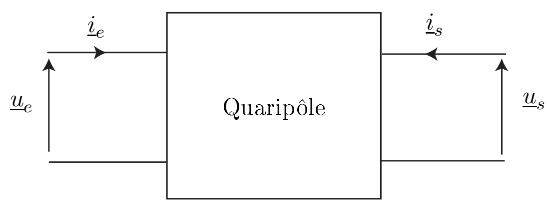
Chapitre 8

Filtres analogiques

8.1 Fonction de transfert d'un filtre

8.1.1 Définition

Un quadripôle est un circuit qui présente deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie.



- $\underline{u}_e$ et $\underline{i}_e$ sont respectivement la tension et le courant d'entrée.
- $\underline{u}_s$ et $\underline{i}_s$ sont respectivement la tension et le courant de sortie.

On régime harmonique on définit la fonction de transfert harmonique de ce quadripôle par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$$

ω est la pulsation du travail.

Un ***filtre*** est un quadripôle conçu pour transmettre sélectivement les diverses fréquences de la grandeur harmonique.

Lorsque le filre est linéaire, sa fonction de transfert s'écrit toujours sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

où $N(j\omega)$ et $D(j\omega)$ sont deux polynômes à coefficients réels.

L'*ordre du filtre* est égal au degré le *plus élevé* de ces deux polynômes.

La fonction de transfert peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

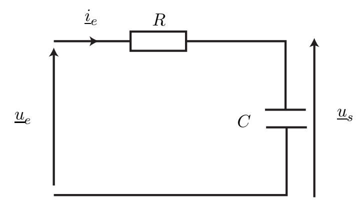
où

— $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ est le gain du filtre ;
— $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$ est la déphasage entre la tension d'entrée et celle de sortie.

Remarque : La fonction de transfert du quadripôle ne peut être définie que si le système est stable

8.1.2 Exemple

Considérons le circuit (R, C représenté sur la figure suivante, il est alimenté par un générateur sinusoïdal. La fonction de transfert de ce quadripôle est :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Z}_c}{R + \underline{Z}_c} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Ce circuit est appelé filtre car il transmet différemment des signaux harmoniques de fréquences différentes.

8.1.3 Gain en décibel

Le gain en décibel est :

$$G_{\text{db}}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|$$

L'utilisation de l'échelle logarithmique permet de traiter avec autant de précision les faibles et les fortes amplitudes : la multiplication par 10 de H se traduit par un accroissement du gain de 20 dB, quelle que soit sa valeur initiale.

Par définition, une décade est un intervalle de fréquences $[f_1, f_2]$ tel que :

$$\frac{f_1}{f_2} = 10 \quad \text{ou} \quad \log(f_2) - \log(f_1) = 1$$

ou bien :

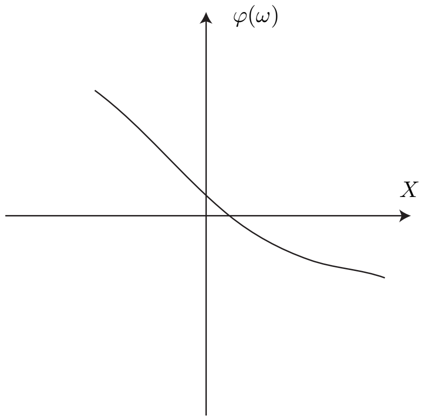
$$\text{décade} = [f, 10f] \quad ; \quad \forall f$$

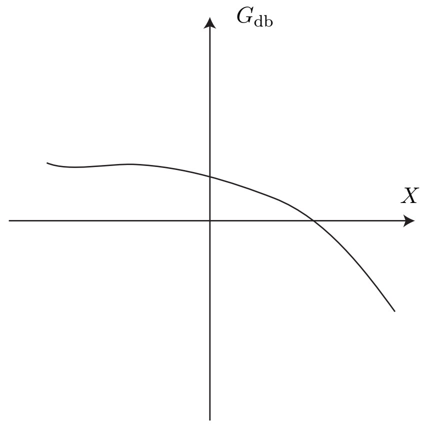
Le gain en puissance est :

$$G_{p(\text{db})} = 10 \log \frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_e}$$

