Chapitre 3

Réponse d'un circuit

3.1 Étude d'un circuit RC

3.1.1 Montage

Considérons le montage le montage suivant :

FIGURE 3.1 – Charge et décharge d'un condensateur.

Lorsqu'on place l'interrupteur sur la position 2, le condensateur se décharge. Lorsque on bascule K à la position 1, le condensateur se chargera sous la tension E.

Configuration de LatisPro :

[☞] Lancer le logiciel Latis pro puis faire les configurations suivantes :

— *Entrées analogiques* : sélectionner $EA0$, $EA1$ et $EA4$ et activer le mode différentielle $EA0 - EA4$ (pour visualiser le courant Ri) ;
— *Acquisition* : Temporelle, Normal - 2500 points - Totale = 100 ms ;
— *Source de déclenchement* : choisir EA1 - Seuil 0,2 V - Prétrig = 25% ;
— Nommer les entrées : u et ri.

3.1.2 Acquisition

[☞] Placer l'interrupteur en position 2 (condensateur déchargé). Appuyer sur la touche F10 du clavier puis basculer, après 2s, l'interrupteur en position 1. Le condensateur se charge alors sous la tension E.

[☞] Faire l'acquisition de la tension u_c et du courant i (Ri).

FIGURE 3.2 – Évolution de la tension u aux bornes de C et du courant i.

3.1.3 Modélisation de la tension u_c et du courant i

[☞] Modéliser la courbe $u(t)$ en utilisant l'outil de modélisation de LatisPro.

$$u(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[☞] Modéliser la courbe $Ri(t)$ en déduire celle de $i(t)$.

$$i(t) = \text{...}$$

Commentaires :

- Le condensateur met un temps de l'ordre de quelques τ pour se charger.
- la valeur de $u(t)$ en fin de charge est :

$$u(t \to \infty) \approx \text{.............V} = E$$

- la valeur de $i(t)$ en fin de charge est :

$$i(t \to \infty) \approx 0$$

car le condensateur est totalement chargé, il se comporte comme un interrupteur ouvert en régime continu.
- on voit que $i(0^+) \neq i(0^-)$, le courant n'est pas forcément continu dans un condensateur.
- par la méthode de la tangente, la valeur de la constante de temps τ du dipôle RC.

$$\tau \approx \text{................}s$$

- l'expression du temps de montée t_m de $u_c(t)$ entre 10 % et 90 % en fonction de τ.

$$t_m = 2,3RC??$$

La mesure sur la courbe donne :

$$t_m \approx \text{.....................}$$

3.1.4 Justification théorique des résultats

Initialement le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.
La loi des mailles pour $t \geq 0$:

$$E = Ri + u \to E = RC\frac{du}{dt} + u \to \tau\frac{du}{dt} + u = E$$

La solution générale, avec la condition initiale ($u(0) = 0$) est :

$$u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{E-u}{R} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Remarque : Lorsque le seconde membre de l'équation différentielle est non nul, on dit que le **régime est forcé**. Ce régime est dû à la présence a des sources de tension dans le montage.

3.1.5 Régime transitoire et régime permanent

• Au début le circuit passe par un régime transitoire pendant quelques τ.

• Après ce régime, le circuit entre dans son régime permanent où $u = E$.

• Le régime permanent est lié au seconde membre de l'équation différentielle. Ici le seconde membre est une constante, donc en régime permanent, tous les signaux sont constats. Donc si on injecte $u = cte$ dans l'équation différentielle on trouve $u = E$.

• La durée t_t du régime transitoire dépend du niveau de précision voulu par l'expérimentateur : Si on décide, par exemple, que le régime permanent est atteint lorsque u atteint 99% de sa valeur finale alors :

$$\frac{|u_{\text{finale}} - u_{\text{initiale}}|}{u_{\text{initiale}}} = 0,99 \quad \rightarrow \quad \frac{u_0 - u(t_t)}{u_0} = 0,99 \quad \rightarrow \quad u(t_t) = (1 - 0,99)u_0 = u_0 e^{-\frac{t_0}{\tau}}$$

soit :

$$t_t = -\tau \ln 0,01 \approx 4,6\tau$$

Au bout de 5 τ on peut supposer que le condensateur est complètement chargé (à 99 %) .

