c}{R_{c0}} \quad (2.8)$$

La tension mesurée v_s est proportionnelle aux variations de la résistance.

Remarque : Dans ce montage le capteur doit être isolé de la masse, ce qui est généralement impossible à réaliser lors de l'installation du capteur.

5. Utilisation d'un multiplieur

Considérons un capteur résistif avec pour conditionneur un pont.

Le montage suivant permet de linéariser ce système. À la sortie du multiplieur

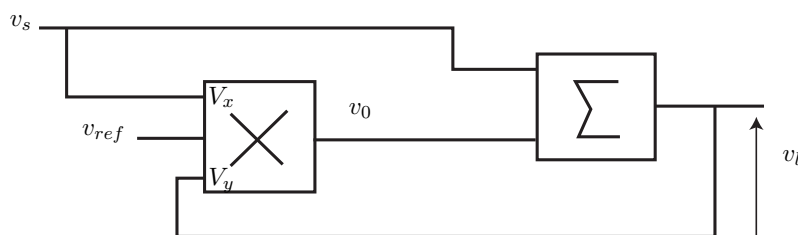


FIGURE 2.20 – Linéarisation du pont de WEATSTONE.

$$v_0 = v_s \cdot v_l / v_{ref}$$

et à la sortie du sommateur on a, g_1 et g_2 étant les gains sur les deux voie d'entrée du :

$$v_l = g_1 v_s + g_2 v_0$$

soit :

$$v_l = \frac{g_1 v_s}{1 - g_2 v_s / v_{ref}}$$

la tension de sortie est :

$$v_s = \Delta v = E \frac{\Delta R_c}{4R_{c0}} \frac{1}{1 + \frac{\Delta R_c}{2R_{c0}}}$$

elle n'est pas fonction linéaire de ΔR_c .

en remplaçant v_s par son expression on obtient :

$$v_l = g_1 E \frac{\Delta R_c}{4R_{c0}} \frac{1}{1 + \frac{\Delta R_c}{2R_{c0}} (1 - g_2 E / 2v_{ref})}$$

Si on choisit $g_2 = 2v_{ref}/E$, on obtient :

$$v_l = g_1 E \frac{\Delta R_c}{4R_{c0}} \quad (2.9)$$

La tension v_l est fonction linéaire de ΔR_c

2.3.3.3 Réduction de l'effet des grandeurs d'influence

Soit un pont équilibré tel que $R_i = R_0$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Si chaque résistance R_i varie de ΔR_i telle que ($\Delta R_i \ll R_i$: petits signaux), on a au seconde ordre près :

$$\Delta v = \frac{E}{4} \frac{\Delta R_2 - \Delta R_1 + \Delta R_3 - \Delta R_4}{R_0}$$

Si les variations ΔR_i des résistances de deux branches contigües sont égales ($\Delta R_2 = \Delta R_1$ et $\Delta R_3 = \Delta R_4$), le pont n'est pas déséquilibré ; on utilise cette propriété pour réduire l'effet des grandeurs d'influence sur les capteurs résistifs.

Exemple : Si R_1 et R_2 sont deux capteurs identiques tels que :

- R_2 est soumis au mesurande et au grandeur d'influence $\Rightarrow \Delta R_2 = s_g \Delta g + s \Delta M$ (s_g : sensibilité à g , s : sensibilité au mesurande)
- R_1 est soumis seulement à la grandeur d'influence $\Rightarrow \Delta R_1 = s_g \Delta g$ (capteur de compensation)

Alors :

$$\Delta v = \frac{E}{4} \frac{s \Delta M}{R_0}$$

La tension de déséquilibre est indépendante des variations dues à la grandeur d'influence g .

2.3.3.4 Capteur capacitif

2.3.3.4.1 Rappel :

On modélise les pertes dans un dipôle par une résistance placée :

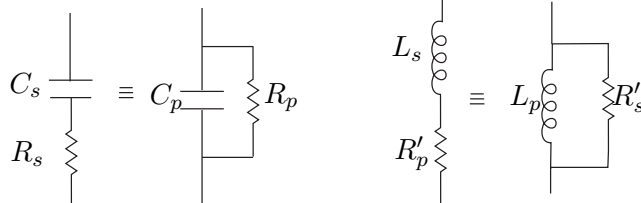
- en série avec la réactance si les pertes sont proportionnelles à I^2 (Ex : pertes ohmiques dans une bobine)
- en parallèle avec la réactance si les pertes sont proportionnelles à V^2 (Ex : pertes diélectriques dans un condensateur)

Les deux représentations sont formellement identiques.

$$R_p = R_s \left(1 + \frac{1}{\tan^2(\delta)}\right) \quad R'_p = R'_s (1 + Q^2)$$

$$C_p = C_s \left(\frac{1}{1 + \tan^2(\delta)}\right) \quad L_p = L_s \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)$$

$$\tan(\delta) = \frac{R_s C_s \omega}{1} = \frac{1}{R_p C_p \omega} \quad Q = \frac{L_s \omega}{R'_s} = \frac{R'_p}{L_p \omega}$$



Q est le facteur de surtension et δ est l'angle de perte.

2.3.3.4.2 Calcul de la tension de mesure Δv :

Pour calculer la capacité, d'un capteur capacitif, on peut utiliser le pont de NERNST dans lequel le capteur est remplacé par son modèle équivalent.

La condition d'équilibre du pont est : $Z_e R = Z_c N R$

$$\Rightarrow Z_e = Z_c N$$

$$\Rightarrow R_c = R_e / N \text{ et } C_c = N C_e$$

Si Z_e varie de ΔZ_e , la tension de déséquilibre est :

$$\Delta v = e \frac{N}{(N+1)^2} \frac{\Delta Z_c}{Z_{c0}} \frac{1}{1 + \frac{\Delta Z_c}{(N+1)Z_{c0}}}$$

Si $\Delta Z_c \ll Z_{c0}$, on aura au deuxième ordre près :

$$\Delta v = \frac{N}{(N+1)^2} E \frac{\Delta Z_c}{Z_{c0}}$$

La sensibilité du montage est :

$$s = \frac{N}{(N+1)^2} \frac{e}{Z_{c0}}$$

Elle est maximale pour $N = 1$ et dans ce cas :

$$\Delta v = e \frac{\Delta Z_c}{4 Z_{c0}}$$

Remarque :

Si le diélectrique dans le condensateur et l'air, les pertes sont négligeables et l'impédance Z_c se réduit à C_c . Dans ce cas on omet la résistance R_e et on obtient le pont de SAUTY.

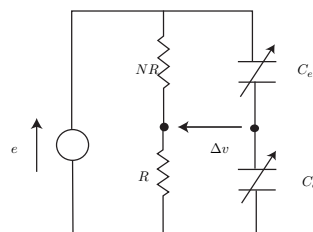
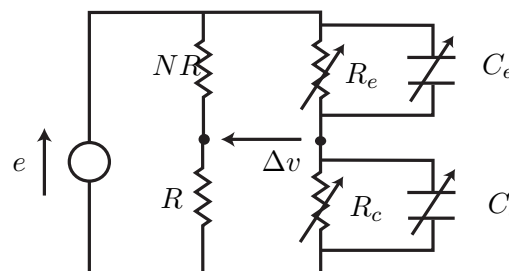


FIGURE 2.21 – Le pont de SAUTY.

La tension de déséquilibre s'écrit :

$$\Delta v = \frac{e}{2} \frac{C_e - C_c}{C_e + C_c}$$

Si C_c varie de C_{c0} à $C_{c0} + \Delta C_c$ ($\Delta C_c \ll C_{c0}$), avec à l'équilibre $C_e = C_{c0}$, alors :

$$\Delta v = \frac{e}{4} \frac{\Delta C_c}{C_{c0}}$$

2.3.3.5 Capteur inductif

Selon que les pertes peuvent être représentés par une résistance série ou parallèle, on peut utiliser respectivement soit le pont de MAXWELL soit le pont de HAY.

La condition d'équilibre est la même pour les deux montages : $Z_c Z_e = K R^2$.

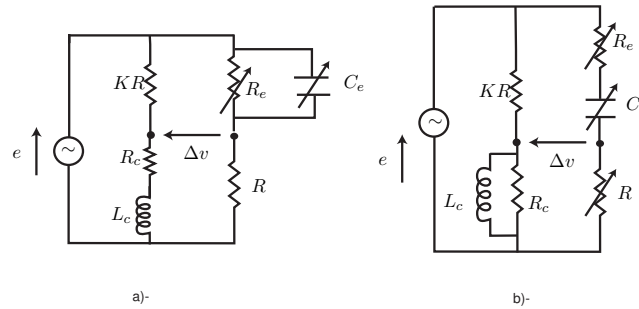


FIGURE 2.22 – a)-Le pont de MAXWELL. b)-Le pont de HAY.

— Pour le pont de MAXWELL la condition s'écrit : $Z_c = R_c + jL_c\omega$ et $Z_e = \frac{R_e}{1+jR_eC_e\omega}$

— Pour le pont de HAY elle s'écrit : $Z_c = \frac{jL_cR_c\omega}{R_c+jL_c\omega}$ et $Z_e = \frac{1+jR_eC_e\omega}{jC_e\omega}$

Pour les deux montage on obtient : $R_c = KR^2/R_e$ et $L_c = KR^2C_e$.

Si l'impédance Z_c varie de Z_{c0} à $Z_{c0} + \Delta Z_c$, la tension de déséquilibre s'écrit :

$$\Delta v = e \frac{KZ_c\Delta Z_c}{(KR + Z_{c0})^2} \frac{1}{1 + \frac{\Delta Z_c}{KR + Z_{c0}}}$$

Si $|\Delta Z_c| \ll |Z_{c0} + KR|$ l'expression précédente devient, au seconde ordre près :

$$\Delta v = e \frac{KR\Delta Z_c}{(KR + Z_{c0})^2}$$

La sensibilité est :

$$s = e \frac{KR}{(KR + Z_{c0})^2}$$

elle est maximale pour $KR = |Z_{c0}|$.

En prenant $K = 1$ il vient :

$$\Delta v = e \frac{R\Delta Z_c}{(R + Z_{c0})^2}$$

Remarque :

Si $KR \gg |Z_{c0}|$ le capteur est alors alimenté à courant constant et on obtient :

$$\Delta v = \frac{e}{KR} \Delta Z_c$$

2.3.4 Conditionneurs des capteurs passifs : Les oscillateurs

2.3.4.1 Oscillateur sinusoïdal

La fréquence d'un oscillateur sinusoïdal peut être déterminé par la méthode de résonance circuit constitué d'une bobine (L) et d'une capacité (C) en série⁸. la fréquence de résonance est :

$$F_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

8. On peut aussi utiliser un circuit parallèle.

Lorsque un capteur capacitif ou inductif X ($X = L$ ou C) est l'un des éléments du circuit résonnant, ses variations entraînent un changement de la fréquence de résonance ΔF .

Si la variation ΔF est faible devant F_0 on aura :

$$\frac{\Delta F}{F_0} = -\frac{\Delta X}{2X}$$

Soit :

$$F = F_0 \left(1 - \frac{\Delta X}{2X}\right)$$

2.3.4.2 Oscillateur de relaxation

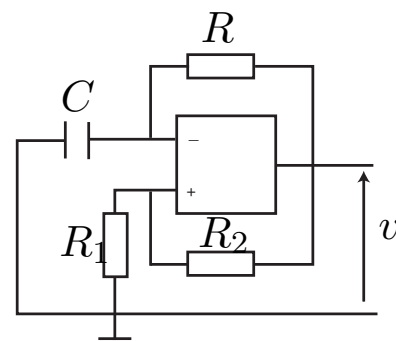
Considérons un oscillateur de relaxation (multivibrateur astable)

C'est un générateur de signaux rectangulaire de fréquence $F = 1/(2RC \ln(1 + 2R_1/R_2))$.