8.1.4 Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est la représentation graphique des deux courbes suivante :
— la courbe de réponse en gain : $G_{\text{db}}(\omega)$ en fonction de $X = \log(\omega)$ (ou $X = \log(f)$) ;
— la courbe de réponse en phase : $\varphi(\omega)$ en fonction de $X = \log(\omega)$ (ou $X = \log(f)$).





8.1.5 Fréquence de coupure

Pour un filtre donné, on définit une fréquence de coupure f_c pour laquelle le gain diminue d'une certaine quantité (devient négligeable).

Souvent on choisit une fréquence de coupure à -3 dB définie par :

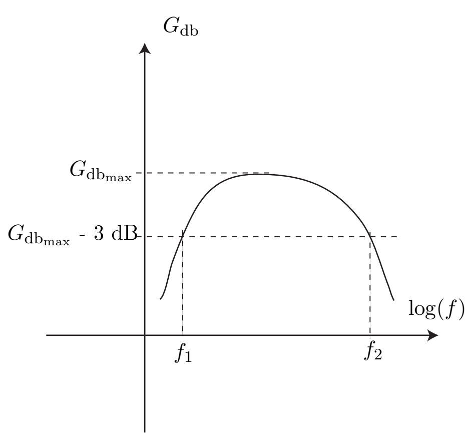
$$G_{\mathrm{db}}(f_c) = G_{\mathrm{db_{max}}} - 3dB \qquad \Leftrightarrow \qquad H(f_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

où $H_{\max}$ est la valeur maximale du gain.

8.1.6 Bande passante

La bande passante d'un filtre est l'ensemble des fréquences telles que :

$$G_{\mathrm{db}}(f) \geq G_{\mathrm{db}}(f_c) = G_{\mathrm{db_{max}}} - 3dB \qquad \Leftrightarrow \qquad H(f) \geq H(f_c)$$



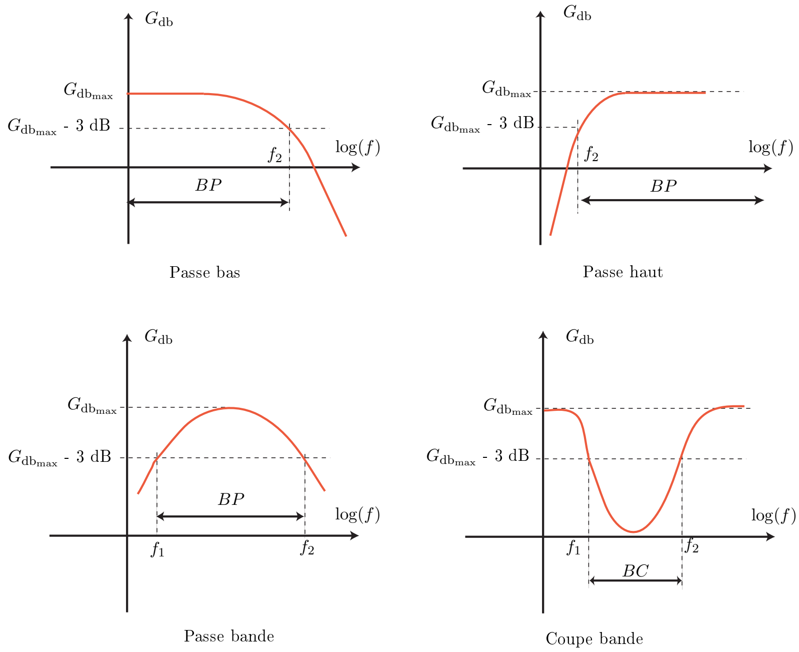
La bande passante est :

$$BP = [f_1, f_2]$$

On considérera qu'un filtre coupe les composantes du signal dont la pulsation est hors bande passante et laisse passer celles dont la pulsation est dans la bande passante.

