# Chapitre 5

# Circuits en régime sinusoidale

## 5.1 Approximation des régimes quasi-permanents (ARQP)

On dit qu'on est en **régime continu** lorsque toutes les grandeurs (intensités et tensions) sont indépendantes du temps.
On parle de **régime variable** quand les grandeurs dépendent du temps : $i = i(t)$ et $u = u(t)$.

En régime hautement variable (hautes fréquances) on constate par exemple que le courant $i(t)$ n'a pas la même valeur dans un circuit série (il dépend du temps et de l'espace!). Ceci est dû au phénomène de propagation.

Le temps de propagation d'un signal (courant ou tension) dans un circuit de longueur $L$ est : $\Delta t = L/c$ ($c = 3.10^8$ m/s). Si les temps caractéristiques du circuit (période $T$, temps de montée du signal, temps d'acquisition des mesures, etc) sont grands devant $\Delta t$ , les phénomènes de propagation sont négligeables.
Soit :

$$T \gg \Delta t \rightarrow T \gg L/c \rightarrow \lambda = cT \gg L$$

où $\lambda = cT$ est la longueur d'onde du signal.

> ***Conclusion :***
>
> **Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)**
> $\Updownarrow$
> La longueur d'onde ($\lambda$) $\gg$ La taille du circuit ($L$)

*Application au laboratoire d'électronique :*

- taille des circuits $L \sim 1$ m
- fréquence maximale des GBF $F \sim 10$ MHz $\rightarrow \lambda = cT = \frac{c}{F} \sim 30$ m $\gg L$

on est bien dans l'ARQS ($i = i(t)$ et $u = u(t)$).

**Remarque** : Toutes les expériences de travaux pratiques d'électricité et d'électronique sont réalisées dans le cadre de l'A.R.Q.S ou en régime continu.

## 5.2 Signaux périodiques

### 5.2.1 Signal sinusoïdal

#### 5.2.1.1 Présentation

un signal sinusoïdal $u(t)$ (un courant ou une tension) s'écrit sous la forme :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

avec :
- $U_m$ : l'amplitude du signal ;
- $\omega$ : la pulsation (rad.s$^{-1}$) ;
- $f = \frac{\omega}{2\pi}$ est la fréquence (Hz) ;
- $T = \frac{1}{f}$ la période (s) ;
- $\varphi = \omega t + \varphi_0$ est la phase à l'instant $t$ et $\varphi_0$ est la phase à l'origine du temps.

#### 5.2.1.2 Notation complexe

À un signal sinusoïdal (réel) $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ correspond un signal complexe $\underline{x}(t)$ :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \qquad \rightarrow \qquad \underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

La grandeur $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ est appelée : **amplitude complexe**.

Si on calcule la grandeur complexe $\underline{x}(t)$, la valeur réelle du signal physique s'obtient simplement en écrivant :

$$x(t) = \Re[\underline{x}(t)]$$

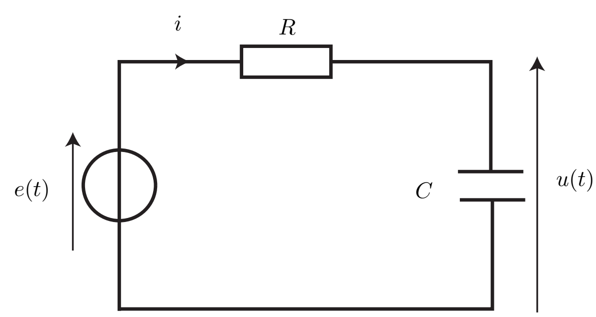
et on aussi :

$$X_m = |\underline{X}_m| \qquad \text{et} \qquad \varphi = \arg(\underline{X}_m)$$

**Intérêt de la notation complexe :** Permet de **faciliter** les calculs mathématiques lorsqu'il s'agit d'*opérations linéaires* (addition, soustraction, dérivation, intégration,...). En effet :

$$\frac{\mathrm{d}\underline{x}(t)}{\mathrm{d}t} = j\omega \underline{x}(t) \qquad \text{et} \qquad \int \underline{x}(t)\mathrm{d}t = \frac{\underline{x}(t)}{j\omega}$$

**Exemple** : Calculer la tension u(t) en régime permanent.




On donne : $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

**Méthode utilisant les notations réelles :**

D'après la loi des mailles, l'équation différentielle de $u$ est :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{e}{\tau}$$

La solution générale (voir annexe) de cette équation est :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

avec :

$$u_h(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

est la solution homogène. $U_0$ est une constante qu'on peut déterminer en utilisant les conditions initiales.

et

$$u_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

est la solution particulière.