La capacité C ou la résistance R peuvent être celle d'un capteur :

- Si C varie de C_0 à $C_0 + \Delta C \Rightarrow F = F_0(1 - \frac{\Delta C}{C_0})$
- Si R varie de R_0 à $R_0 + \Delta R \Rightarrow F = F_0(1 - \frac{\Delta R}{R_0})$

La fréquence de l'oscillateur est modulée par les variations de l'impédance du capteur.



2.4 Amplification du signal

Les signaux électriques issus de capteurs sont généralement de faible niveau. Si l'on souhaite travailler avec une bonne précision, il est nécessaire de les amplifier. Mais cette amplification ne doit concerner que le signal utile. Or ce dernier est souvent accompagné d'une tension parasite (souvent du même ordre de grandeur que le signal utile) ainsi qu'une tension de mode commun due au conditionneur associé au capteur (cas d'un pont de WHEATSTONE). Il faut donc faire une amplification "sélective" qui élimine ou atténue fortement tout signal ne contenant pas d'information pour ne garder que le signal capteur.

2.4.1 Notion de tension de mode commun

2.4.1.1 Définition de la tension de mode commun

La tension de mesure (v_m) issue d'un capteur est une tension différentielle entre deux conducteurs A et B :

$$v_m = v_b - v_a$$

La tension de mode commun V_{mc} est :

$$V_{mc} = \frac{v_b + v_a}{2}$$

Donc :

$$v_a = V_{mc} + v_s/2$$

et

$$v_b = V_{mc} - v_s/2$$

La tension V_{mc} est commune à v_a et V_b . Elle peut être très supérieure à v_m . Faire une mesure de bonne précision revient à éliminer ou rejeter cette tension de mode commun de manière à extraire la tension v_m (tension différentielle de mesure) tout en étant indépendant de V_{mc} .

Cette tension de mode commun V_{mc} peut avoir plusieurs origines comme nous allons le voir.

2.4.1.2 Tension de mode commun due à l'alimentation

Soit, par exemple, un capteur résistif (R_c) placé dans un montage en pont de WHEATSTONE :

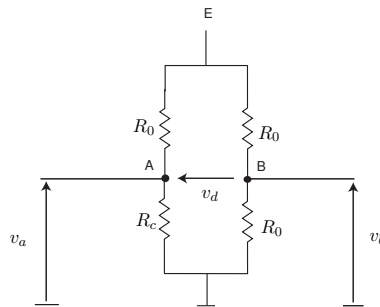


FIGURE 2.23 – Tension de mode commun dans un montage en pont.

On a :

$$v_a = E/2 + E \frac{\Delta R}{4R_0}$$

et

$$v_b = E/2$$

Dans ce cas :

$$V_{mc} = E/2$$

et

$$v_d = E \frac{\Delta R}{4R_0}$$

Exemple : $E = 20 \text{ V}$, $\frac{\Delta R}{R_0} = 10^{-2} \Rightarrow V_{mc} = 10 \text{ V}$ et $v_d = 5 \cdot 10^{-2} \text{ V}$.

On peut ainsi adopter une représentation permettant de faire apparaître la tension de mode commun V_{mc} et la tension différentielle v_d vis à vis des deux tensions v_a et v_b :

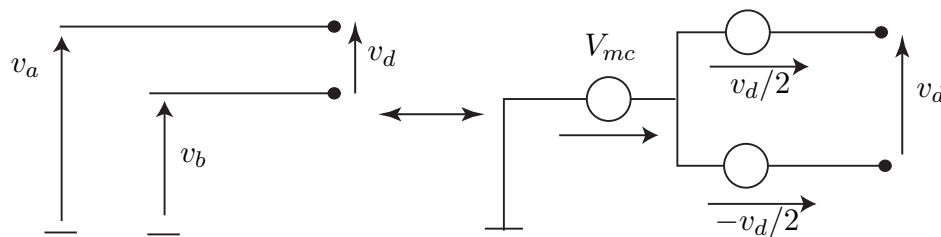


FIGURE 2.24 – Modèle équivalent d'une tension différentielle.

Ici, la tension de mode commun est liée à l'alimentation du montage en pont et la tension différentielle v_d est l'information issue du capteur.

2.4.1.3 Tension de mode commun de masse (transmission unifilaire)

Lors de la transmission du signal capteur, si celui-ci se fait sur un fil, la présence d'un courant de masse peut entraîner une f.é.m. de masse e_M qui va se superposer à la tension issue du capteur. Cette tension de masse sera amplifiée de la même manière que le signal capteur sans possibilité de l'éliminer.

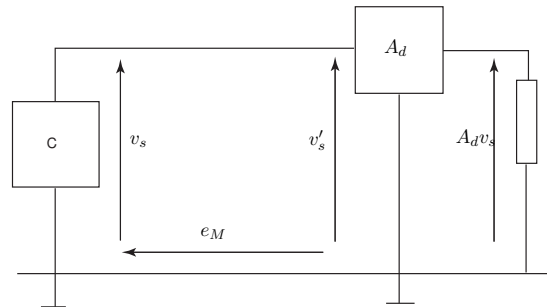


FIGURE 2.25 – Capteur à sortie unifilaire.

C'est pour cette raison que l'on cherche la plupart du temps à transmettre un signal capteur de manière différentielle afin de s'affranchir de cette tension de masse.

2.4.1.4 Tension de mode commun de perturbations (transmission bifilaire)

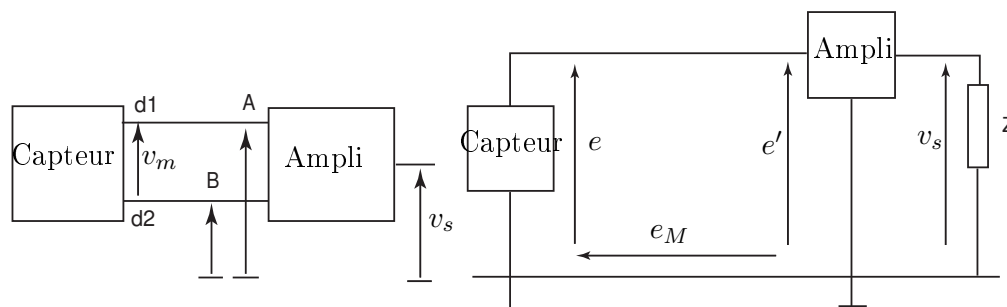


FIGURE 2.26 – Transmission bifilaire.

La transmission de l'information sur deux fils, donc de manière différentielle, permet de limiter très fortement le problème lié à la f.é.m. de masse vue précédemment. De plus si des signaux parasites se superposent au signal utile durant la transmission, l'amplification différentielle aura pour effet de les éliminer. A noter, que les deux fils de transmission sont les plus proches l'un de l'autre de manière à obtenir la même tension de mode commun due aux perturbations sur les deux fils.

La tension de mesure est une tension différentielle entre deux points de sortie (d1 et d2) du capteur :

$$v_m = v_{d1} - v_{d2}$$

La transmission engendre des tensions parasites qui se retrouvent de manière commune sur les deux fils de transmission, on appelle V_{mc} cette tension de perturbation. Ainsi en entrée de l'amplificateur on retrouve :

$$v_a = v_{d1} + V_{mc}$$

et

$$v_b = v_{d2} + V_{mc}$$

avec v_{d1} et v_{d2} sont de l'ordre de μV au mV . Pour V_{mc} , cela peut aller de (0 - 200V) en DC ou bien alternatif (50 Hz) dans le cas d'un couplage avec le réseau.

2.4.2 Amplificateur différentiel et Taux de Réjection de Mode Commun

La tension de sortie de l'amplificateur différentielle s'écrit :

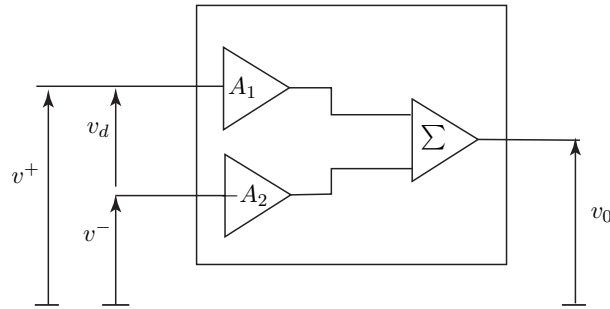


FIGURE 2.27 – Structure élémentaire d'un amplificateur différentiel.

$$v_0 = A_2 v_+ - A_1 v_-$$

la tension de mode commun est : $v_{mc} = \frac{v_+ + v_-}{2}$, et la tension différentielle est : $v_d = v_+ - v_-$.

Soit :

$$v_0 = \frac{A_1 + A_2}{2} v_d + (A_1 - A_2) v_{mc}$$

Le gain différentielle est : $A_d = (A_1 + A_2)/2$.

Le gain en mode commun est : $A_{mc} = A_2 - A_1$.

On voit que si $A_1 = A_2$ on a : $v_0 = \frac{A_1 + A_2}{2} v_d$.

$$v_0 = A_d (v_d + A_{mc}/A_d v_{mc})$$

Le taux de réjection du mode commun est : $\tau_r = A_d/A_{mc}$.

Soit :

$$v_0 = A_d (v_d + v_{mc}/\tau_r) \quad (2.10)$$

Plus τ_r est grand plus l'effet de la tension v_{mc} est faible. On utilise en général un amplificateur d'instrumentation.⁹

2.4.3 Amplificateur d'isolement

Dans le cas de très fortes tensions de mode commun (>2kV) ou de tensions de mesure très faibles (< μV), on est amené à utiliser des amplificateurs d'isolement qui présentent des TRMC supérieurs à 160dB : Une isolation "physique" est réalisée entre l'entrée différentielle et la sortie. La réalisation de cette isolation peut être de différent type :

- isolation par transformateur : Basse fréquence (<20kHz) et haute tension (10kV) ;
- isolation optique : Haute fréquence (100kHz) et basse tension (1kV) ;
- isolation capacitive : entre les deux.

9. Pour ce type d'amplificateurs, $\tau_r \sim 10^5$.

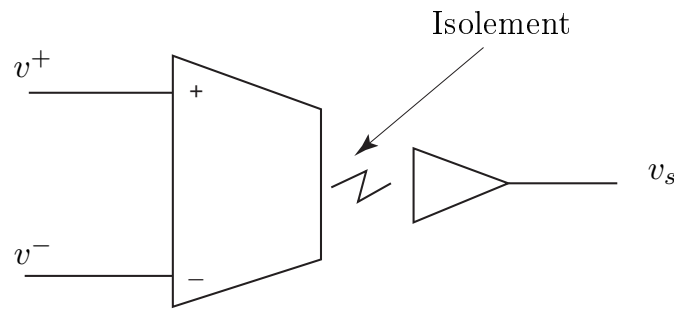


FIGURE 2.28 – Amplificateur d'isolement.

2.4.4 Amplificateur d'instrumentation

2.5 Exemples de capteurs

2.5.1 Capteur Optique

2.5.1.1 Photodiode

2.5.1.1.1 Principe du fonctionnement :

En l'absence de tension de polarisation, le courant qui traverse la diode¹⁰ est nul. Il est la somme de deux courants :

- Courant dû aux porteurs majoritaires¹¹. L'énergie d'agitation thermique permet à ces porteurs de traverser la jonction.
- Courant I_i dû aux porteurs minoritaires (création de paires). Ces porteurs sont mobilisés par le champ électrique de la zone de déplétion.

Lorsqu'on applique une tension v_d à la jonction, le courant qui traverse la diode est :

$$I = I_i \exp[qv_d/kT] - I_i$$

I_i est le courant inverse (de fuite).

Lorsqu'un rayonnement de longueur d'onde $\lambda \leq \lambda_s$ (λ_s est le seuil) atteint la zone de déplétion, il provoque la formation de paires électron-trou qui contribuent au courant inverse sous l'action d'un champ électrique.

Remarque : Une tension de quelques volts est en général suffisante pour étendre la zone de déplétion sur la totalité du semi-conducteur.