3.1.6 Bilan de Puissance

Créer (Feuille de calcul) et tracer les courbes des puissances reçue par R et C et celle délivrée par le générateur.

$$p_R(t) = Ri^2 \qquad P_c = ui \qquad P_g = Ei$$

FIGURE 3.3 – Courbes expérimentales du puissances P_R, P_C et P_g.

On constate que :

$$P_g = P_C + P_R$$

Justification du bilan énergétique :

On multiplie membre à membre la loi des mailles par i :

$$Ei = Ri^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{C}{2}u^2)$$

avec :
- $P_g = Ei$ la puissance fournie par le générateur ;
- $P_R = Ri^2$ la puissance dissipée dans le résistor (par effet JOULE) ;
- $P_C = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{C}{2}u^2)$ la puissance emmagésinée dans le condensateur.

d'où le bilan d'énergie :

$$P_g = P_R + P_C$$

L'énergie totale fournie par le générateur est :

$$E_g = \int_0^{\infty} P_g dt = E \int_0^{\infty} i(t)dt = \frac{E^2}{C}$$

C'est le double de l'énergie accumulée dans le condensateur. La moitié de l'énergie fournie par le générateur est donc dissipée par effet Joule dans la résistance.

QR : proposer une méthode pour charger le condensateur avec un minimum de perte d'énergie.
Réponse : Application 6 page 109.

sectionCircuit RL **Conditions initiales :**

À $t < 0$, l'interrupteur est dans la position 1. La bobine est parcourue par le courant I_0. À $t = 0$, on bascule l'interrupteur vers la position 2.

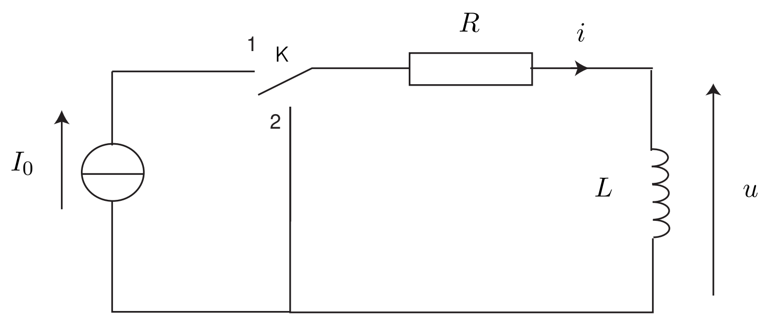

FIGURE 3.4 – Circuit RL en régime libre.

Équation différentielle :

La loi des mailles (pour $t \geq 0$) :

$$Ri + u = 0 \quad \rightarrow \quad Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

on pose $\tau = \frac{L}{R}$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = 0$$

• La constante τ est appelée constante de temps du circuit ou temps de relaxation.

• Le circuit (R,L) est un circuit du premier ordre car son équation différentielle est linéaire du premier ordre.

• Le seconde membre de l'équation différentielle est nulle, c'est le régime libre.

Solution de l'équation différentielle :

La solution générale de l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour $t > 0$ est :

$$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

A est une constante qu'on détermine par les conditions initiales c-à-d à $t = 0^+$.