Pour déterminer $A$ et $B$, on injecte $u_p$ dans l'équation différentielle.

$$(-A\omega + \frac{B}{\tau})\sin(\omega t) + (B\omega + \frac{A}{\tau})\cos(\omega t) = \frac{E_0}{\tau}\cos(\omega t)$$

En identifiant les coefficients du cosinus et du sinus, on obtient :

$$A = \frac{E_0}{1 + (\tau\omega)^2} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{\tau\omega E_0}{1 + (\tau\omega)^2}$$

d'où la solution générale :

$$u(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_0}{1 + (\tau\omega)^2}[\tau\omega\sin(\omega t) + \cos(\omega t)]$$

En régime permanent ($t \gg \tau$), la solution est :

$$u(t) = \frac{E_0}{1 + (\tau\omega)^2}[\tau\omega\sin(\omega t) + \cos(\omega t)]$$

**Méthode utilisant les notations complexe :**

En régime permanent, la solution a la même forme que le seconde membre, donc $u(t)$ sera sinusoïdale et on peut donc utiliser la notation complexe.
L'équation différentielle en notation complexe s'écrit :

$$\tau\frac{d\underline{u}}{dt} + \underline{u} = \underline{e} = E_0 e^{j\omega t}$$

soit :

$$j\omega\tau\underline{u} + \underline{u} = E_0 e^{j\omega t}$$

d'où :

$$\underline{u} = \frac{E_0}{1 + j\tau\omega}e^{j\omega t} = E_0\frac{(1 - j\tau\omega)}{(1 + (\tau\omega)^2)}[\cos(j\omega t) + j\sin(j\omega t)]$$

En revenant à la notation réelle :

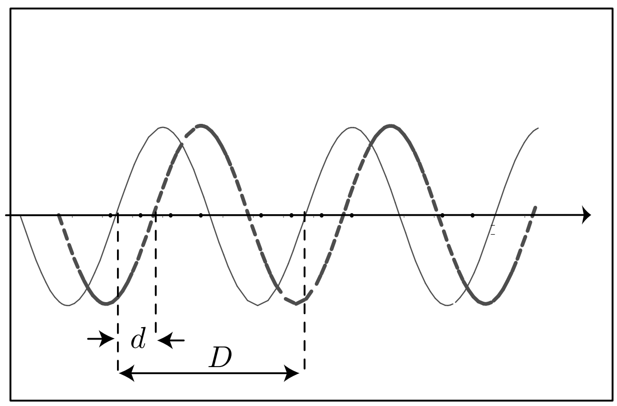
$$u(t) = \Re[\underline{u}] = \frac{E_0}{1+(\tau\omega)^2}[\tau\omega\sin(\omega t) + \cos(\omega t)]$$

On constate sur cet exemple simple, que l'utilisation de la notation complexe facilite les calculs.

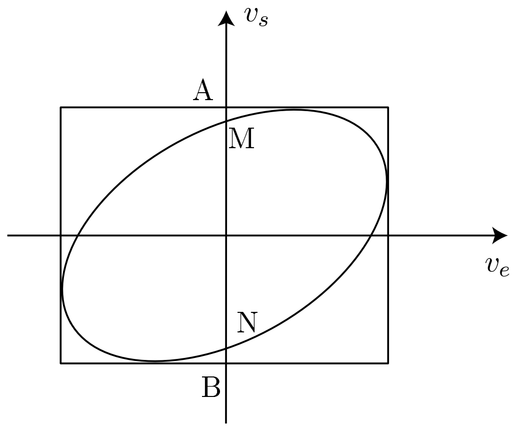
**Attention : on ne peut utiliser la notation complexe qu'en régime sinusoïdal.**

#### 5.2.1.3 Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

Il y a deux méthodes pour déterminer le déphasage entre deux signaux synchrones : Méthode temporelle (mode bi-courbe) et méthode "XY".