8.1.7 Types de filtres

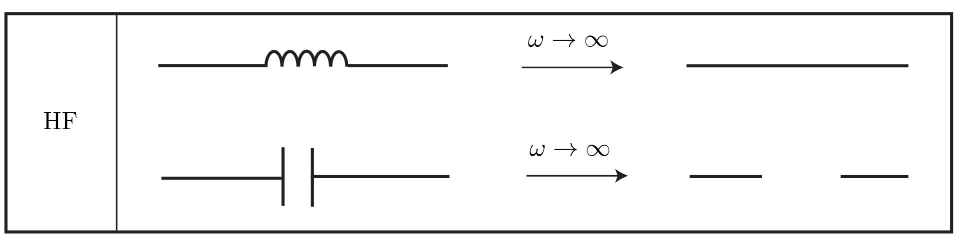
Selon la forme de la courbe du gain on peut distinguer plusieurs types de filtres (voir figure) :

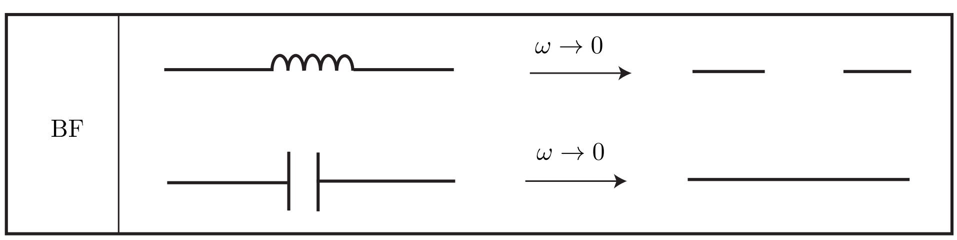


où :
- BP : Bande passante ;
- BC : Bande coupée ;
- f_1 et f_2 : les fréquences de coupure.

8.1.8 Nature du filtre

On peut déterminer la nature du filtre sans calculer sa fonction de transfert en étudiant son comportement en hautes fréquences (HF) et en basses fréquences (BF). Pour cela on utilise les propriétés suivantes :





En haute fréquences ($\omega \to \infty$) :
- $|Z_L| = L\omega \to \infty$: la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.

— $|Z_c| = \frac{1}{C\omega} \to 0$: le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé

En basse fréquences ($\omega \to 0$) :

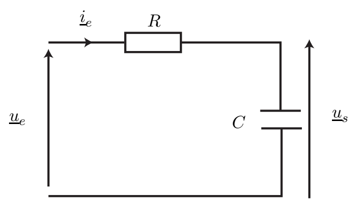
— $|Z_L| = L\omega \to 0$: la bobine se comporte comme un interrupteur fermé.

— $|Z_c| = \frac{1}{C\omega} \to \infty$: le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert

8.2 Applications

8.2.1 Filtre passe-bas d'ordre 1

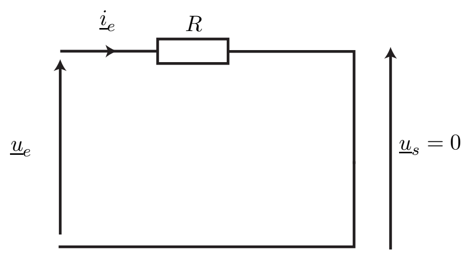
Considérons le circuit (R, C) suivant :



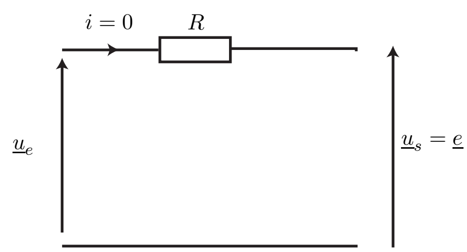
Nature du filtre :

— En hautes fréquences le condensateur se comporte comme un fil : $\underline{u}_s = 0$ (voir figure).