2.5.1.1.2 Mode photoconducteur (Diode passive) :

10. Les matériaux qui peuvent être utilisés sont : Si, Ge (visible) et GaAs, InAs (IR).

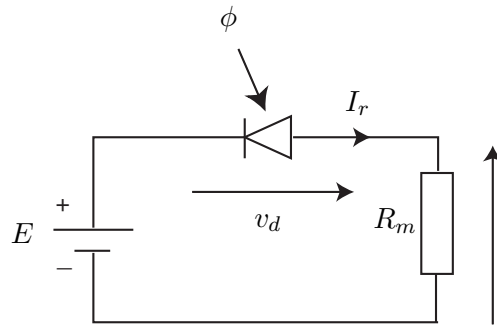
11. Trous dans un semi conducteur P et électrons dans un semi conducteur N

Le courant I_r qui traverse la diode est :

$$I = -I_i \exp[ev_d/kT] + I_i + I_o + I_p$$

$v_d < 0$

I_o est le courant d'obscurité, il est de l'ordre du nA à la température ambiante.



Le courant I_p d'origine photoélectrique (créé dans la zone de déplétion) est :

$$I_p = \frac{e\eta(1-R)\lambda}{hc} \cdot \phi_0 \exp(-\alpha X) \tag{2.11}$$

I_p est proportionnel au flux lumineux ϕ .

- η : le rendement quantique (le nombre moyen d'électrons ou de trous libérés par photon absorbé) ;
- R : le coefficient de réflexion en puissance ;
- α : le coefficient d'atténuation du flux ;
- X : l'épaisseur du semiconducteur traversée ;
- ϕ_0 : le flux incident.

Si v_d est suffisamment négative on aura ¹² :

$$I_r = I_i + I_o + I_p$$

Si v_d est suffisante on obtient (sauf aux éclaircissements faibles) :

$$I_r \simeq I_p$$

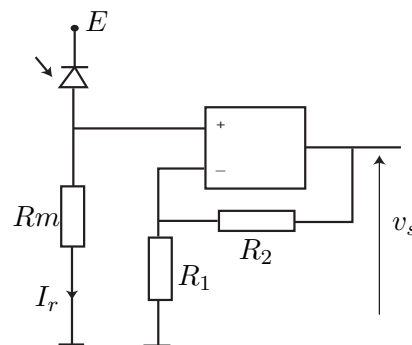
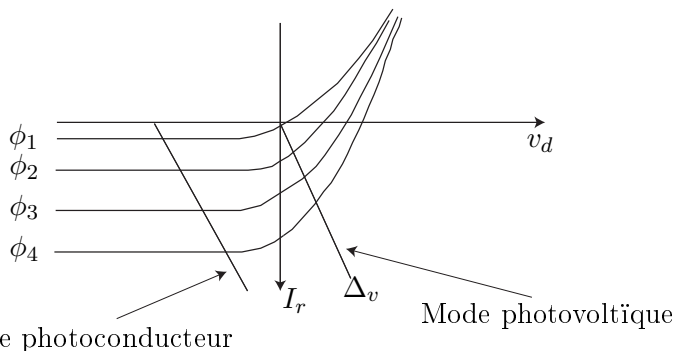
On peut utiliser le montage non inverseur ci-dessous pour transformer ce courant en un tension :

$$v_s = R_m \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) I_r$$

L'équation électrique est : $E = v_r - v_d$ où $v_r = R_m I_r$, d'où :

$$I_r = v_d/R_m + E/R_m$$

C'est l'équation de la droite de charge Δ_c qui détermine le point de fonctionnement.



12. Le courant d'obscurité I_o est de l'ordre du nA, c'est un courant permanent délivré par le dispositif photosensible placé dans l'obscurité et polarisé dans des conditions définies, il est dû à l'agitation thermique et au rayonnement infrarouge émis par l'environnement.

2.5.1.1.3 Mode photovoltaïque (Diode active) :

Dans ce cas aucune source de polarisation externe n'est appliquée. La diode convertit l'énergie lumineuse et elle est équivalente à un générateur. Le courant d'obscurité est nul en l'absence de la source de polarisation ($I_o = 0$).

- En circuit ouvert ($I_r = 0$), la tension au borne de la diode s'écrit (figure a) :

$$v_{d0} = \frac{kT}{e} \ln(1 + I_p/I_i)$$

Aux éclairements forts $I_p \gg I_i$ on a :

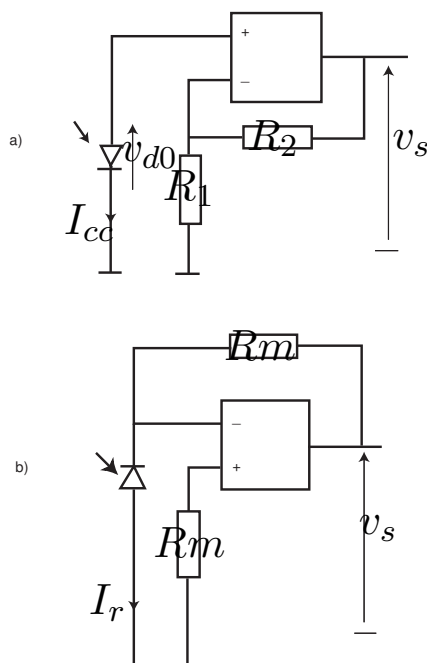
$$v_{d0} = \frac{kT}{e} \ln(I_p/I_f)$$

soit :

$$v_s = (1 + \frac{R_2}{R_1})v_{d0}$$

- En court-circuit (figure b-), le courant $I_{cc} = I_p \propto \phi$ soit :

$$v_s = R_m I_{cc}$$



L'équation de la droite de charge (Δ_v) en mode photovoltaïque est

$$I_r = v_d/R_m$$

Remarque 1 : La résistance inverse r_d de la diode est de l'ordre de $10^{10} \Omega$.

Remarque 2 : Aux éclairements faibles $I_p \ll I_i$ on obtient $v_{d0} = \frac{kT}{e} I_p/I_i$, donc v_{d0} est proportionnelle au flux ϕ .

RÉSUMÉ

Φ	Mode photoconducteur	Mode photovoltaïque
	Polarisation inverse	Pas de polarisation
Φ faible	$I_r = I_i + I_p$	$v_{d0} = \frac{kT}{e} \frac{I_p}{I_i}$ $I_{cc} = I_p$
Φ élevé	$I_r = I_p$	$v_{d0} = \frac{kT}{e} \log \frac{I_p}{I_i}$ $I_{cc} = I_p$
	C_d faible	C_d grand

2.5.1.2 La sensibilité spectrale

Elle est donnée par :

$$s(\lambda) = \frac{\Delta I_p}{\Delta \phi} = \frac{e\eta(\lambda)(1 - R(\lambda))\lambda}{hc} \exp(-\alpha(\lambda)X)$$

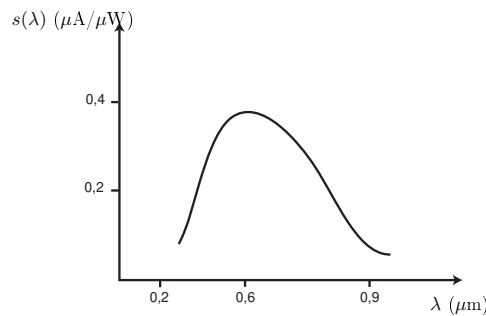


FIGURE 2.29 – Sensibilité spectrale d’une photodiode.

Avec $\lambda \leq \lambda_s$.

Le coefficient de température du courant photoélectrique est $\frac{1}{I_p} \frac{dI_p}{dT} = 0,1\%/^{\circ}C$.

2.5.1.2.1 Temps de réponse : L’apparition d’un courant photoélectrique suit très rapidement l’application d’un éclairage (temps de retard est de l’ordre de 10^{-12} s). Cependant, la rapidité de croissance du courant (mesurée par le temps de montée) est déterminée par le schéma équivalent de la diode (I_p, r_d, C_d) et du circuit de mesure associé (R_m, C_p).

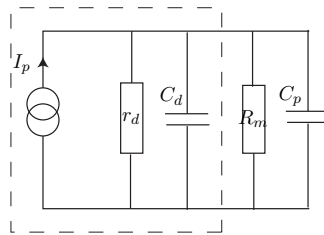


FIGURE 2.30 – Schéma électrique équivalent de la photodiode.

- r_d : est la résistance dynamique de la jonction ; en mode photoconducteur, la diode est polarisé en inverse, $r_d \sim 10^{10} \Omega$.
- C_d : traduit le comportement de la jonction en régime transitoire et aux hautes fréquence ; $C_d \sim$ dizaines de pF ;
- C_p : représente les parasites, câblage,...

La constante de temps est, R_m étant très inférieure à r_d ($R_m \ll r_d \simeq 10^{11}$) :

$$\tau = (C_d + C_p)R_m \quad (2.12)$$

Remarque : La valeur de C_d dépend du mode d’utilisation. $C_d \sim 10$ pF en mode photovoltaïque ($E=0$) et décroît en mode photoconducteur.

Exemple : Pour la photodiode 4203 où $C_p = 2$ pF et $R_m = 50 \Omega$:

- Mode photoconducteur : $t_m = 2,2\tau < 1$ ns ;
- Mode photovoltaïque : $t_m = 2,2\tau = 300$ ns.

dans le mode photoconducteur, la capacité C_d diminue ce qui rend la photodiode plus rapide (ex : détection des impulsions).

2.5.1.2.2 Quelques montage utilisés :

- Mode photoconducteur (montage de base (a)) : $v_o = R_m(1 + R_2/R_1)I_r$

- Mode photovoltaïque (réponse linéaire (b)) : $v_o = R_m I_{cc}$
- Mode photovoltaïque (réponse log (c)) : $v_o = (1 + R_2/R_1)v_{do}$

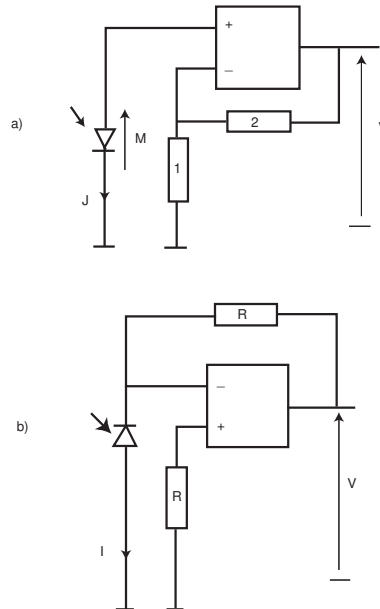


FIGURE 2.31 – a) Montages de base en mode photoconducteur. b) Montages à réponse linéaire en mode photovoltaïque. c) Montages à réponse logarithmique en mode photovoltaïque

2.5.1.3 Phototransistor

C'est un transistor¹³ dont la base, qui n'est pas électriquement accessible, peut être éclairée. Le courant

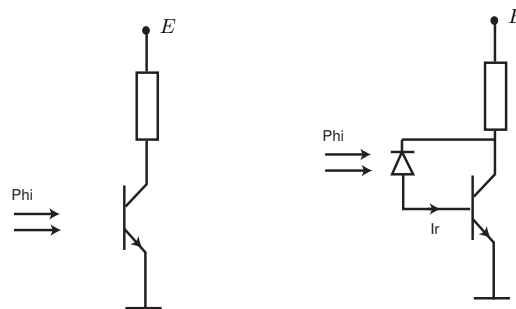


FIGURE 2.32 – Montage électrique d'un phototransistor.

collecteur I_c est :

$$I_c = I_{co} + (\beta + 1)I_p \tag{2.13}$$

Où I_p est donné par l'équation (2.11) et β est le gain en courant du transistor en émetteur commun. le courant d'obscurité I_{co} est de l'ordre de 10^{-8} A à 25 °C

Remarque : La tension v_{be} est pratiquement constante $v_{be} \simeq 0,6$ V. La tension appliquée se trouve pratiquement à la jonction base-collecteur qui est polarisée en **inverse**

13. En général, il est en Silicium de type NPN

2.5.1.3.1 Caractéristiques :

- Ordre de grandeur de la sensibilité à la longueur d'onde du pic : $s(\lambda_p)$ de 1 à 100 A/W
- Ordre de grandeur de la sensibilité thermique : $\frac{1}{I_p} \frac{dI_p}{dT} \simeq 0,6.10^{-2}\%/^{\circ}C$.
- Temps de réponse : quelque dizaines de μs

2.5.2 Capteur d'image

L'image, d'un objet, est caractérisée par la distribution spatiale de l'éclairement qui représente l'information. Les capteurs d'image sont utilisés dans les caméras, en télédétection, en surveillance, météorologie à distance, ...