Mode Bi-courbe




Mode XY

FIGURE 5.1 – Mesure du déphasage

Le déphasage entre les deux signaux est :
✓ en mode bi-courbe

$$\boxed{\varphi = 2\pi\frac{d}{D}}$$

✓ en mode "XY" :

$$\boxed{|\sin(\varphi)| = \frac{MN}{AB}}$$

#### 5.2.1.4 Représentation de Fresnel

À la notation complexe $\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{X}e^{j(\omega t)}$ on associe une représentation vectorielle dite représentation de FRESNEL.
Dans le plan complexe $(\Im, \Re)$, on trace, à un instant $t$, un vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que :
- $OM = |\underline{X}| = X_m$ (aplitude)
- $(\widehat{Ox, OM}) = \omega t + \varphi$ (phase à l'instant $t$)

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur tournant dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire constante $\omega$ autour de l'origine et dont le module vaut l'amplitude $X_m$. Ce vecteur est appelé *vecteur de* FRESNEL.ÍEn

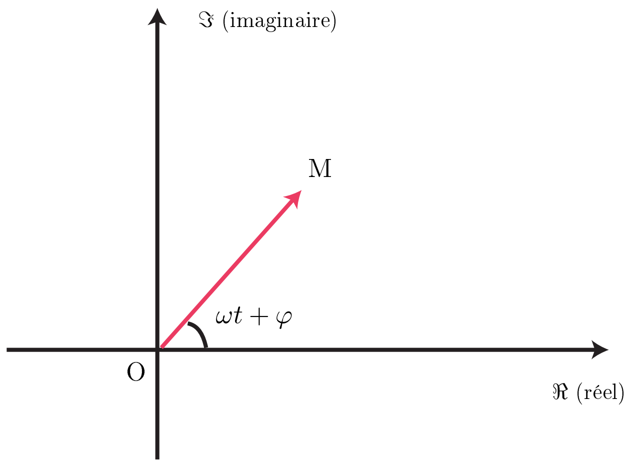



FIGURE 5.2 – Représentation de FRESNEL d'un **signal sinusoïdal**.

général, on le représente à l'instant $t = 0$.

**Remarque :** Une telle représentation offre l'avantage de donner une visualisation géométrique afin d'alléger les calculs.

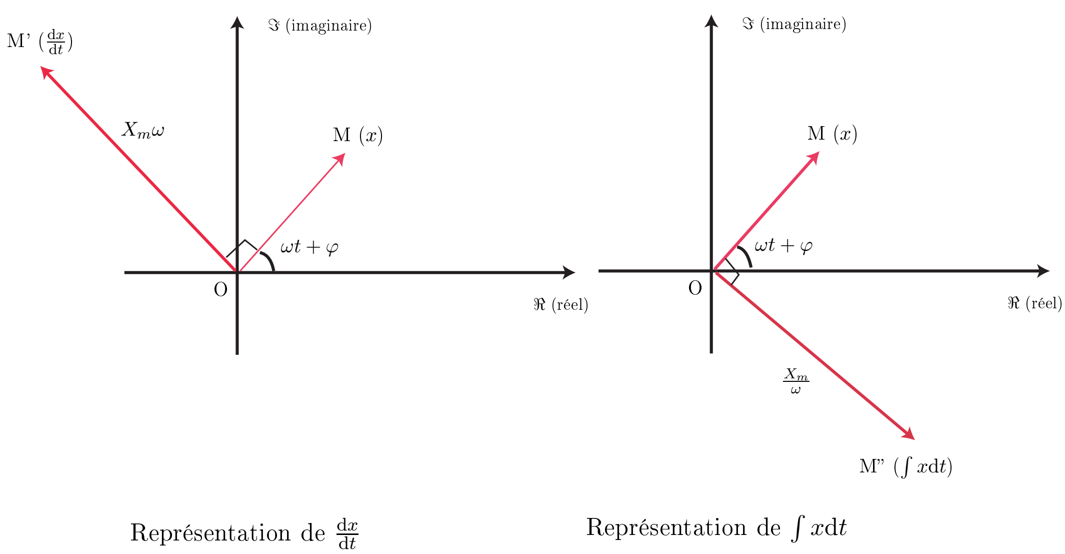



FIGURE 5.3 – Représentation de FRESNEL de la dérivée et de l'intégrale d'un signal.