— En basse fréquences le condensateur se comporte comme un circuit ouvert : $\underline{u}_s = \underline{e}$.



HF



BF

C'est un filtre passe-bas.

Fonction de transfert :

On peut utiliser la formule diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \frac{Z_c}{R + Z_c}\underline{u}_e$$

d'où la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

On peut déterminer la nature du filtre à partir de sa fonction de transfert :

— En HF ($\omega \gg \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \to 0$: $\underline{u}_s = 0$

— En BF ($\omega \ll \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \to 1$: $\underline{u}_s = \underline{e}$

Donc le filtre est un filtre passe bas.

Le module de la fonction de transfert :

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}$$

Le gain en décibel est :

$$G_{\mathrm{dB}} = 20\log(H) \qquad \to \qquad G_{\mathrm{dB}} = -10\log[1+(\omega/\omega_0)^2]$$

La phase φ est :

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = -\arctan(\frac{\omega}{\omega_0})$$

Équation différentielle :

En utilisant les propriété de la notation complexe on peut déduire facilement l'équation différentielle à partir de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} \qquad \to \qquad \underline{u}_s + j\frac{\omega}{\omega_0}\underline{u}_s = \underline{u}_e$$

on passe à la notation réelle :

$$u_s + RC\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} = u_e$$

c'est l'équation différentielle de u_s.

Pulsation de coupure :

La pulsation de coupure ω_c est solution de l'équation :

$$|\underline{H}(j\omega_c)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

avec $H_{\max} = 1$, soit :

$$\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Diagramme asymptotique :

• Le diagramme asymptotique est la représentation graphique des asymptotes de la fonction G_{dB}.
  — En HF : $G_{\mathrm{dB}} \approx -20\log[\omega/\omega_0]$. C'est une droite de pente -20 dB/décade.
  — En BF : $G_{\mathrm{dB}} \approx -20\log[1] = 0$. C'est une droite horizontale ($y = 0$).