Conditions initiales :

On a déjà vu que **le courant qui traverse un bobine est toujours continue** [1] :

$$i(0^+) = i(0^-)$$

d'où la condition initiale :

$$i(0^+) = I_0$$

Évolution de la tension i :

La tension i est alors :

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{et} \quad u = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

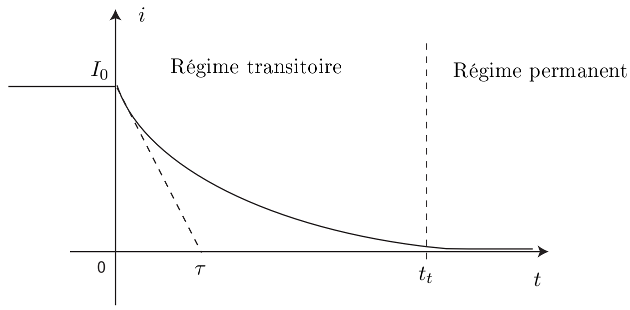

FIGURE 3.5 – Évolution de la tension i en régime libre.

• La constante de temps τ peut être déterminée de manière graphique en traçant la tangente à la courbe à l'origine.

Régime transitoire et régime permanent

• Au début le circuit passe par un régime transitoire pendant quelques τ.

• Après ce régime, le circuit entre dans son régime permanent où $i = 0$.

Remarque : Le seconde membre est une constante, donc en régime permanent, tous les signaux sont constats. Donc si on injecte $i = cte$ dans l'équation différentielle on trouve $i = 0$.

Aspect énergétique :

L'énergie dissipée par effet JOULE dans le résistor R est :

$$\mathcal{E}_m = \int_0^{\infty} Ri^2 \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} RI_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} LI_0^2$$

Cette énergie est l'énergie emmagasinée dans la bobine à l'instant initial. Ceci est dû à la conservation de l'énergie en physique. Cette énergie est intégralement dissipée par effet JOULE dans le résistor (échauffement).

3.2 Circuit d'ordre 2 :RLC série

3.2.1 Montage

But : Étude du régime libre d'un circuit RLC série.

Considérons le montage suivant :
Configuration de LatisPro :

[☞] Lancer le logiciel Latis pro puis faire les configurations suivantes :
- *Entrées analogiques* : sélectionner $EA0$, $EA1$ et $EA4$ et activer le mode différentielle $EA0 - EA4$ (pour visualiser le courant Ri) ;
- *Acquisition* : Temporelle, Normal - 2500 points - Totale = 100 ms ;
- *Source de déclenchement* : choisir EA1 - Seuil 0,2 V - Prétrig = 25% ;

1. Ceci est lié à la continuité de l'énergie en physique. Pour le condensateur $E_e = \frac{1}{2}Li^2$.

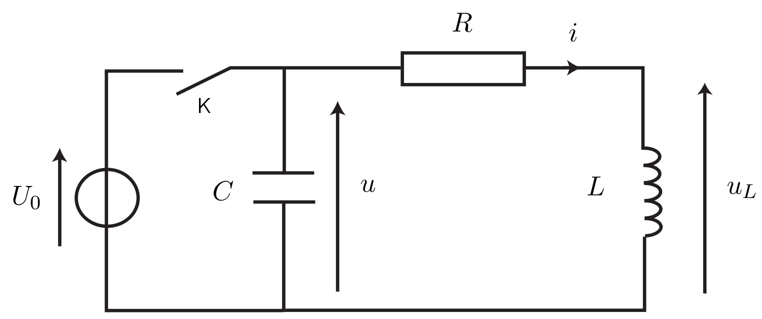

FIGURE 3.6 – Circuit RLC en régime libre.

— Nommer les entrées : u et ri.

[☞] Placer l'interrupteur en position 2 (condensateur déchargé). Appuyer sur la touche F10 du clavier puis basculer, après 2s, l'interrupteur en position 1.

[☞] Faire l'acquisition de la tension u_c et du courant i (Ri).

FIGURE 3.7 – Évolution de la tension u aux bornes de C et du courant i pour : $Q = 0{,}1$ et $Q = 10$.