**Représentation de la dérivée d'un signal.**

$$\frac{dx}{dt} = -X_m\omega \sin(\omega t + \varphi) = X_m\omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

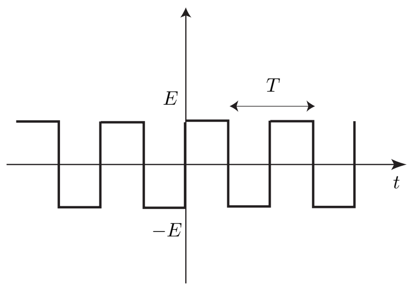
Le vecteur de FRESNEL a pour module $\omega X_m$ et pour phase initiale $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Il s'agit donc du vecteur représentant $x(t)$ auquel on a fait subir une homothétie de centre O et de rapport $\omega$ puis une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique.

**Représentation de l'intégrale d'un signal.**

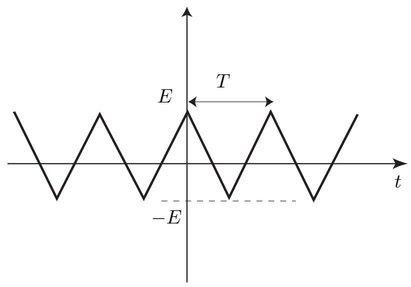
$$\int x(t)dt = \frac{X_m}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) = \frac{X_m}{\omega}\cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

Le vecteur de FRESNEL a pour module $\frac{X_m}{\omega}$ et pour phase initiale $\varphi - \frac{\pi}{2}$. Il s'agit donc du vecteur représentant $x(t)$ auquel on a fait subir une homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{\omega}$ puis une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens des aiguilles d'une montre.
**Application TD2**

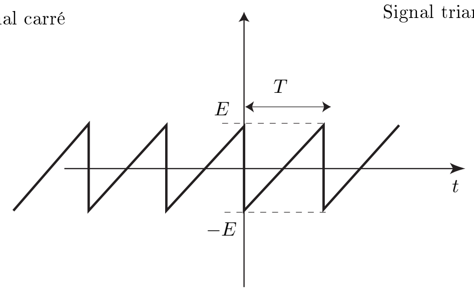
### 5.2.2 Autres formes des signaux électrique



Signal carré

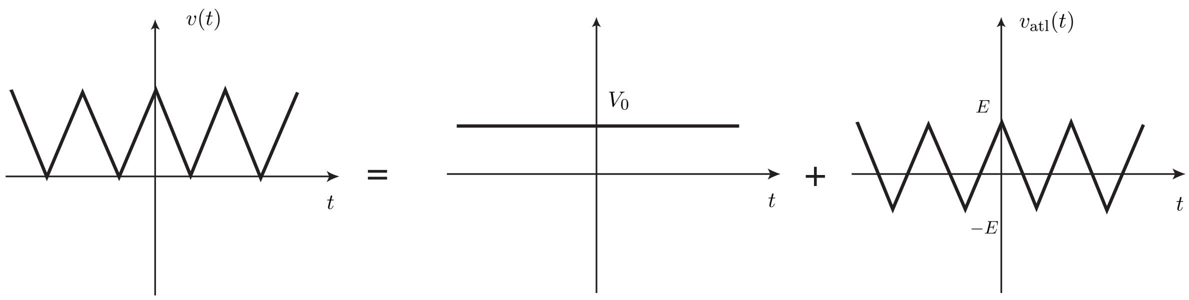


Signal triangulaire



Signal en dent de scie

Un signal électrique périodique quelconque peut être décomposé en somme de deux signaux distincts : la composante continue (valeur moyenne) et la composante alternative.




Signal électrique complet $v(t)$ = composante continue ($V_0$) + composante alternative ($v_{\text{atl}}(t)$)

$$v(t) = V_0 + v_{\text{atl}}(t)$$

La valeur moyenne $V_0$ est :

$$V_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\mathrm{d}t$$

La valeur efficace de $v(t)$ est :

$$V_e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t)\mathrm{d}t}$$

Cette valeur est appelée parfois valeur TRMS [1] (voir TP).