Un capteur d'image est constitué par l'association ordonnée d'un grand nombre de capteurs optiques, chaque capteur (photosite, pixel "picture element") fournit un signal proportionnel à l'éclairement, l'image est donc échantillonnée spatialement. Chaque photosite fournit une charge $q(x, y)$ qui est proportionnelle à l'éclairement $E(x, y)$ et à la durée d'exposition T_{exp} , constante, qui sépare les collectes successives de l'information par ces photosites. Un circuit électrique permet de convertir les charges $q(x_i, y_i)$ en tensions $v(x_i, y_i)$ dont la succession ordonnée permet de reconstruire l'image.

2.5.2.1 Exemple : Capteur intégré

La répartition des charges sur la surface du capteur est la transposition électrostatique des éclairements. Sur une puce de Silicium on trouve :

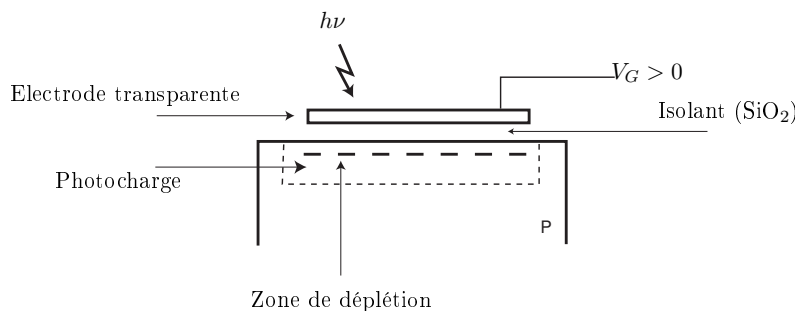


FIGURE 2.33 – Principe du capteur photocalcitif.

La lumière transmise par l'électrode crée dans le substrat des paires électron-trou

La tension positive V_G permet de repousser les trous (porteurs majoritaires) et créer une zone de déplétion. Les électrons attirés par l'électrode s'accumulent à l'interface semi-conducteur isolant.

Un signal d'horloge CLK1 commande le transfert des charges contenues dans les photosites vers le registre de décalage (Transfert parallèle).

Un signal d'horloge CLK2 décale d'un rang le contenu du registre de décalage ce qui permet le transfert des charges vers la sortie (Transfert série).

Ces registres sont des dispositifs à transfert de charge (D.T.E ou CCD)

$N = 256, 1024, 1728, 2048$

- Photoéléments (pixels) : donnent une charge proportionnelle à l'éclairement et à la durée d'exposition ;
- Registre de décalage : permet le stockage individuel de la charge fournie par chaque photosite et le transfert de ses charges ;
- Convertisseur charge-tension : pour fournir un signal (tension) à la chaîne de mesure ;

Pour les capteurs intégrés, la tension de sortie est proportionnelle à l'éclairement.

$$v_i = aE_i$$

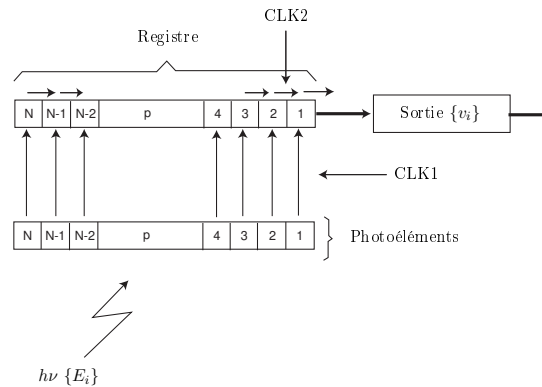


FIGURE 2.34 – Organisation d’un capteur CCD linéique.

2.5.2.1.1 Caractéristiques métrologiques :

- Exposition de saturation : exposition minimale entraînant la saturation du signal de sortie.
- Signal d’obscurité : due à l’agitation thermique pendant la durée d’exposition, elle croit rapidement avec la température.
- Domaine spectral : intervalle de longueurs d’onde à l’intérieur duquel, pour une même exposition, le signal de sortie est au moins égal à 10 % de sa valeur de pic.

2.5.3 Capteur de température

2.5.3.1 Résistances thermiques

En général, la résistance d’un matériau dépend de la température T .

$$R(T) = R_o F(T - T_o) \tag{2.14}$$

Où F est une fonction telle que $F(0) = 1$.

Exemple :

- Pour les métaux : $R(T) = R_o(1 + AT + BT^2 + CT^3)$ avec $T_o = 0$;
- Pour les semiconducteur : $R(T) = R_o \exp(1/T + 1/T_o)$

Pour les petites variations ΔT de la température autour d’une température T , on peut linéariser l’équation (2.14). Soit au premier ordre :

$$R(T + \Delta T) = R(T)(1 + \alpha \Delta T)$$

α est le **coefficient de température** de la résistance, exprimé en $^{\circ}C^{-1}$, il dépend de la température T et de la nature du matériau.

$$\alpha = \frac{1}{R(T)} \frac{dR}{dT}$$

Exemple : Pour le platine à $T = 0^{\circ}C$, $\alpha = 3,9.10^{-3}^{\circ}C^{-1}$.

Pour réaliser une mesure, on peut utiliser le pont de WEATSTONE

La tension de déséquilibre est :

$$\Delta v = \frac{E}{4} \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{E}{4} \alpha \Delta T$$

Pour $E = 2V$ et $\Delta T = 1^{\circ}C$: $\Delta v = 1,9$ mV pour la résistance de platine.

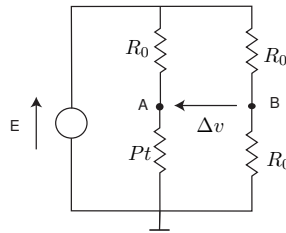


FIGURE 2.35 – Montage à résistance de platine.

Remarque : Le montage fixe la valeur minimale mesurable de la quantité $\frac{\Delta R}{R_0}]_{min}$, d'où la valeur minimale de la variation de température mesurable :

$$\Delta T]_{min} = \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta R}{R_0}]_{min}$$

Pour $\frac{\Delta R}{R_0}]_{min} = 10^{-6}$ et à $0^\circ C$: $\Delta T]_{min} = 2,6.10^{-4}^\circ C$

En réalité, les variations de la résistance sont liées à la variations de la résistivité ρ et aux dimensions géométriques. Par exemple, pour un fil cylindrique (l, S) :

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} + \frac{1}{l} \frac{dl}{dT} - \frac{1}{S} \frac{dS}{dT}$$

— $\alpha_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$: coefficient de la température de la résistivité du matériau.

— $\alpha_l = \frac{1}{l} \frac{dl}{dT} = \frac{1}{2} \frac{1}{S} \frac{dS}{dT}$: coefficient de la température de dilatation linéaire.

Donc :

$$\alpha = \alpha_\rho - \alpha_l$$

En général, $\alpha_\rho \sim 10^{-3}/^\circ C$ et $\alpha_l \sim 10^{-5}/^\circ C$, d'où $\alpha \simeq \alpha_\rho$

Remarque : La linéarisation du signal de mesure délivré par le conditionneur est grandement facilité lorsque sa variation est linéaire en fonction de la température.

Remarque : Effet de l'échauffement par effet Joule

Avec un résistance de platine, un courant $i = 5mA \Rightarrow R_c = 340,23\Omega \Rightarrow T = 684,00^\circ C$; l'échauffement par effet Joule correspond à $0,25^\circ C \Rightarrow$ la température corrigée est $683,75^\circ C$.

2.5.3.2 Thermocouple

Le thermocouple est l'un des capteurs le plus simple et donc le plus utilisé. De façon conceptuelle, il est constitué de 2 conducteurs A et B, formant 2 jonctions. La f.é.m, dite de SEEBECK, qui s'y développe lorsque les jonctions sont portées à des températures différentes, permet de déterminer l'une des températures si on connaît l'autre qui sert de référence.

On étalonne le thermocouple afin d'établir le relation entre la f.é.m et la différence de températures entre les deux jonctions.

En général, la f.é.m peut être mis sous la forme polynomiale suivante :

$$e = \sum_{n=0}^{n=8} a_n \Delta T^n$$

Mais on peut se limiter au trois premiers termes :

$$e \simeq a_0 + a_1\Delta T + a_2\Delta T^2$$

Le tableau suivant donne les coefficient a_1 et a_2 relatifs aux thermocouples entre le Plomb (Pb) et divers métaux.

	Al-Pb	Cu-Pb	Ni-Pb	Pt-Pb
$a_1 (\mu.K^{-1})$	-0,47	2,76	19,1	-1,79
$a_2 (\mu.K^{-2})$	0,0015	0,006	-0,015	-0,0175

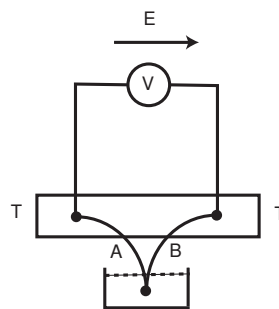


FIGURE 2.36 – Montage de mesure de la f.é.m du Thermocouple.

2.5.3.3 Diodes et Transistors

Le schéma qu'on utilise pour mesurer la température à l'aide d'une diode (normale, Zenzer, ...) ou une transistor est le suivant :

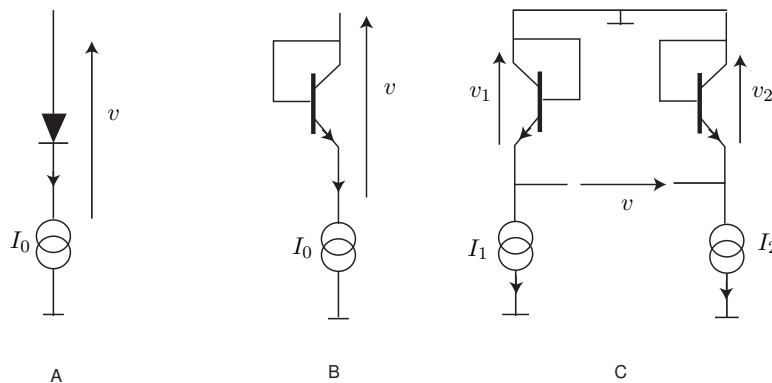


FIGURE 2.37 – Capteurs de température : (A)-diode, (B)-transistor monté en diode, (C)-transistors appariés montés en diodes.

Les deux composants sont polarisés dans le sens direct à courant constant I_0 et donnent une tension $v = v(T)$ qui dépend de la température T .

Expressions de v et de s :

On a :

$$I = I_i [\exp(\frac{ev}{kT}) - 1]$$

En polarisation directe ($I \gg I_i$) l'expression de I devient :

$$I = I_i \exp(\frac{ev}{kT})$$

Le courant inverse a pour expression :

$$I_i = CT^m \exp(\frac{-ev_0}{kT})$$

- v_0 : la hauteur de la bande interdite, pour le Silicium : $v_0 = 1,12\text{V}$;
- m est une constante en général voisine de 3 ;
- C est une constante qui dépend de la nature du matériau et indépendante de la température.