3.2.2 Modélisation de la tension u_c et du courant i

[☞] Modéliser la courbe $u(t)$ en utilisant l'outil de modélisation de LatisPro.

$$u(t) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

[☞] Modéliser la courbe $Ri(t)$ en déduire celle de $i(t)$.

$$i(t) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

<u>Commentaires :</u>

— c'est une fonction oscillante modulée par une enveloppe exponentielle décroissante.

— Le régime libre est un régime transitoire de temps caractéristique

$$\tau = \dots\dots\dots$$

— La période T de la fonction sinusoïdale est appelée *pesudopériode* du régime libre :

$$T = \dots\dots\dots\dots$$

3.2.3 Justification théorique des résultats

<u>Équation différentielle de la tension u aux bornes de C :</u>

La loi des mailles (pour $t \geq 0$) :

$$-Ri + u - u_L = 0 \quad \rightarrow \quad RC\frac{du}{dt} + u + L\frac{di}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad RC\frac{du}{dt} + u + LC\frac{d^2u}{dt^2} = 0$$

on pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$. L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

— $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la **pulsation propre** du circuit. C'est une pulsation caractéristique qui ne dépend que des propriétés du circuit.
— $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ est le **facteur de qualité** de ce circuit. C'est un nombre sans dimension.

• Le circuit $(R,L,\ C)$ est un circuit du deuxième ordre car son équation différentielle est linéaire d'ordre 2.

• Le seconde membre de l'équation différentielle est nulle, c'est le **régime libre**.

Solution de l'équation différentielle (Utilisation d'un logiciel - Mapleeee) :

l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant réduit :

$$\Delta' = \omega_0^2(\frac{1}{4Q^2} - 1)$$

Suivant les valeurs de Q, les régimes libres sont différents :

Régime apériodique : $Q < \frac{1}{2}$

La solution est :

$$u(t) = A$$

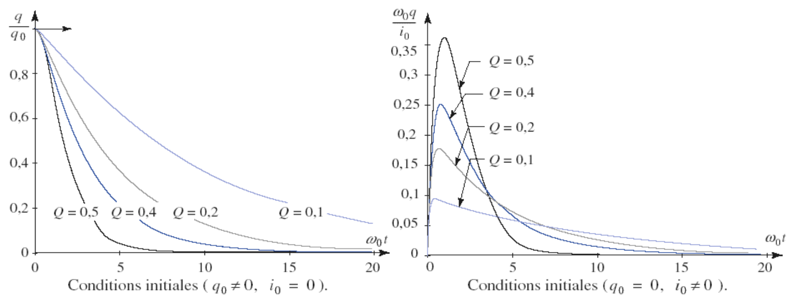

FIGURE 3.8 – Régime apériodique $(Q < 0,5)$et critique $(Q = 0,5)$.

Nous remarquons que la "durée" du régime apériodique (temps pendant lequel u prend des valeurs non négligeables) est d'autant plus grande que Q est proche de 0.

Application :

Déterminer $u(t)$ et $i(t)$ en fonction de Q et ω_0 dans le cas du régime apériodique pour les conditions initiales : $u(0) = u_0$ et $i(0) = 0$ puis $u(0) = 0$ et $i(0) = i_0$.

Régime critique : $Q = \frac{1}{2}$

La solution est :

$$u(t) = (A + Bt)e{-}\omega_0 t$$

$u(t)$ tend vers 0 avec une constante de temps $\tau = \frac{1}{\omega_0}$.

Le régime critique correspond au **régime apériodique de durée minimale**. L'allure des courbes correspondant à ce régime est voisine de celle des régimes apériodiques.