**Exemples 1 : Signal sinusoïdal.**

$$v(t) = V_m\cos(\omega t+\varphi_0) \to V_e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_m^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)\mathrm{d}t} \quad \to \quad V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

**Exemples 2 : Signal carré.**

$$V_e = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} E^2\mathrm{d}t} \quad \to \quad V_e = E$$

**Exemples 3 : Signal triangulaire.**

$$v(t) = \frac{2E}{T}t \to V_e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v^2(t)\mathrm{d}t} \quad \to \quad V_e = \frac{E}{\sqrt{3}}$$

**Remarque :** La valeur efficace de $v_{\mathrm{atl}}(t)$ :

$$RMS = V_e' = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v_{\mathrm{atl}}^2(t)(t)\mathrm{d}t}$$

est appelée valeur RMS (voir TP).

**Expérience :** Visualisation des signaux et Mesure des grandeurs caractéristiques.
Liste du matériel :
- GBF ;
- Oscilloscope ;
- Multimètre ;
- Fils.

## 5.3 Circuits en régime sinusoïdal

### 5.3.1 Impédance complexe

#### 5.3.1.1 Définition

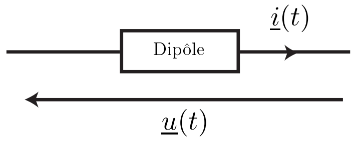
Considérons un dipôle linéaire passif. En régime harmonique, il est parcouru par un courant sinusoïdal de la forme :

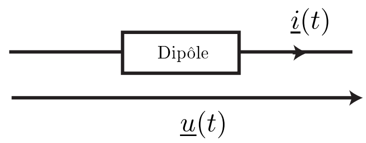
$$i(t) = I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$$

et la tension à ses bornes est de la forme :

$$u(t) = U_m\cos(\omega t+\varphi_u)$$

1. TRMS : True Root Mean Square




En notation complexe :

$$\underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t} \qquad \text{et} \qquad \underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t}$$

L'impédance complexe du dipôle est la grandeur complexe :

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m}$$

avec :
- $|\underline{Z}(j\omega)| = \frac{U_m}{I_m}$ est l'impédance du dipôle ;
- $\arg(\underline{Z}(j\omega)) = \varphi(\omega) = \varphi_u - \varphi_i$ est le déphasage de la tension par rapport au courant.

L'admittance complexe du dipôle est :

$$\underline{Y}(j\omega) = \frac{1}{\underline{Z}(j\omega)}$$

#### 5.3.1.2 Exemples

**5.3.1.2.1 Résistor** La tension aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance $R$ parcouru par un courant est $i(t)$ est :

$$u(t) = Ri(t) \quad \rightarrow \quad \underline{u}(t) = R\underline{i}(t) \quad \rightarrow \quad \underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

d'où :

$$\underline{Z}(j\omega) = R$$

la tension et le courant sont en phase.

**5.3.1.2.2 Bobine** La tension aux bornes d'une bobine d'inductance $L$ parcouru par un courant est $i(t)$ est :

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad \underline{u}(t) = L\frac{d\underline{i}(t)}{dt} = Lj\omega\underline{i}(t) \quad \rightarrow \quad \underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

d'où :

$$\underline{Z}(j\omega) = jL\omega$$

Le module $Z = L\omega$ est d'autant plus élevé que la fréquence est élevée. En haute fréquence, elle se comporte comme un interrupteur ouvert ($Z \rightarrow \infty$). En revanche, en très basse fréquence, elle se comporte comme un interrupteur fermé ($Z \rightarrow 0$).

L'argument de $\underline{Z}(j\omega)$ est $\varphi = \frac{\pi}{2}$ : La tension est en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant.