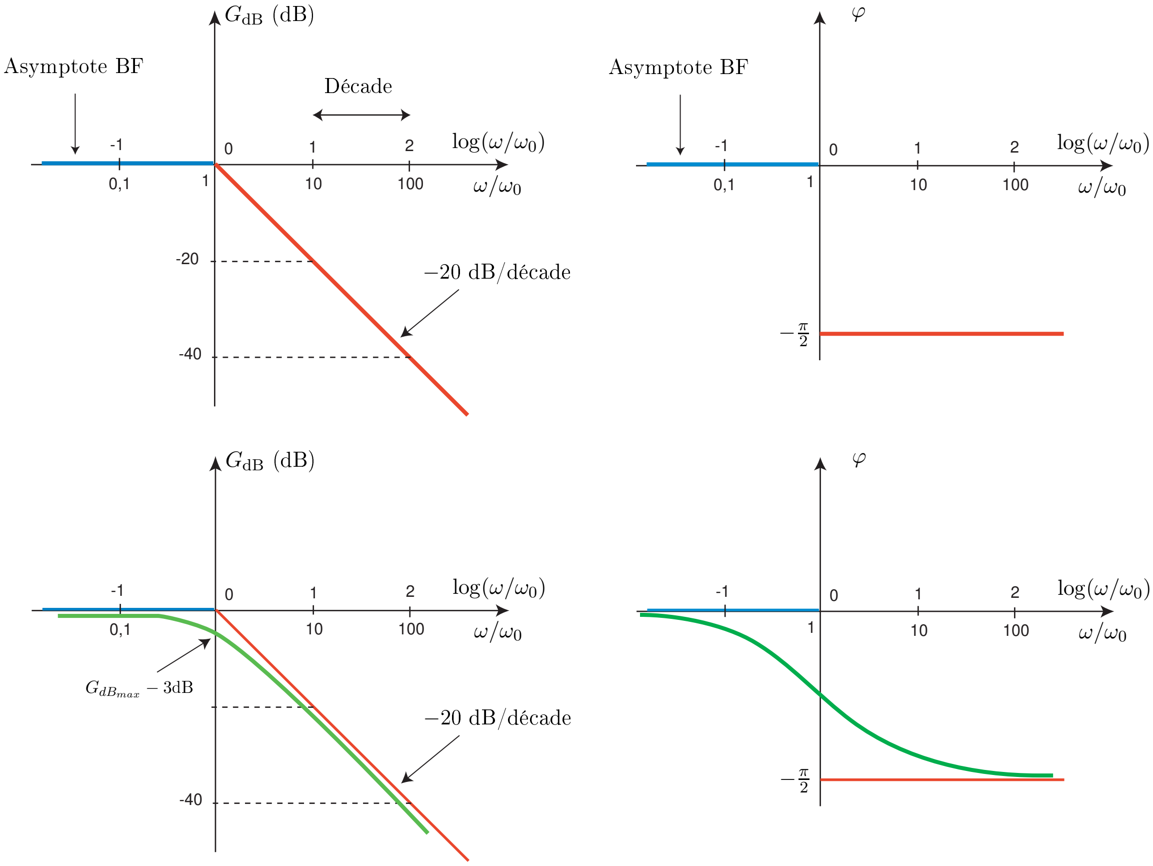
• Le diagramme asymptotique de la phase :
  — En HF : $\varphi(\omega) \approx -\frac{\pi}{2}$. C'est une droite horizontale ($y = -\frac{\pi}{2}$).
  — En BF : $\varphi(\omega) \approx 0$. C'est une droite horizontale ($y = 0$).

Maintenant, on peut tracer le diagramme de BODE réel (figure) :

Comportement intégrateur de ce filtre :

La tension de sortie d'un intégrateur est :

$$u_s = A\int u_e dt \qquad \to \qquad \underline{u}_s = A\int \underline{u}_e dt \qquad \to \qquad \underline{u}_s = A\frac{1}{j\omega}\underline{u}_e$$



où A est une constante qui dépend des éléments du circuit.

donc la fonction de transfert d'un intégrateur est :

$$\underline{H}_i(j\omega) = \frac{A}{j\omega}$$

Le gain en décibel de l'intégrateur est un droite de pente -20 dB/décade.

Dans le cas du circuit RC en haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$), la fonction de transfert devient :

$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{j\omega}$$

donc, le circuit RC se comporte comme un intégrateur lorsque $\omega \gg \omega_0 = \frac{1}{RC}$.

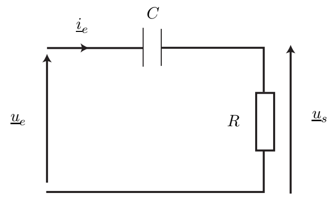
Si ω_0 est assez faible, la bande passante du circuit RC devient très étroite et par conséquence le filtre ne laisse passer que la composante continue ($\omega \approx 0$). Le circuit se comporte comme un circuit moyenneur :

$$u_s = < u_e >$$

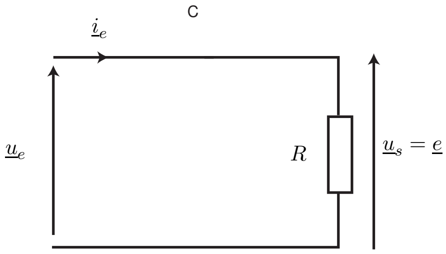
8.2.2 Filtre passe-haut d'ordre 1

Considérons le circuit (C, R) suivant :

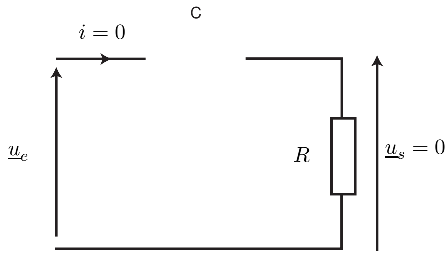
Nature du filtre :



- En hautes fréquences le condensateur se comporte comme un fil : $\underline{u}_s = \underline{e}$ (voir figure).
- En basse fréquences le condensateur se comporte comme un circuit ouvert : $\underline{u}_s = 0$.