Régime pseudo-périodique $Q > 1/2$

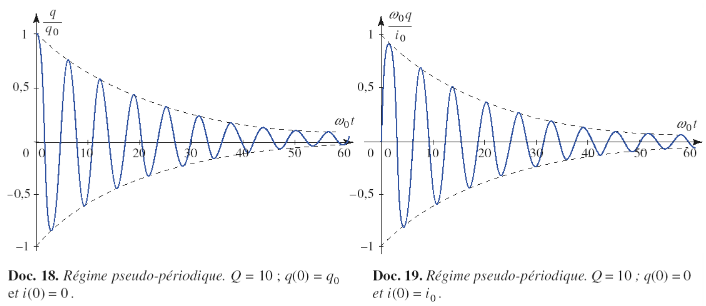

FIGURE 3.9 – Régime pseudopériodique ($Q < 0,5$).

• La solution générale de l'équation différentielle est :

$$u(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$$

c'est une fonction oscillante modulée par une enveloppe exponentielle décroissante.

Le régime libre est un régime transitoire de temps caractéristique $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$. Il en est de même pour les autres grandeurs $i(t)$, $u_L(t)$.

La période T de la fonction sinusoïdale est appelée *pesudopériode* du régime libre. On a :

$$u(t+T) = u(t)e^{-\frac{T}{\tau}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

Nous appelerons *décrément logarithmique* la quantité :

$$\delta = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right) = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

Nous remarquons que le retour vers l'état d'équilibre $u = 0$ est d'autant plus lent que Q est grand et que la pseudo-période diminue quand Q augmente.

Applications :

Application

Etude énergétique :

D'après la loi de mailles on a :

$$Ri + u + L\frac{di}{dt} = 0$$

on multiplie cette équation par i :

$$Ri^2 + ui + L\frac{di}{dt}i = 0 \quad \rightarrow \quad Ri^2 + Cu\frac{du}{dt} + L\frac{di}{dt}i = 0 \quad \rightarrow \quad Ri^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{C}{2}u^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{L}{2}i^2) = 0$$

Le terme
$$E_{em} = \frac{C}{2}u^2 + \frac{L}{2}i^2$$
représente l'énergie emmagasinée dans la bobine et le condensateur.

Cette énergie est dissipée par effet JOULE dans le resistor et le bilan energetique du circuit
$$\frac{\mathrm{d}E_{em}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_j$$
où
$$\mathcal{P}_j = Ri^2$$
est la puissance dissipée dans le résistor.

Cas du régime pseudo-périodique faiblement amorti

Pour un circuit peu amorti ($Q \gg 1$) :
$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0 \qquad et \qquad \tau = 2Q/\omega_0 \gg \omega_0$$
La tension aux bornes du condenstaur s'écrit :
$$u(t) \approx Ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$
Le courant i est :
$$i = C\frac{du}{dt} = -CAe^{-\frac{t}{\tau}}(\frac{1}{\tau}\cos(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)) \approx -CAe^{-\frac{t}{\tau}}\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$$
LŠénergie emmagasinée dans le condensateur et dans la bobine est :
$$E_{em}(t) = \frac{C}{2}u^2 + \frac{L}{2}i^2 = \frac{A^2}{2C}e^{-2\frac{t}{\tau}}$$

FIGURE 3.10 – Décroissance sensiblement exponentielle de l'énergie du circuit lorsque $Q \gg 1$.

En une pseudo-période T, l'énergie dissipée (par effet Joule) vaut :
$$\Delta E_{em} = \frac{A^2}{2C}e^{-2\frac{t}{\tau}}(1 - e^{-2\frac{T}{\tau}} \approx E_{em}\frac{2T}{\tau}$$
d'où :
$$\frac{\Delta E_{em}}{E_{em}} = \frac{2T}{\tau} = \frac{2\pi}{Q}$$
soit :
$$Q = 2\pi\frac{E_{em}}{\Delta E_{em}}$$
avec ΔE_{em} l'énergie perdue pendant une pseudopériode.

Interprétation énergétique du facteur de qualité Q (quand il est grand devant 1) :

Le facteur de qualité est égal a 2π fois l'énergie emmagasinée dans le circuit divisée par l'énergie dissipée pendant une pseudo-période : cette définition peut s'appliquer a tout système physique (oscillateur mécanique, ...).