**5.3.1.2.3 Condensateur** La tension aux bornes d'un condensateur de capacité $C$ est relié au courant qui lui parcourt par :

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad \underline{i}(t) = C\frac{d\underline{u}(t)}{dt} = Cj\omega\underline{u}(t) \quad \rightarrow \quad \underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

d'où :

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{1}{jC\omega}$$

Le module $Z = \frac{1}{C\omega}$ est d'autant plus faible que la fréquence est élevée. En haute fréquence, elle se comporte comme un interrupteur fermé ($Z \to 0$). En revanche, en très basse fréquence, elle se comporte comme un interrupteur ouvert ($Z \to \infty$).

L'argument de $\underline{Z}(j\omega)$ est $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ : La tension est en retard de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant.

#### 5.3.1.3 Association des impédances

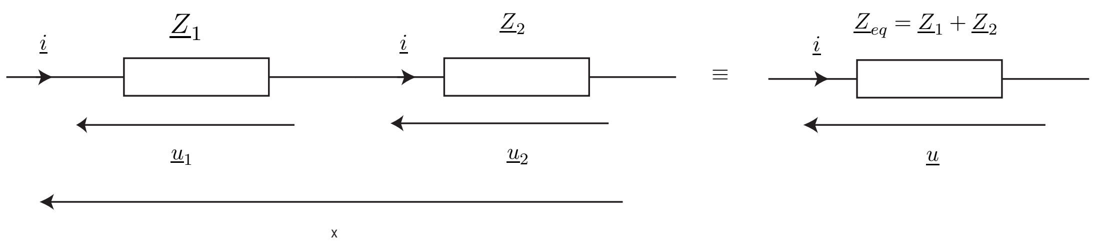



FIGURE 5.4 – Association série de deux dipôles.

##### 5.3.1.3.1 Association série

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_k \underline{Z}_k$$

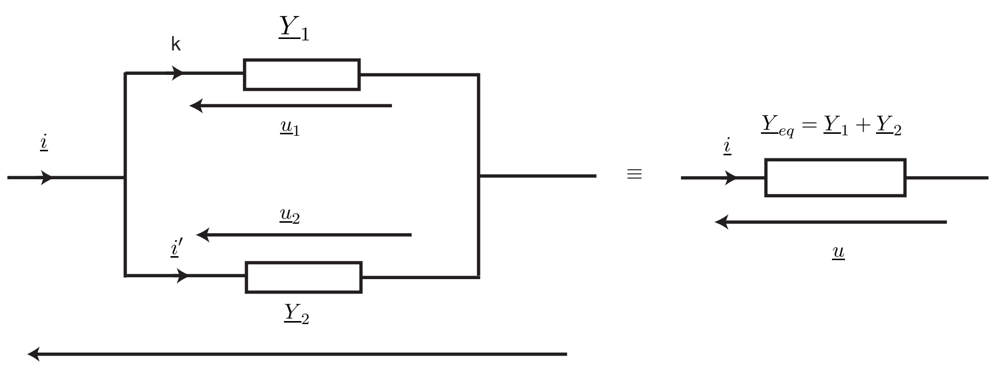



FIGURE 5.5 – Association série de deux dipôles.

##### 5.3.1.3.2 Association parallèle

$$\underline{Y}_{eq} = \sum_k \underline{Y}_k$$

##### 5.3.1.3.3 Applications : Angle de pertes d'une bobine + ....

#### 5.3.1.4 Diviseur de tension-Diviseur de courant

La différence de potentiel aux bornes d'un dipôle en fonction de celle aux bornes de l'association des dipôles en **<u>série</u>** :

$$\underline{u}_2 = \underline{u}\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

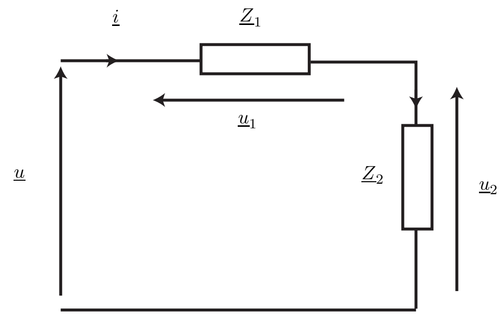



FIGURE 5.6 – Deux impédances en **série** forment un diviseur de tension.