Soit :

$$v = v(T) = v_0 + \frac{kT}{e} \ln(I) - \frac{kT}{e} m \ln(T) - \frac{kT}{e} \ln(C)$$

Pour une température T_1 connue, on a :

$$v_1 = v(T_1) = v_0 + \frac{kT_1}{e} \ln(I) - \frac{kT_1}{e} m \ln(T_1) - \frac{kT_1}{e} \ln(C)$$

⇒

$$\frac{v_1}{T_1} = \frac{v_0}{T_1} + \frac{k}{e} \ln(I) - \frac{mk}{e} \ln(T_1) - \frac{k}{e} \ln(C)$$

⇒

$$\frac{v}{T} - \frac{v_1}{T_1} = v_0 \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} \right) - \frac{mk}{e} \ln\left(\frac{T}{T_1}\right)$$

D'où l'expression de la tension de mesure :

$$v(T) = v_1 \frac{T}{T_1} + v_0 \left(1 - \frac{T}{T_1}\right) + \frac{mkT}{e} \ln\left(\frac{T_1}{T}\right)$$

La sensibilité est alors :

$$\begin{aligned} s(T) &= \frac{dv}{dT} \\ &= (v_1 - v_0) \frac{1}{T_1} - \frac{km}{e} \left(1 + \ln\left(\frac{T}{T_1}\right)\right) \\ &= -m \frac{k}{e} + (v - v_0) \frac{1}{T} \end{aligned}$$

En général la sensibilité thermique $s(T) = dv/dT$ dépend de la température. Dans le cas des composants en Silicium elle est de l'ordre de $-2,5 \text{ mV}/^\circ\text{C}$.

La sensibilité dépend aussi du courant inverse I_i , et pour limiter l'influence de ce courant on peut utiliser le montage à deux transistors appariés montés en diode.

On a :

$$I_1 = I_f \exp\left(\frac{ev_1}{kT}\right)$$

et

$$I_2 = I_f \exp\left(\frac{ev_2}{kT}\right)$$

La tension de mesure $v = v_1 - v_2$ est :

$$v = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$$

La sensibilité est :

$$s = 86,56 \ln\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$$

s est exprimée ici en $\mu\text{V}/\text{K}$.

Exemple : si $\frac{I_1}{I_2} = 2 \Rightarrow v = 59,73T$.

En général la sensibilité thermique $s(T) = dv/dT$ dépend de la température. Dans le cas des composants en Silicium elle est de l'ordre de $-2,5 \text{ mV}/^\circ\text{C}$.

La sensibilité dépend aussi du courant inverse I_i , et pour limiter l'influence de ce courant on peut utiliser le montage à deux transistors appariés montés en diode.

On a :

$$I_1 = I_f \exp\left(\frac{ev_1}{kT}\right)$$

et

$$I_2 = I_f \exp\left(\frac{ev_2}{kT}\right)$$

La tension de mesure $v = v_1 - v_2$ est :

$$v = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$$

La sensibilité est :

$$s = 86,56 \ln\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$$

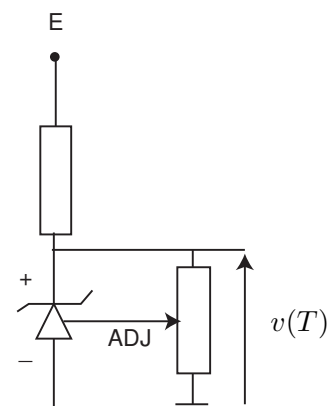
s est exprimée ici en $\mu\text{V}/\text{K}$.

Exemple : si $\frac{I_1}{I_2} = 2 \Rightarrow v = 59,73T$.

Exemple : LM135 est une diode Zener de sensibilité $10 \text{ mV}/\text{K}$, temps de réponse de 1s ,

$$v(T)_{(mV)} = 10T_{(K)}$$

Cette relation est valable dans le domaine $[-40^\circ\text{C}, 100^\circ\text{C}]$



Remarque : Thermométrie par le bruit de fond :

L'agitation thermique provoque, dans une résistance, des fluctuations qui donnent naissance à un courant dans la résistance et une tension correspondante $\overline{V_b^2}$:

$$\overline{V_b^2} = 4kTRB$$

Avec :

- k : Constante de BOLTZMAN, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$;
- B : la bande passante de l'installation de mesure ;
- R : la valeur de la résistance.

Si on arrive à mesurer $\overline{V_b^2}$ avec un voltmètre par exemple, on peut remonter à la température T .

2.5.4 Capteur acoustique : Le microphone

2.5.4.1 Généralités

Les ondes acoustiques dans un fluide se manifestent principalement par les variations de pression (p) et de vitesse des particules (u) qu'elles engendrent¹⁴.

La vitesse de propagation d'une onde dans le fluide est :

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

- P_0 est la pression moyenne ;
 - ρ_0 est la masse volumique moyenne du fluide ;
 - γ est le rapport des chaleurs massiques à pression et à volume constants.
- L'équation dynamique linéarisée s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t}$$

L'intensité acoustique I transportée par l'onde (flux moyen par d'énergie par unité de surface) est :

$$I = \frac{1}{2} \Re(pu^*) = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c_0}$$

Seule la pression est facile à mesurer. Le principal capteur acoustique est le microphone à pression. Les vitesses des particules correspondant aux ondes acoustiques sont trop faibles pour être mesurées par les méthodes anémométriques classiques. Cependant, les composantes de la vitesse acoustique peuvent être mesurées en utilisant l'équation dynamique. Cette opération peut se faire en utilisant un microphone à gradient de pression

2.5.4.2 Les microphones

Le microphone est un transducteur de type récepteur (ou capteur) destiné à transformer l'énergie des ondes acoustiques en énergie électrique. Il doit donc nécessairement comporter : un élément sensible à l'un des paramètres du champ acoustique (variations de pression ou variations de vitesse ou accélération) et un dispositif de production d'énergie électrique.

La conversion du signal acoustique en signal électrique repose sur des phénomènes de types électromagnétique, électrostatique, piézoélectrique ou magnétostriction.

Remarque : La gamme de fréquence à mesurer est très étendue (10 octaves) et aux fréquences élevées, les longueurs d'onde peuvent être du même ordre de grandeur que les dimensions géométriques du microphone. Dans ce cas, il apparaît le phénomène de la diffraction acoustique.

Il existe plusieurs variétés de microphones. Les principaux types utilisés sont :

- Le microphone électrodynamique (appellation courante micro dynamique)
- Le microphone électrostatique (appellation courante : micro à condensateur).

2.5.4.3 Analogie électrique-acoustique-mécanique

On effectue cette analogie par comparaison des équations acoustiques, électriques et mécaniques. Considérons le circuit acoustique suivant :

14. La propagation d'une onde dans un fluide engendre aussi des variations de la masse volumique et de la température.

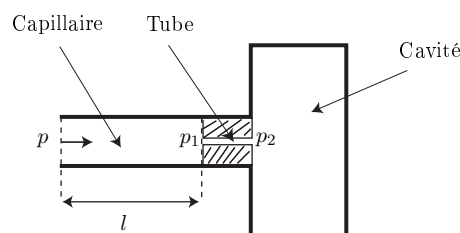


FIGURE 2.38 – Circuit acoustique.

On suppose que les dimensions du circuit (microphone) sont petites devant la longueur d'onde acoustique $\lambda = c_0/f$. Il n'y a donc pas de phénomène de propagation d'onde dans le circuit.

Équation du circuit acoustique :

On a : $p = (p - p_2) + (p_1 - p_2) + p_2$

- Dans le tube on peut négliger la compression ($l \ll \lambda$) ce qui signifie que la masse (m) contenue dans le tube se déplace en bloc, sous l'action de la différence de pression $p - p_1$. La loi fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$(p - p_1)A = \frac{m}{A} \frac{d(Au)}{dt}$$

m/A^2 est la masse acoustique ;

- Dans le capillaire, la chute de pression due à la viscosité est proportionnelle à la vitesse (écoulement laminaire), donc :

$$p_1 - p_2 = RAu$$

où R est la résistance acoustique ;

- On suppose que la compression dans la cavité est adiabatique (mouvement rapide devant les transferts thermiques), donc :

$$pV^\gamma = cst$$

Soit :

$$\frac{\Delta p}{p_0} = -\gamma \frac{\Delta V}{V_0}$$

En posant $\Delta p = p_2$ et $\Delta V = -\int (Au)dt$, il vient :

$$p_2 = \frac{\gamma p_0}{V_0} \int (Au)dt$$

Donc l'équation différentielle s'écrit :

$$p = \frac{m}{A} \frac{d(Au)}{dt} + R(Au) + \frac{\gamma p_0}{V_0} \int (Au)dt$$

Cette équation est à comparer avec l'équation différentielle du circuit série R, L, C :

$$e = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt$$

et l'équation différentielle d'un oscillateur mécanique amorti à un degré de liberté :

$$f = m \frac{dv}{dt} + rv + k \int vdt$$

La comparaison de ces trois équations conduit à l'analogie indiquée dans le tableau suivant :

Grandeur électrique	Grandeur mécanique	Grandeur acoustique
fem (e)	Force (f)	Pression (p)
Courant (i)	Vitesse (v)	Flux de vitesse (Au)
Inductance (L)	Masse (m)	Masse acoustique ($M=m/A^2$)
Résistance (R)	Résistance (r)	Résistance acoustique R
Capacité (C)	Élasticité (1/k)	Capacité acoustique ($C = V/(\gamma p_0) = A^2/k$)

2.5.4.4 Microphone "à pression"

2.5.4.4.1 Schéma équivalent :

Pour établir le schéma équivalent de la partie mécanique-acoustique du microphone¹⁵ :

- On met en série tous les éléments qui sont traversés par le même flux de vitesse ;
- On met en parallèle tous les éléments qui correspondent à une addition de ces flux. En général, les additions de flux se font dans des capacités.

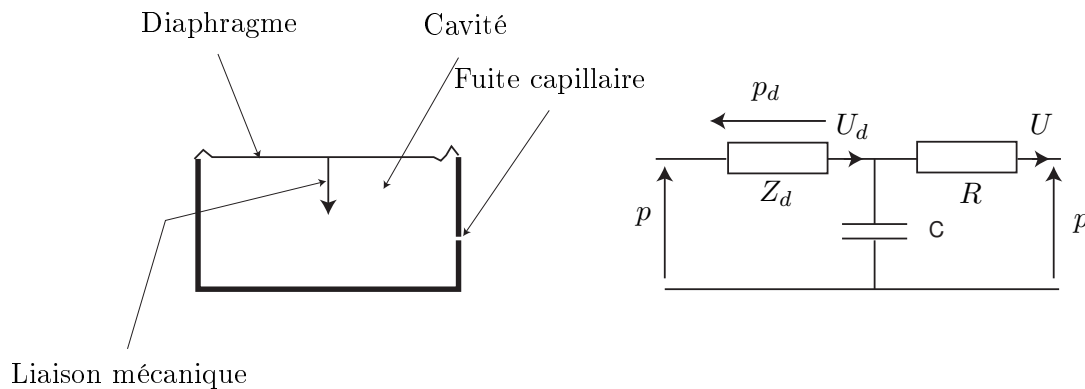


FIGURE 2.39 – Microphone à pression et son schéma équivalent.

La cavité est alimentée par le flux de vitesse qui traverse la fuite capillaire¹⁶ de résistance R et celui qui traverse le diaphragme d'impédance Z_D (masse et élasticité)

2.5.4.4.2 Expression de la force exercée sur le diaphragme :

On suppose que les pressions qui s'appliquent sur le diaphragme et sur l'orifice sont identiques.

On a aussi $R \ll |Z_D|$, d'où $U \gg U_D$, ce qui donne :

$$U \simeq -\frac{jC\omega}{1 + j\omega RC}p$$

D'où l'expression de la force :

$$\begin{aligned} F_d &= Ap_d \\ &= A[p - (p + RU)] \\ &= \frac{jC\omega}{1 + j\omega RC}Ap \end{aligned}$$

15. La partie acoustique et mécanique constitue le corps d'épreuve du capteur acoustique

16. La fuite capillaire permet d'égaliser la pression moyenne et en particulier la pression atmosphérique.

2.5.4.5 Microphone à "gradient de pression"

Ce type de microphone est constitué d'une membrane circulaire maintenue par une armature de forme torique.