3.3 Réponse à un échelon de tension

3.3.1 Échelon de tension

3.3.2 Charge d'un condensateur

Tension eux bornes du condensateur

FIGURE 3.11 – Circuit RC soumis à un échelon de tension.

Initialement le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

La loi des mailles pour $t \geq 0$:

$$E = Ri + u \to E = RC\frac{du}{dt} + u \to \tau\frac{du}{dt} + u = E$$

La solution générale est :

$$u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) et i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Il y a un retard (de quelques τ) à l'établissement de la différence de potentiel aux bornes de la capacité.

FIGURE 3.12 – Évolution de la tension aux bornes de la tension.

Bilan énergétique

On multiplie membre à membre la loi des mailles par i :

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{t}(\frac{C}{2}u^2)$$

avec :
- $P_g = Ei$ la puissance fournie par le générateur ;
- $P_R = Ri^2$ la puissance dissipée dans le résistor (par effet JOULE) ;
- $P_C = \frac{d}{t}(\frac{C}{2}u^2)$ la puissance emmagésinée dans le condensateur.

d'où le bilan d'énergie :

$$P_g = P_R + P_C$$

L'énergie totale fournie par le générateur est :

$$E_g = \int_0^\infty P_g dt = E\int_0^\infty i(t)dt = \frac{E^2}{C}$$

C'est le double de l'énergie accumulée dans le condensateur. La moitié de l'énergie fournie par le générateur est donc dissipée par effet Joule dans la résistance.

QR : proposer une méthode pour charger le condensateur avec un minimum de perte d'énergie.

Réponse : Application 6 page 109.

FIGURE 3.13 – Circuit RL soumis à un échelon de tension.

3.3.3 Établissement du courant dans un circuit inductif

Tension eux bornes du condensateur

Initialement le courant i est nulle. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

La loi des mailles pour $t \geq 0$:

$$E = u + Ri \to E = L\frac{di}{dt} + Ri \to \tau\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$$

où $\tau = \frac{R}{L}$ est la constante du temps du circuit.

La solution générale est :

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})etu(t) = \frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Il y a un retard (de quelques τ) à l'établissement du courant dans la bobine.

FIGURE 3.14 – Évolution du courant à travers la bobine.

Bilan énergétique

On multiplie membre à membre la loi des mailles par i :

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{t}(\frac{C}{2}u^2)$$

avec :
— $P_g = Ei$ la puissance fournie par le générateur ;
— $P_R = Ri^2$ la puissance dissipée dans le résistor (par effet JOULE) ;
— $P_C = \frac{d}{t}(\frac{C}{2}u^2)$ la puissance emmagésinée dans le condensateur.

d'où le bilan d'énergie :

$$P_g = P_R + p_C$$

3.3.4 Cas du circuit (R, L, C) série

FIGURE 3.15 – Circuit RLC.

Conditions initiales :

À $t < 0$, l'interrupteur est fermé. La bobine est parcourue par le courant $I_0 = \frac{U_0}{R}$ et le condensateur est chargé sous la tension U_0.

$$i(0^-) = I_0 = \frac{U_0}{R} \qquad \text{et} \qquad u(0^-) = U_0$$

À $t = 0$, ouvre l'interrupteur.

Équation différentielle de la tension u aux bornes de C :

La loi des mailles (pour $t \geq 0$) :

$$-Ri + u - u_L = E \quad \rightarrow \quad RC\frac{du}{dt} + u + L\frac{di}{dt} = E \quad \rightarrow \quad RC\frac{du}{dt} + u + LC\frac{d^2u}{dt^2} = E$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$$

avec :
- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la **pulsation propre** du circuit.
- $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ est le **facteur de qualité** de ce circuit.

La solution de cette équation (utilisation de Maple !) :

FIGURE 3.16 – Circuit RLC - Réponse à un échelon de tension.

3.4 Applications (TD)