Le courant qui traverse une impédance dans une association des dipôles en **parallèle** :

$$\underline{I}_2 = \underline{I}\frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$$

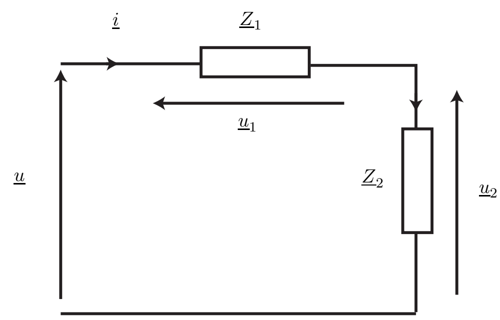



FIGURE 5.7 – Deux impédances en **parallèle** forment un diviseur de courant.

**Application : sonde atténuatrice passive d'oscilloscope**

### 5.3.2 Problème : Circuit RLC en régime sinusoïdal

Considérons un circuit $(R, L, C)$ série soumis à une excitation sinusoïdale délivrée par un générateur basse fréquence. Nous supposerons que le générateur délivre, à partir de l'instant $t = 0$, la tension $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

*1.* Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant $i$. On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$.

*2.* Déterminer la solution générale de cette équation. Mettre en évidence un régime transitoire et un régime permanent.

*3.* Déterminer les réponses en courant et charge du circuit en régime permanent.

*4.* Déterminer la pulsation de résonance en courant. Quelle le déphasage entre le courant $i$ et la tension excitatrice $e$ ?

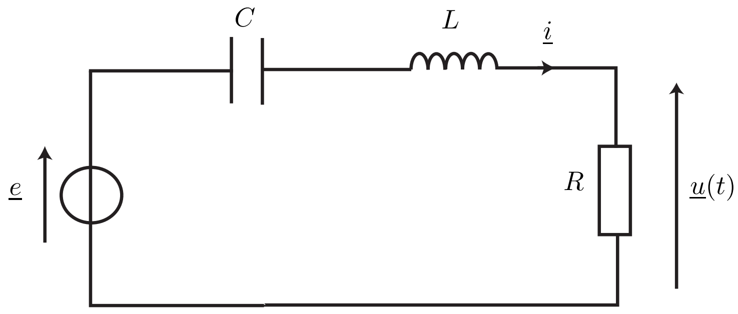



Figure 5.8 – Circuit RLC série en régime forcé.

***5.*** Déterminer la pulsation de résonance en tension $u$. Quelle le déphasage entre la tension $u$ et la tension excitatrice $e$ ?

## 5.4 Complément : Décomposition d'un signal en série de Fourier (TP)

#### 5.4.0.1 Décomposition en série de Fourier (DSF)

Soit $u(t)$ une fonction périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. D'après le théorème de Fourier (voir cours de mathématiques) permet d'écrire cette fonction sous la forme :

$$u(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

où :
- $V_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$ : valeur moyenne de $u$.
- $a_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega t)dt$
- $b_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)dt$

Le premier terme $n = 1$ est appelé le **fondamental**. Les autres termes ($n \geq 2$) sont appelés les **harmoniques**.

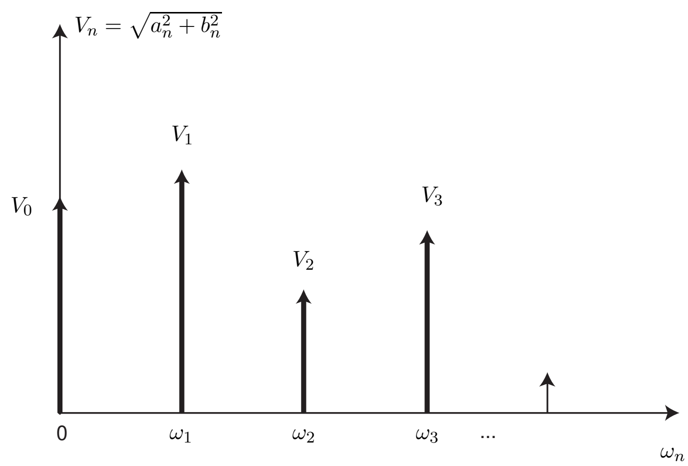
On peut également écrire la DSF de $u$ sous la forme

$$u(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} V_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

où :
- $V_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
- $\tan(\varphi_n) = -\frac{b_n}{a_n}$

#### 5.4.0.2 Spectre d'un signal

Le spectre en amplitude du signal $u$ est la représentation graphique de $V_n$ en fonction de $n$ (ou $\omega_n = n\omega$ ou $f_n = nf$)




On peut utiliser la carte d'acquisition (SP5) ou l'oscilloscope pour visualiser le spectre des signaux :
**Propriétés :**
- si la fonction $u$ est paire alors $b_n = 0$
- si la fonction $u$ est impaire alors $a_n = 0$
- si la fonction $u$ est symétrique par rapport à l'axe $t$ alors $V_0 = 0$.