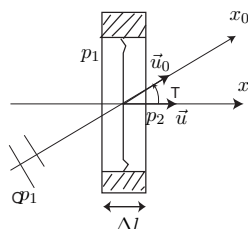


FIGURE 2.40 – Microphone à gradient de pression.

L'ensemble est suffisamment petit pour éviter le phénomène de diffraction.

Soit une onde plane se dirigeant suivant l'axe Ox_0 .

On a :

$$p = p_0 \exp j(\omega t - kx_0)$$

Si $k\Delta l \ll 1$, on a :

$$p_2 - p_1 = \frac{\partial p}{\partial x_0} \Delta l \cos(\theta) = -jkp_0 \Delta l \cos(\theta) \exp j(\omega t - kx_0)$$

La force qui s'exerce sur le diaphragme dans le sens de x est :

$$F_x = -A(p_2 - p_1) = j \frac{\omega p_0}{c_0} A \Delta l \cos(\theta) \exp(\omega t - kx_0)$$

Puisque $p_0 = \rho_0 c_0 u_0$, on obtient :

$$F_x = j\omega u_0 \cos(\theta) \rho_0 A \Delta l \exp(\omega t - kx_0)$$

Cette force est proportionnelle à la vitesse normale $u_{\perp} = u_0 \cos(\theta)$, et ce résultat est indépendant de la forme de l'onde. En effet :

La loi fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = j\omega \rho_0 u$$

ce qui donne :

$$F_x = -A(p_2 - p_1) = -A \frac{\partial p}{\partial x} \Delta l = j\omega \rho_0 A \Delta l$$

La sensibilité à la pression s'écrit :

$$s = F_x/p$$

$$s = j \frac{\omega}{c_0} A \Delta l \cos(\theta)$$

On voit que la sensibilité dépend de la direction de l'onde, cette propriété est représentée sur le diagramme suivant :

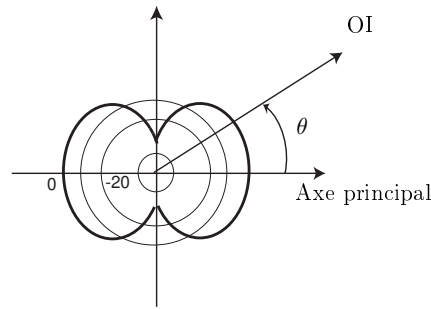


FIGURE 2.41 – Diagramme de directivité d'un microphone à gradient de pression.

2.5.4.6 Le microphone à condensateur

2.5.4.6.1 Schéma de principe :

Le microphone à condensateur (électrostatique) est composé d'une membrane en plastique métallisé ou diaphragme (10 à 20 μm) tendue à très faible distance d'une plaque métallique perforée (armature fixe). Sous l'effet de la pression acoustique (parole...), la membrane vibre à la même fréquence en modifiant la valeur de la capacité. Une tension continue polarise le condensateur pour lui permettre de se charger et de se décharger.

L'armature fixe est perforée de trous qui permettent l'amortissement du mouvement¹⁷ et l'égalisation de la

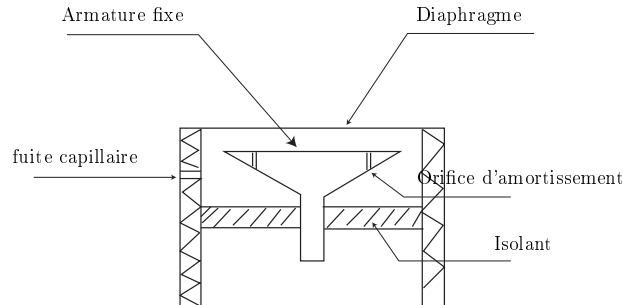


FIGURE 2.42 – Microphone à condensateur.

pression moyenne entre les deux faces de la membrane.

Soit C la capacité du microphone. On réalise généralement le montage de polarisation tel que la constante de temps RC soit grande devant la période de variation de la pression : le système fonctionne alors à **charge constante** Q .

Remarque : Le circuit est fermé par une résistance de valeur très élevée, afin que le courant capacitif produise à ses bornes un signal basse fréquence utilisable grâce à un préamplificateur à grand gain doté d'une impédance d'entrée élevée.

On a :

$$v = Q/C$$

17. Le déplacement de l'air à travers les trous entraîne une dissipation d'énergie par viscosité. Cet amortissement permet de contrôler l'amplitude des oscillation du diaphragme

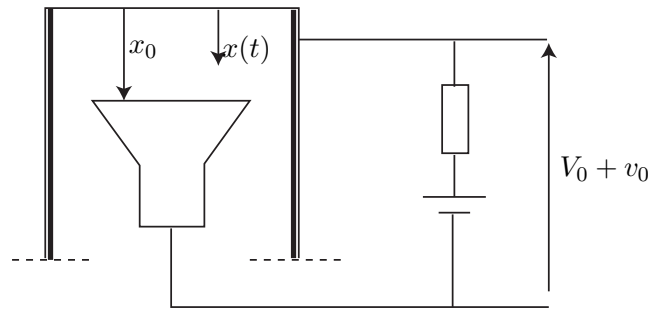


FIGURE 2.43 – Polarisation du microphone à condensateur.

Si la capacité C subit une variation ΔC , la tension v varie de v_0 telle que :

$$\frac{v_0}{V_0} = -\frac{\Delta C}{C_0}$$

La variation de la tension est :

$$v_0 = -V_0 \frac{\Delta C}{C_0}$$

La charge du condensateur, supposée constante, soumis à la différence de potentiel V_0 s'écrit :

$$Q = \frac{\varepsilon_0 A V_0}{x_0}$$

x_0 est la distance entre les armatures au repos.

Soit $x(t)$ un petit déplacement de la membrane à charge constante et v_0 la variation correspondante :

$$\frac{x(t)}{x_0} \simeq \frac{v_0}{V_0}$$

En régime sinusoïdal permanent on a en notation complexe : $j\omega x = u$ et $v_0 = -\frac{V_0}{j\omega x_0} u$

L'énergie élastique du système est :

$$W = \frac{1}{2} k x^2(t) = \frac{1}{2} \frac{A^2}{C_d} x^2(t)$$

C_d est la capacité acoustique.

La force de rappel est :

$$f = \frac{dW}{dx}$$

Soit :

$$f = -\frac{u}{j\omega} \frac{A}{C_d}$$

et

$$p = \frac{u}{j\omega} \frac{A}{C_d} = -\frac{A x_0}{C_d V_0} v_0$$

Ou bien :

$$\Delta p = \frac{u}{j\omega} \frac{A}{C_d} = -\frac{A x_0}{C_d V_0} \Delta v$$

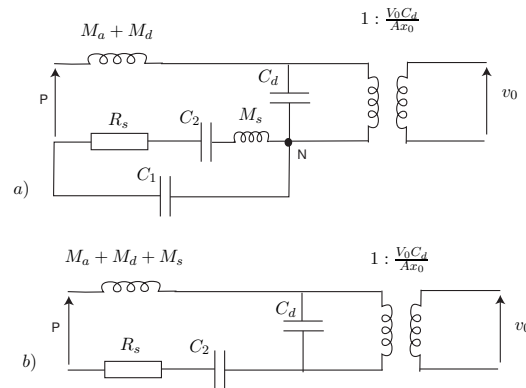


FIGURE 2.44 – Schéma équivalent d'un microphone à condensateur.

2.5.4.6.2 Courbe de réponse :

Considérons le schéma complet (sauf aux très basse fréquences, on néglige le comportement dû aux fuites capillaires) du microphone à condensateur :

- M_a : La masse apparente qui introduit l'effet de l'inertie de la membrane ;
- M_d : L'impédance (masse de rayonnement) de rayonnement ;
- $M_s + R_s$: Introduit l'écoulement d'air à travers les orifices de l'armature fixe ;
- C_2 : La cavité arrière

Les masse acoustique du diaphragme $M_a + M_d$ et la capacité C_d sont traversées par le même flux de vitesse $uA = U_d$, elles sont donc en série.

La masse acoustique M_s et la résistance R_s sont traversées par le même courant que la cavité arrière de capacité C_2 , elles sont donc en série.

Le petit volume d'air en arrière du diaphragme (C_1) est alimenté par le déplacement du diaphragme (Au) et par le courant provenant de la cavité arrière C_2 : d'où le noeud N . Mais, on peut négliger le volume d'air C_1 .

L'équation pour le courant Au , en régime sinusoïdal permanent, est :

$$Mj\omega u + Ru + \frac{u}{j\omega C} = \frac{p}{A}$$

Avec :

$$M = M_a + M_d + M_s$$

et

$$C = \frac{C_d C_2}{C_2 + C_d}$$

Remarque : Pour les membrane métallique très tendues, $C \simeq C_d$.

La tension de sortie est :

$$v_0 = \frac{p}{\sqrt{\omega^2 R^2 + (\omega_r^2 - \omega^2)^2 M^2}} \frac{V_0}{Ax_0}$$

Avec :

$$\omega_r^2 = \frac{1}{MC}$$

Discussion :

— Si $\omega \ll \omega_r$:

$$v_0 \simeq p \frac{CV_0}{Ax_0}$$

La réponse est indépendante de la pulsation ω (zone B)

— Si $\omega = \omega_r$ (zone C) :

$$v_0 = p \frac{CV_0}{Ax_0} \frac{1}{R\omega_r}$$

— Si $\omega > \omega_r$ (zone D) :

$$v_0 \simeq p \frac{V_0}{Ax_0 M \omega^2}$$

La réponse décroît de 12 dB/octave ;

— **Théoriquement**, à hautes fréquences : On observe un anti résonance parallèle du M_s et C_1 (zone E). Puis la résonance du circuit série $M_a + M_d$ et C_d et C_1 (zone F). Mais, en pratique, la diffraction domine à hautes fréquences ;

— À très basses fréquence il apparaît :

- l'effet des fuites capillaires (-6dB/octave, zone A)
- effet de la non-constance de la charge.

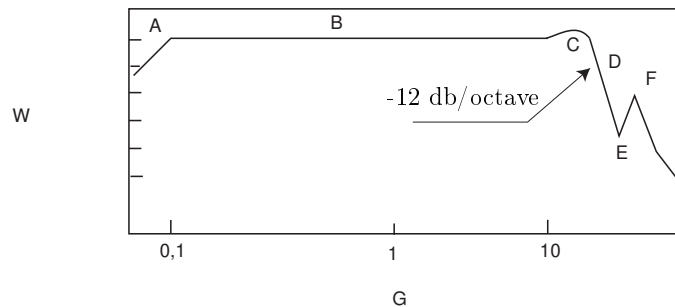


FIGURE 2.45 – Réponse en fréquence du microphone à condensateur.

2.5.4.7 Le microphone électrodynamique

Exercice

2.5.5 Capteur de pression

2.5.5.1 Capteur piézoélectrique

Effet piézoélectrique :

La piézoélectricité désigne la propriété qu'ont certains matériaux de développer une charge électrique proportionnelle à la contrainte qui leur est appliquée, et inversement de se déformer en fonction du champ électrique.

Nous allons illustrer cette caractéristique dans le cas du quartz (qui est une variété cristalline de silice) en examinant un modèle géométrique simplifié de la structure de ce cristal. Ce modèle pour des raisons pédagogiques est bidimensionnel alors que dans la réalité le cristal de quartz est tridimensionnel, mais la représentation en serait malaisée.

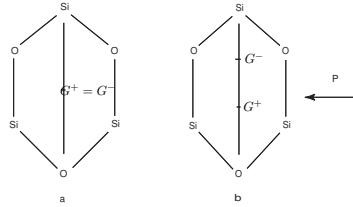


FIGURE 2.46 – Modèle structural de la silice.

La structure de base de la silice peut-être schématisée par un modèle hexagonal (a). Les atomes de silicium sont chargés positivement tandis que les atomes d'oxygène sont chargés négativement. En réalité le système est tridimensionnel (pyramidal) et chaque atome de silicium est lié à 2 autres atomes d'oxygène, symétriques par rapport au plan de la figure, de telle sorte que tous les angles soient de 120° . Dans ce cas, le barycentre des charges positives et celui des charges négatives sont confondus (dans le modèle pédagogique bidimensionnel le triangle reliant les atomes de silicium est équilatéral de même que celui reliant les atomes d'oxygène et ils ont même barycentre).