HF



BF

C'est un filtre passe-haut.

Fonction de transfert :

On peut utiliser la formule diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \frac{R}{R + Z_c}\underline{u}_e$$

d'où la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

On peut déterminer la nature du filtre à partir de sa fonction de transfert :
- En HF ($\omega \gg \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \to 1$: $\underline{u}_s = \underline{u}_e$
- En BF ($\omega \ll \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \to 1$: $\underline{u}_s = 0$

Donc le filtre est un filtre passe haut.

Le module de la fonction de transfert :

$$H(\omega) = \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$

Le gain en décibel est :

$$G_{\text{dB}} = 20\log(H) \quad \to \quad G_{\text{dB}} = 20\log(\omega/\omega_0) - 10\log[1 + (\omega/\omega_0)^2]$$

La phase φ est :

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{\omega}{\omega_0})$$

Pulsation de coupure :

La pulsation de coupure ω_c est solution de l'équation :

$$|\underline{H}(j\omega_c)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

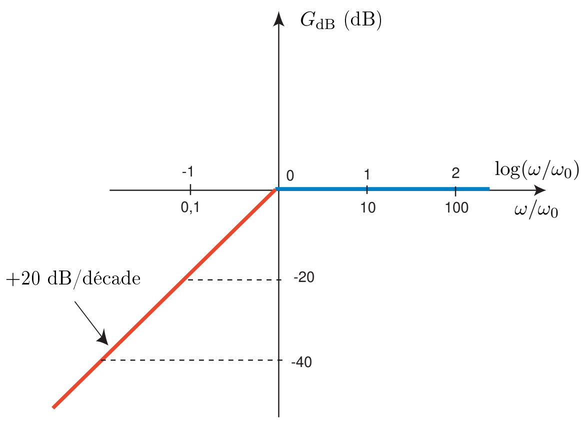
avec $H_{\max} = 1$, soit :

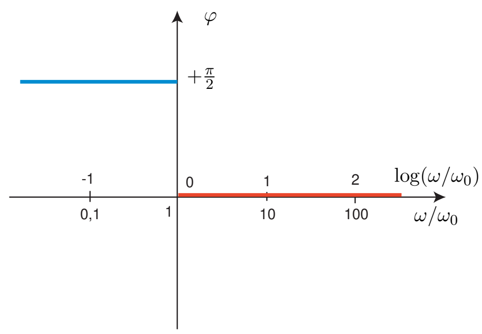
$$\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Diagramme asymptotique :

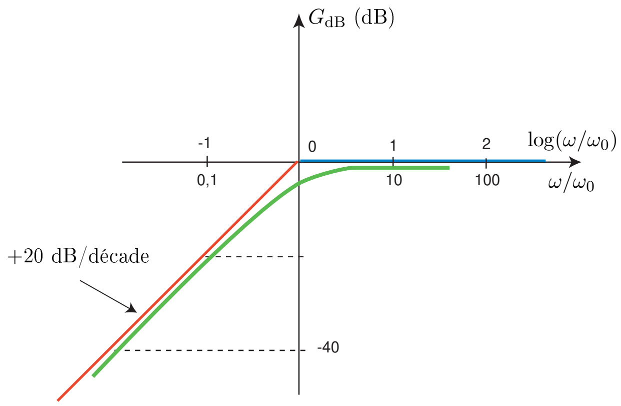
• Le diagramme asymptotique est la représentation graphique des asymptotes de la fonction G_{dB}.
- En HF : $G_{\text{dB}} \approx 0$. C'est une droite horizontale .
- En BF : $G_{\text{dB}} \approx +20\log[\omega/\omega_0]$. C'est une droite de pente $+20$ dB/décade.