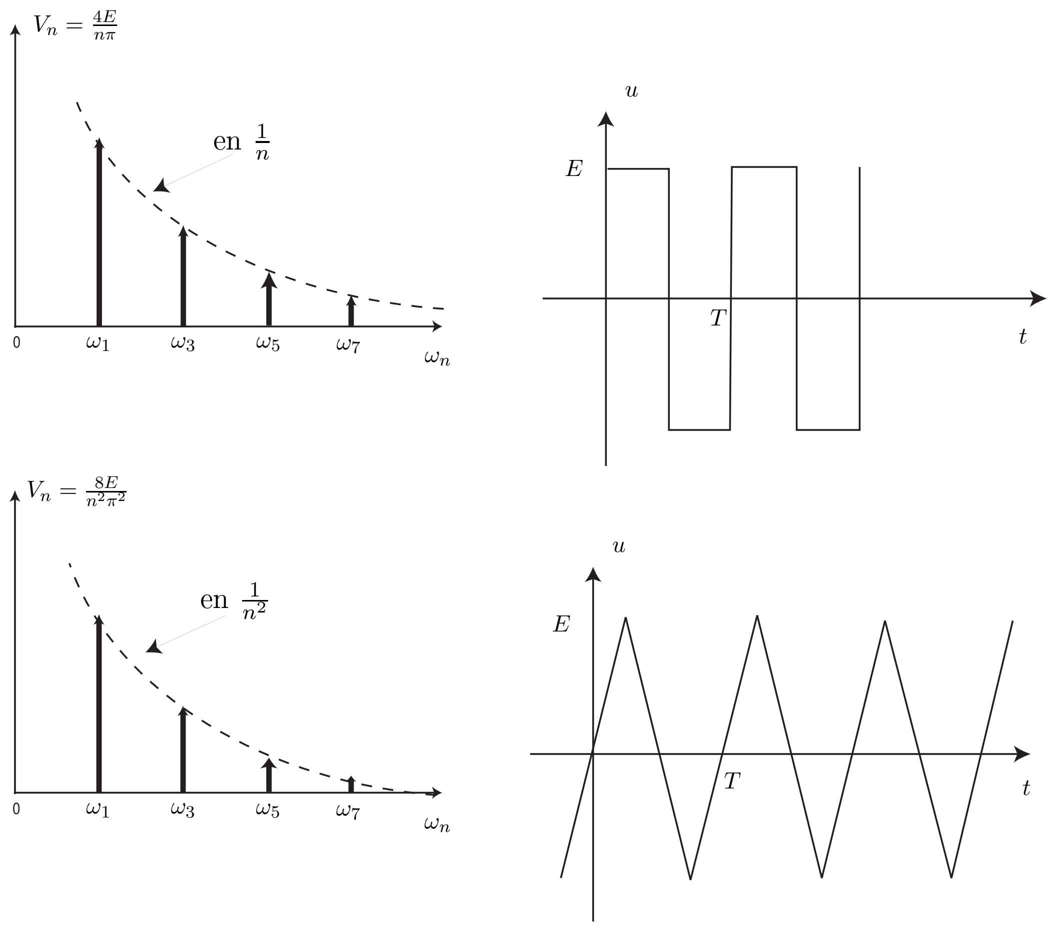



FIGURE 5.9 – Exemple de spectres.

#### 5.4.0.3 Théorème de PARSEVAL

On peut calculer la valeur efficace du signal $u$ à partir de son DSF :

$$U_e = \sqrt{V_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{V_n^2}{2}}$$

c'est le théorème de PARSEVAL.