Par contre si l'on exerce une pression sur le matériau (figure b) on voit alors que l'hexagone n'est plus régulier et en conséquence les barycentres des charges positives et négatives ne sont plus confondus. C'est vrai pour l'ensemble de l'échantillon et il en résulte l'apparition d'une charge négative sur la face supérieure et positive sur la face inférieure (dans le cas illustré ici) c'est à dire d'une ddp dont l'amplitude est effectivement représentative de l'amplitude de la contrainte. L'exploitation directe de cette ddp va permettre la réalisation de capteurs de pression intéressants.

Exemples de matériaux piézoélectriques :

- Le quartz, mais il n'est pas utilisé en pratique en capteur piézoélectrique de force ou de pression.
- Matériaux céramiques ferroélectriques tels le titanate de baryum (BaTiO_3), le titanate zirconate de plomb (PZT) le titanate zirconate de lanthane et de plomb (PLZT) qui génèrent des ddp plus importantes.
- Polymères ou composites tel le fluorure de polyvinylidène (PVDF). Les polymères ont des propriétés piézo moins importantes que les céramiques, mais ils présentent l'avantage de pouvoir être réalisés en films de grande surface donc d'être destinés à certains types d'applications d'analyse des contraintes plutôt que de capteur de pression classique, ou d'hydrophones (microphone en milieu aqueux).

Calcul de la tension de sortie :

Considérons un disque piézoélectrique d'air A et d'épaisseur e . Sous l'effet d'une force F il apparaît des charges $+q$ et $-q$ sur les faces métallisées du disque telles que :

$$q = Fd$$

Le coefficient de proportionnalité d dépend du matériau.

Le disque présente une capacité C_d et une résistance d'isolement R_d .
Le courant $i = dq/dt$ représente la génération des charges.

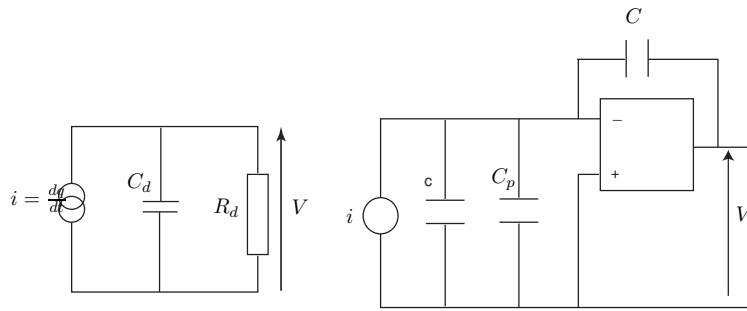


FIGURE 2.47 – Schéma équivalent du capteur piézoélectrique.

On a :

$$C_d = \varepsilon_r \varepsilon_0 A / e$$

Si on néglige l'effet de la résistance R_d , la force F entraîne une tension V telle que :

$$V = Fd / C_d$$

La charge q peut être mesurée par un amplificateur de charge à AO.

$$V_s = Fd / C$$

Remarque : Les courants de polarisation I_p ont tendance à charger le condensateur C et donc faire varier la tension de sortie de $I_p.t/C$. Il faut donc choisir un amplificateur à très faibles courants de polarisation (ex : TL081, AD549, CA3140).

Le condensateur C doit être de très bonne qualité (film plastique) et de capacité élevée ($1\mu\text{F}$).

2.5.6 Jauge de contrainte (métallique)

2.5.6.1 Définitions

— **Déformation** ε : c'est le rapport de la variation Δl d'une dimension à la valeur initiale l :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

— **Contrainte** σ : force par unité de section F/S

— **Déformation élastique** : déformation qui disparaît en même temps que la force qui la produit.

— **Limite d'élasticité** : contrainte maximale ne produisant pas de déformation permanente supérieure à 0,2%.

— **Loi de HOOKE** : Dans le domaine d'élasticité, les déformations sont proportionnelles aux contraintes.

— Dans le sens de la contrainte :

$$\varepsilon_{\parallel} = \frac{1}{Y} \sigma$$

— Dans le sens perpendiculaire à la contrainte :

$$\varepsilon_{\perp} = -\nu \varepsilon_{\parallel}$$

Y est le module de YOUNG exprimé en N/m^2 . Ex : $Y_{acier} = 220.10^9 \text{ N}/\text{m}^2$.

ν est le coefficient POISSON. Généralement $\nu \sim 0,3$

2.5.6.2 Jauge de contrainte métallique

C'est un capteur résistif constitué d'un conducteur métallique filiforme qui permet de mesurer la déformation du matériau auquel il est collé. connaissant les propriétés élastiques du matériau, on peut déduire des informations sur les contraintes existants dans le matériau.

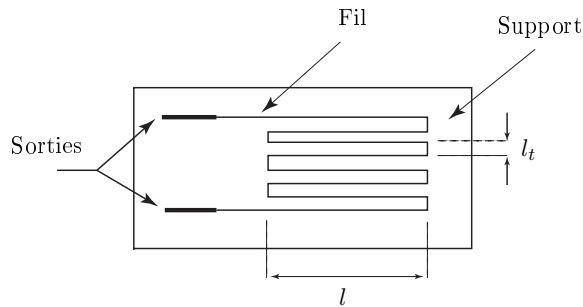


FIGURE 2.48 – Jauge de contrainte.

La résistance du fil est donnée par :

$$R = \rho \frac{nl}{S}$$

- n nombre de brins ;
- l est la longueur du brin ;
- $S = \pi r^2$ est sa section et r est son rayon ;
- ρ est sa résistivité.

Si le conducteur subit une déformation ε dans le sens de sa longueur, sa résistance subit une variation dR telle que :

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dl}{l} - 2\frac{dr}{r}$$

La déformation est :

$$\frac{dl}{l} = \varepsilon$$

et

$$\frac{dr}{r} = -\nu\varepsilon$$

ν étant le coefficient de POISSON.

Pour un conducteur métallique, la variation de la résistivité est proportionnelle à la variation du volume du conducteur :

$$\frac{d\rho}{\rho} = C \frac{dV}{V} = C(1 - 2\nu) \frac{dl}{l}$$

C est la constante de BRIDGMAN ; $C \sim 1$.

d'où :

$$\frac{dR}{R} = K \frac{dl}{l} = K\varepsilon$$

avec :

$$K = 1 + C + 2(1 - C)\nu$$

est le **facteur de jauge**. Pour une jauge métallique $K \approx 2$.

Il y a donc proportionnalité entre les variations relatives de la résistance et la déformation.

Exemple : Constantan (45% Ni, 55% Cu) : $K = 2,1$.

2.5.6.3 Caractéristiques principales des jauges métalliques

- La résistivité ρ : doit être suffisamment élevée pour obtenir les valeurs de la résistance recherchées (100 à 5000 Ω) sans longueur de fil excessive.
- **Facteur de jauge** : K est voisin de **2** dans le domaine d'élasticité.
- **Influence de la température** : l'influence de la température sur K (c-à-d sur la linéarité) est généralement faible ; entre $-100^\circ C$ et 300° on a :

$$K(T) = k_0[1 + \alpha_k(T - T_0)]$$

Exemple : Constantan , $\alpha_k = -0,04$.

Remarque 1 : En réalité il y a une certaine longueur l_t perpendiculaire aux brins, de résistance R_t , qui est sensible aux déformations transversales.

La resistance totale de la jauge est $R + R_t$ avec :

$$\frac{dR_t}{R_t} = K \frac{dl_t}{l_t}$$

D'ou, en posant $R = R_l$:

$$\frac{dR}{R} = K \frac{R_l}{R_l + R_t} \frac{dl_l}{l_l} + K \frac{R_t}{R_l + R_t} \frac{dl_t}{l_t}$$

avec :

- $K_l = K \frac{R_l}{R_l + R_t}$: facteur de jauge longitudinal.
- $K_t = K \frac{R_t}{R_l + R_t}$: facteur de jauge transversal. $K_t \simeq 10^{-2}K$ pour les jauges à fil.

Remarque 2 : Une variation de la température entraîne une variation de la résistance $\Delta R/R = \beta \Delta T$. Par exemple, pour une jauge de Karma collé sur l'acier : $\beta = 2,2 \cdot 10^{-5} / ^\circ C$

2.5.6.4 Fonctionnement dynamique

La réponse en fréquence de la jauge est déterminée par le procédé de fixation et les dimensions. En effet, il faut que la longueur l des brins soit très inférieure à la longueur d'onde λ des vibrations.

On adopte pour règle : $l \leq 0,1\lambda$.

La longueur d'onde est donnée par :

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

f est la fréquence de la vibration et v est la célérité du son dans le matériau de structure.

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho} \cdot \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}$$

ρ est la masse volumique du matériau de structure.

La fréquence maximale d'utilisation d'une jauge est :

$$f_{max} = \frac{v}{10.l}$$

Exemple : Pour l'acier : $v = 5810 \text{ m/s}$ et $f_{max} \simeq 60 \text{ kHz}$ lorsque $l = 1 \text{ cm}$.

2.5.6.5 Capteur de pression piézoélectrique

Exercice

2.6 Introduction

La métrologie est ...

2.7 Système International d'Unités (SI)

2.7.1 Introduction

- Le système SI est le système d'unités de mesures recommandées.
- Il a été adopté en 1960 par la conférence générale des poids et des mesures.
- Le système SI est régi par le **BIPM** (Bureau International des Poids et des Mesures, www.bipm.org).

Parmi les objectifs de ce bureau :

- Établissement des **étalons fondamentaux** et conserver les prototypes internationaux.
- Effectuer des comparaisons entre les étalons internationaux et ceux nationaux (càd les copies)
- Assurer la coordination des techniques de mesures
- Effectuer les mesures des constantes fondamentales
- Il est fondé sur le choix de **7 unités** de base définies par convention.
- On passe d'une unité à ses multiples ou sous multiples par les puissance de 10 sauf pour le temps et les angles.

2.7.2 Les 7 constantes fondamentales

La définition des unités SI est établie en termes d'un ensemble de sept constantes fondamentales de définition. Le système complet d'unités peut être dérivé des valeurs fixes de ces constantes de définition, exprimées en unités du SI.