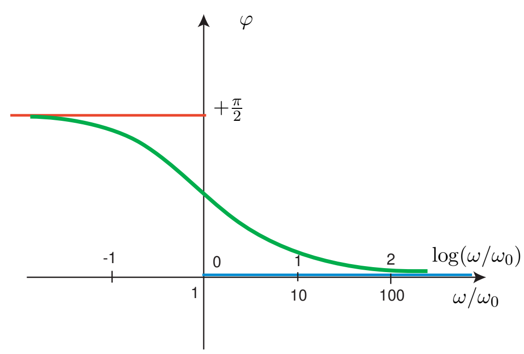
• Le diagramme asymptotique de la phase :
- En HF : $\varphi(\omega) \approx 0$. C'est une droite horizontale ($y = 0$).
- En BF : $\varphi(\omega) \approx \frac{\pi}{2}$. C'est une droite horizontale ($y = \frac{\pi}{2}$).





Maintenant, on peut tracer le diagramme de Bode réel (figure) :





Comportement dérivateur de ce filtre :

La tension de sortie d'un dérivateur est :

$$u_s = A\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t} \qquad \rightarrow \qquad \underline{u}_s = A\frac{\mathrm{d}\underline{u}_e}{\mathrm{d}t} \qquad \rightarrow \qquad \underline{u}_s = Aj\omega\underline{u}_e$$

où A est une constante qui dépend des éléments du circuit.

donc la fonction de transfert d'un intégrateur est :

$$\underline{H}_i(j\omega) = Aj\omega$$

Le gain en décibel du dérivateur est un droite de pente +20 dB/décade.

Dans le cas du circuit CR en basse fréquences ($\omega \ll \omega_0$), la fonction de transfert devient :

$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{j\omega}{\omega_0}$$

donc, le circuit CR se comporte comme un dérivateur lorsque $\omega \ll \omega_0 = \frac{1}{RC}$

8.2.3 Autres filtres (TD)

Annexe : Calcul opérationnel des circuits

Le but de ce paragraphe est d'introduire une méthode d'étude des circuits électriques dans un régime quelconque. Pour cela, on va utiliser une variable $p = \nu + j\omega$ et utiliser la transformée de LAPLACE. En régime sinusoïdal on a $\nu = 0$ donc $p = j\omega$. On retrouve alors les résultats précédents.

8.2.4 Transformée de LAPLACE

8.2.4.1 Définition

Soit $f(t)$ une fonction qui commence à $t = 0$ (càd : $f(t < 0) = 0$). On appelle transformée de LAPLACE (TL) de $f(t)$ la fonction de la variable complexe p définie par :

$$\boxed{F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t}$$

On va noter la TL par :

$$F(p) = TL[f(t)]$$

La transformée de **Laplace** inverse de $F(p)$ sera notée TL^{-1} :

$$f(t) = TL^{-1}[F(p)]$$

En conclusion :

$$\boxed{F(p) = TL[f(t)] \qquad \Leftrightarrow \qquad f(t) = TL^{-1}[F(p)]}$$

Remarque : la variable p s'écrit :

$$p = \nu + j\omega$$

en régime sinusoïdal on a $\nu = 0$ donc $p = j\omega$. On retrouve alors les résultats précédents.

8.2.4.2 Propriétés

• Linéarité :

$$TL[af(t) + bg(t)] = a \times TL[f(t)] + b \times TL[g(t)]$$

• Cas d'une translation $u(t - t_0)$ (retard temporel) :

$$TL[u(t - t_0)] = e^{-pt_0}TL[u(t)]$$

• TL de la dérivée de $f(t)$:

$$\text{si : } F(p) = TL[f(t)] \qquad \Rightarrow \qquad TL[f'(t)] = pF(p) - \mathbf{f(0)}$$

$f(0)$ est une **condition initiale** de $f(t)$.