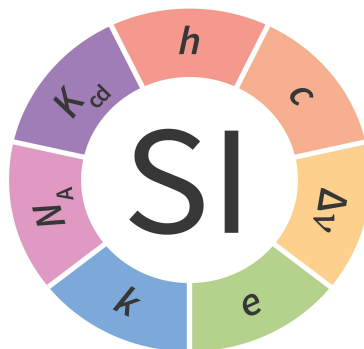


FIGURE 2.49 – Constantes fondamentales du système SI (crédit : www.bipm.org)

Le Système international d'unités, le SI, est le système d'unités dans lequel les valeurs des sept **constantes fondamentales** sont :

Constante	Symbole	Valeur numérique	unité
Fréquence de transition de Cs	$\Delta\nu_{Cs}$	9 192 631 770	Hz
Vitesse de la lumière dans le vide	c	299 792 458	m s ⁻¹
Constante de Planck	h	6,626 070 15 x 10 ⁻³⁴	J s
Charge élémentaire	e	1.602 176 634 x 10 ⁻¹⁹	C
Constante de Boltzmann	k	1.380 649 x 10 ⁻²³	J K ⁻¹
Constante d'Avogadro	N _A	6.022 140 76 x 10 ²³	mol ⁻¹
Efficacité lumineuse	K _{cd}	683	lm W ⁻¹

où le hertz, le joule, le coulomb, le lumen et le watt, avec les symboles d'unité Hz, J, C, lm et W, respectivement, sont liés aux unités seconde, mètre, kilogramme, ampère, kelvin, mole et candela, avec symboles d'unité s, m, kg, A, K, mol et cd, respectivement, selon :

$$\text{Hz} = \text{s}^{-1}, \text{J} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}, \text{C} = \text{A s}, \text{lm} = \text{cd m}^2 \text{m}^{-2} = \text{cd sr}, \text{et } \text{W} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-3}.$$

2.7.3 Les sept unités de base

À partir de la définition du SI en termes de valeurs numériques fixes des constantes de définition, les définitions de chacune des sept unités de base sont déduites en utilisant, selon le cas, une ou plusieurs de ces constantes de définition pour donner l'ensemble de définitions suivant :



FIGURE 2.50 – Unités du système SI (crédit : www.bipm.org)

Grandeur	Symbole de la grandeur	Unité	Symbole de l'unité	Dimension
Masse	m	kilogramme	kg	M
Temps	t	seconde	s	T
Longueur	l,x,...	mètre	m	L
Temperature	T	Kelvin	K	Θ
Intensité électrique	i,I	Ampère	A	I
Quantité de matière	n	mole	mol	N
Intensité lumineuse	l _v	candela	cd	J

- Les symboles des unités :

- sont en **miniscule** sauf pour les noms propres : m, s, K
 - *ne sont pas italiques* ni suivi d'un point : 25 m et Non pas 25 *m* ou ou 25 m.
 - doivent être séparés de la valeur par un espace : 25 m et Non pas 25m (sauf pour les degrés : 50°)
 - Il ne faut pas mélanger unité et symbole de l'unité : m/s ou mètre/seconde et non pas m/seconde.
- En générale, la dimension d'une grandeur G (noté dim(G) ou [G]) peut s'écrire :

$$\dim(G) = M^a T^b L^c \Theta^d I^e N^f J^g$$

où : a, b, c, \dots sont des exposants dimensionnels.

2.8 Les étalons

2.8.1 Le kilogramme

2.8.1.1 Définition SI du kg

Le kilogramme, symbole kg, est l'unité de masse SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixe de la constante de Planck h à $6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$ lorsqu'elle est exprimée dans l'unité J s, qui est égale à $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$, où le mètre et le second sont définis en termes de c et $\Delta\nu_{Cs}$.

$$1\text{kg} = \frac{h}{6,62607015 \times 10^{-34}} \text{ m}^{-2}\text{s}$$

L'inversion de cette relation donne une expression exacte du kilogramme en fonction des trois constantes de définition h , $\Delta\nu_{Cs}$ et c :

$$1\text{kg} = \frac{(299792458)^2}{(6,62607015 \times 10^{-34}) \times (9192631770)} \frac{h\Delta\nu_{Cs}}{c^2} \approx 1,4755214 \times 10^{40} \frac{h\Delta\nu_{Cs}}{c^2}$$

Cette définition a pour effet de définir l'unité $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ (l'unité de l'action des grandeurs physiques et du moment cinétique). Avec les définitions de la seconde et du mètre, cela conduit à une définition de l'unité de masse exprimée en termes de constante de Planck h .

2.8.2 Les divers définitions du kilogramme

2.8.2.1 Historique

- 1793 :

2.8.2.2 Prototype international du kilogramme (PIK)

- La définition du kilogramme été basé sur un prototype appelé : Prototype International du Kilogramme (PIK).
- Le PIK est un cylindre en platine irridié (**90% de Pt + 10 % d'Iridium**). L'iridium permet d'augmenter la dureté du Platine.
- Le PIK est disponible en un seul exemple (au BIMP) avec des copies (K21, K40,...)
- Quelques caractéristiques du Pt (dense, faible susceptibilité, résiste à l'oxydation...)

	Z	ρ (SI)	χ	ρ_e (SI)
Pt	78	$21,450 \times 10^3$	0,003	111×10^{-9}
		Dense	Faible	
Fe		$7,8 \times 10^3$	200	

2.8.2.2.1 Forme du PIK

• Pour minimiser les effets sur la surface du PIK (et donc, les variations de la masse !), sa surface doit être minimale.

Pour des raisons pratiques, la forme du PIK est un cylindre (au lieu d'une sphère) de rayon r et de hauteur h

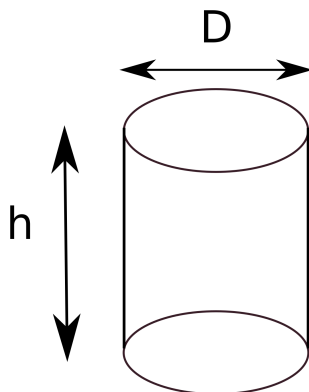


FIGURE 2.51 – Forme géométrique du PIK

• Le volume du PIK est :

$$V = \pi r^2 h \quad \text{Le volume est constant car : } m = 1 \text{ kg} = \text{constante}$$

• La surface du PIK :

$$S = 2 \times \pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2\pi V}{r}$$

• La surface doit être minimale :

$$\frac{dS}{dr} = 0 \Rightarrow h = 2r$$

d'où :

$$S_{\min} = 6\pi r^2 \quad ; \quad V = 2\pi r^3$$

Pour le PIK (Pt-10Ir) ; $\rho = 21,500 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $m = 1 \text{ kg}$:

$$r = \left(\frac{m}{2\pi\rho} \right)^{1/3} \Rightarrow r = 19,5 \text{ mm} \quad \text{et} \quad h = 39 \text{ mm}$$

d'où :

$$S_{\min} = 71,6 \text{ cm}^2 \quad ; \quad V_{\min} = 46,5 \text{ cm}^3$$

Pour l'incox par exemple ($\rho' = 8 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$) :

$$S'_{\min} = 140 \text{ cm}^3 > S_{\min}$$

d'où l'intérêt d'utiliser un matériau dense comme le Pt.

2.8.2.2.2 Effet de l'air (Poussée d'Archimède)

Lors de la comparaison entre le PIK et les copies, la poussée d'Archimède ($F_a = \rho_a g V$) qui s'oppose au poids du PIK ce qui introduit une erreur δm_1 sur la mesure de la masse.

$$\delta m_1 = \frac{F_a}{g} = \rho_a V_{\min}$$

AN : $\rho_a = 1,184 \text{ kg.m}^{-3} \Rightarrow \delta m_1 \approx 55,05 \text{ } \mu\text{g}$.

2.8.2.2.3 Effet champ magnétique extérieur

Le Pt-Ir est un matériau paramagnétique linéaire de susceptibilité : $\chi = 0,0003$.

Lorsqu'il est placé dans un champ magnétique \vec{B} non uniforme, un élément de volume $d\tau$ a alors une énergie magnétique :

$$dW_m = (\vec{M}d\tau) \cdot \vec{B}$$

où : \vec{M} est le vecteur aimantation telle que :

$$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

d'où :

$$dW_m = \vec{M} \cdot \vec{B} = \frac{\chi_m}{\mu_0} B^2 d\tau$$

La force exercée sur l'élément $d\tau$ est alors :

$$d\vec{F} = -\vec{\nabla}(dW_m)$$

La composante de cette force selon l'axe verticale (axe de \vec{g}) est :

$$dF_z = \frac{\chi_m}{\mu_0} B \frac{dB}{dz} d\tau$$

la force totale exercée sur le PIK de volume V est :

$$F_z = \frac{\chi_m V}{\mu_0} B \frac{dB}{dz}$$

L'erreur sur la masse due à cette force est :

$$\delta m = \frac{F_z}{g}$$

Application numérique :

$$\delta m = \frac{0.0003}{4\pi 10^{-7}} \times 5.10^{-4} \times 2.10^{-3} = 0,24\mu\text{g}$$

2.8.2.2.4 Effet de la gravité

Lors de la comparaison entre le PIK est "sa copie" il est placé sur une balance. La position de son centre de masse affecte la valeur de sa masse.

En effet, le champ de pesanteur à une altitude h est donné par :

$$g(h) = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \approx g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R_T}\right)$$

l'erreur sur la masse est alors :

$$\delta m = m \frac{\delta g}{g} = 2m \frac{h}{R_T}$$

Application numérique :

$$\delta m = 2,4\mu\text{g}$$

2.8.2.2.5 Effet de l'adsorption

Lorsqu'on laisse le PIK dans l'air, il peut y avoir adsorption des molécules de l'air sur sa surface ce qui change sa masse.

Ce phénomène d'adsorption est dû aux interactions dipôle-dipôle (force de Van der Waals) donnée par :

$$F_{vdw} = \frac{K}{r^7}$$

où r est la distance entre les deux molécules et K est une constante qui dépend de la nature des dipôles.

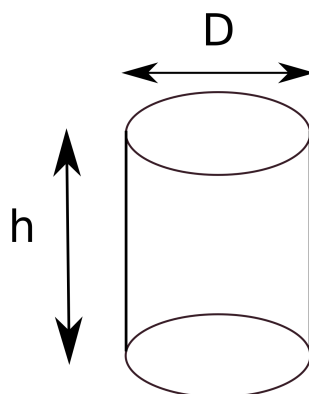


FIGURE 2.52 – Adsorption à la surface du PIK

Soit :

- $P(z)$ la pression de l'air à l'équilibre à la distance z de la surface du PIK
- P_0 la pression de l'air à l'équilibre loin du PIK.

La pression $P(z)$ est donné par (distribution de Boltzmann) :

$$P(z) = P_0 \exp(-W(z)/K_B T)$$

où : $W(z)$ est l'énergie potentielle d'interaction à la position z . Elle est donnée (voir exercice en bas) par :

$$W(z) = -\frac{K_a}{z^3} < 0$$

où $K_a > 0$ est une constante.

Soit :

$$P(z) = P_0 \exp(\alpha/z) \quad \left(\alpha = \frac{K_a}{K_B T} \right)$$

donc plus on s'approche de la surface du PIK (z diminue), plus la pression du gaz augmente.

Lorsque $P(z)$ atteint (pour une valeur $z = d$) la pression de vapeur saturante P_s du gaz, à la température T , il y a condensation des molécules du gaz dans une couche d'épaisseur d .

$$P(z = d) = P_0 \exp(\alpha/d) = P_s$$

soit :

$$d = \left(\frac{K_a}{K_B T \ln(P_s/P_0)} \right)^{1/3}$$

c'est la relation de Frenkel-Halsey-Hill

Application numérique pour l'air à 25 °C :

- $P_s/P_0 = 0.25$
- $K_a = 3.10^{-50} \text{ J.m}^{-3}$

soit

$$d = 174 \text{ pm}$$

or la taille de la molécule d'eau est environ 150 pm. Donc il y aura une couche d'eau à la surface du PIK qui contient une seule couche des molécules d'eau.

En assimilant les molécules d'eau à des sphères de rayon $a = 150 \text{ pm}$, on peut estimer la masse d'eau adsorbée par la PIK :

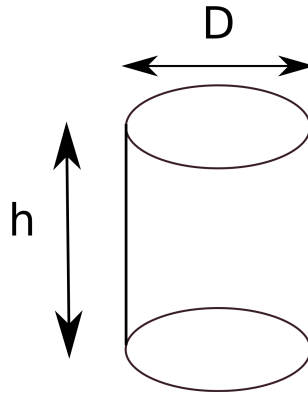


FIGURE 2.53 – Adsorption à la surface du PIK

$$\delta m = \frac{M(H_2O)}{N_A} \times N(H_2O)$$

avec : $M(H_2O)$ est la masse molaire de l'eau et $N(H_2O)$ le nombre de molécules d'eau adsorbées.

$$N(H_2O) = \frac{S_{\min}}{S(H_2O)} = \frac{S_{\min}}{2a^2\sqrt{3}}$$

avec S_{\min} est la surface extérieure du PIK.
d'où

$$\delta m = \frac{S_{\min}}{2a^2\sqrt{3}} \frac{M(H_2O)}{N_A}$$

Application numérique :

$$\delta m = 3 \mu\text{g}$$

2.8.2.2.6 Conclusion

Avec tous ces effets, la précision de la masse du PIK est de 3.10^{-8} .

Actuellement, on cherche à relier l'étalon de masse à des constantes universelles et aux propriétés intrinsèques des atomes. C'est l'objectif d'expérience de la balance des watts