Si $f(0) = 0$, alors la dérivée dans l'espace t correspond à une multiplication par p dans l'espace p :

$$TL\left[\frac{df}{dt}\right] = pF(p)$$

et on a alors :

$$TL\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n F(p)$$

• TL de la primitive de $f(t)$:

$$\text{si : } F(p) = TL[f(t)] \quad \Rightarrow \quad TL\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{F(p)}{p}$$

Une intégration dans l'espace t correspond à une division par p dans l'espace p.

• Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$$

• Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0^+} pF(p)$$

8.2.4.3 Exemples

• TL d'une tension échelon $u(t)$:

$$U(p) = TL[u(t)] = \frac{E}{p}$$

• TL d'une tension rampe $u(t) = \alpha t$:

$$U(p) = TL[u(t)] = \frac{\alpha}{p^2}$$

• TL d'une tension sinusoïdale de la forme $u(t) = V_m \cos(\omega t)$:

$$u(t) = V_m \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad U(p) = TL[u(t)] = V_m \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

• TL d'une tension sinusoïdale de la forme $u(t) = V_m \sin(\omega t)$:

$$u(t) = V_m \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad U(p) = TL[u(t)] = V_m \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

• TL d'une impulsion de Dirac :

$$U(p) = TL[u(t)] = 1$$

• TL d'une tension amortie $u(t)e^{-\lambda t}$:

$$TL[e^{-\lambda t}u(t)] = U(p + \lambda)$$

Une multiplication par $e^{-\lambda t}$ dans l'espace t correspond à une translation de λ dans l'espace p.

Exemple : Tension sinusoïdale amortie :

$$u(t) = e^{-\lambda t} V_m \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad U(p) = V_m \frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$$

8.2.4.4 Inversion

Pour retrouver $f(t)$ à partir de $F(p)$, on va utiliser les transformées de Laplace des fonctions simples données dans le tableau en annexe.

Exemple : Considérons un circuit dont la TL du courant qui y circule est

$$I(p) = \frac{E}{R} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}$$

alors

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

8.2.5 Utilisation de la TL pour l'étude des circuits

8.2.5.1 Impédance opérationnelle

Un dipôle linéaire est caractérisé par un équation différentielle linéaire à coefficient constants qui relie $u(t)$ et $i(t)$. Quelle est alors la relation entre $U(p)$ et $I(p)$?

✓ Pour une résistance :

$$u(t) = Ri(t) \quad \Rightarrow \quad U(p) = RI(p)$$

✓ Pour une inductance :

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad U(p) = LpI(p) - Li(0)$$

$Li(0)$ la condition initiale représentée dans l'espace des p.
✓ Pour un condensateur :

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad I(p) = CpU(p) - Cu(0)$$

$Cu(0)$ la condition initiale représentée dans l'espace des p.
On définit l'impédance (opérationnelle) par :

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)}$$

alors :
- Résisance : $Z(p) = R$;
- Inductance : $Z(p) = Lp$ (si i(0)=0) ;
- Condansateur : : $Z(p) = \frac{1}{Cp}$ (si u(0)=0).

Dans le cas du régime sinusoïdal $p = j\omega$, on retrouve :

$$\underline{Z}_R = R \;\; ; \;\; \underline{Z}_L = jL\omega \quad ; \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

Pour un quadripôle, la fonction de transfert opérationnelle (ou transmittance opérationnelle) en régime permanent est :

$$H(p) = \frac{E(p)}{S(p)}$$

avec :
- $E(p)$ est la TL de la tension d'entrée $v_e(t)$
- $S(p)$ est la TL de la tension de sortie $v_s(t)$.

En régime sinusoïdal on retrouve : $H(p) = \underline{H}(j\omega)$.