Chapitre 1

Cinétique d'un système de points matériels

1 Propriétés d'un système matériel

1.1 Centre de masse G

a–. Définition

Dans un référentiel $\mathcal{R}$, considérons un système fermé Σ de point matériels discrètes M_i de masse m_i : $\{M_i(m_i)\}$.
Le **centre de masse** G (ou centre d'inertie ou barycentre) du système Σ est défini par l'équation suivante :

$$\boxed{\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \overrightarrow{0}} \tag{1}$$

si O est un point quelconque, alors :

$$\sum_i m_i \, (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}_i) = \overrightarrow{0}$$

soit :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \, \overrightarrow{OM}_i} \tag{2}$$

où $m = \sum\limits_i m_i$ est la masse totale du système.

Le centre de masse G d'un système continu, où la masse est est répartie de manière continue dans un volume V, est donné par :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \iiint\limits_V \rho(M) \, \overrightarrow{OM} \, \mathrm{d}\tau(M)} \tag{3}$$

Le centre d'inertie d'un système homogène se trouve sur ses éléments de symétrie (plan, axe).
Exemple : le centre d'inertie d'une tige homogène est à son milieu.

b-. Exemple

Calculer le centre de masse d'un cône homogène de sommet O, de base cylindrique circulaire de rayon R et de hauteur h.

Réponse : symétrie $\Rightarrow G \in (Oz)$; $OG = z_G = \frac{3h}{4}$.

Remarque : la dérivé de l'équation 2 donne :

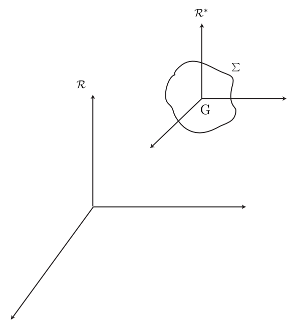
$$\boxed{\overrightarrow{v}(G) = \frac{1}{m} \sum_i m_i \, \overrightarrow{v}_i} \tag{4}$$

1.2 Référentiel barycentrique

Soit un système Σ, de centre d'inertie G, dans un référentiel $\mathcal{R}$.

Par définition, **le référentiel barycentrique** $\mathcal{R}^*$ du système (relatif au référentiel $\mathcal{R}$) est le référentiel en **translation** par rapport $\mathcal{R}$ et dans lequel **G est fixe**.

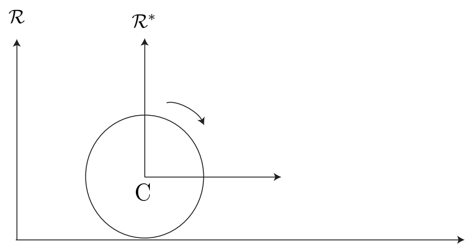
$$\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}) = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{v}(G/\mathcal{R}^*) = \overrightarrow{0}\end{array}} \tag{5}$$



Remarque 1 : tout vecteur lié à $\mathcal{R}^*$ est fixe dans $\mathcal{R}$.

Remarque 2 : La vitesse d'entrainment d'un point M_i quelconque dans $\mathcal{R}^*$ est $\overrightarrow{v}_e(M_i) = \overrightarrow{v}(G/\mathcal{R})$ (tout les points ont la même vitesse d'entrainement dans le référentiel barycentrique car il est en translation).

Exemple :



Le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ du cerceau est en translation à la vitesse $\overrightarrow{v}(G/\mathcal{R})$.

2 Résultante cinétique d'un système

Considérons un système de points matériels $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$, où $\overrightarrow{v}_i = \overrightarrow{v}(M_i/\mathcal{R})$ sont les vitesses des points M_i dans $\mathcal{R}$.

✓ La **résultante cinétique** (ou quantité de mouvement totale) du système dans $\mathcal{R}$ est :

$$\boxed{\overrightarrow{P} = \sum_i m_i \overrightarrow{v}_i} \tag{6}$$

$\Rightarrow$

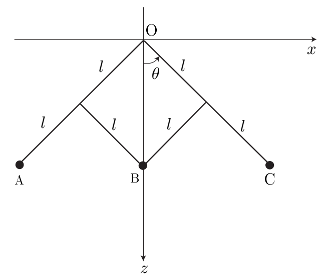
$$\overrightarrow{P} = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\overrightarrow{OG}\right) = m\overrightarrow{v}(G)$$

soit :

$$\boxed{\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{v}(G/\mathcal{R})} \tag{7}$$

Elle est égale à la quantité de mouvement d'un point matériel **fictif** situé en G et affecté de la masse totale du système ("le point matériel G")
Application :

Considérons le système schématisé ci-contre. Les tiges ont la même longueur l et des masses négligeables. Les points matériels A, B et C ont la même masse m. On repère la position du système par l'angle θ.
Calculer la résultante cinétique du système.



Réponse : $\overrightarrow{P} = -ml\dot{\theta}\sin\theta\,\overrightarrow{e}_z$.

✓ La **résultante cinétique** du système dans son référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ est :

$$\overrightarrow{P}^* = m\overrightarrow{v}(G/\mathcal{R}^*) = \overrightarrow{0}$$

soit :

$$\boxed{\overrightarrow{P}^* = \overrightarrow{0}} \tag{8}$$

Remarque : le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ est un référentiel en translation dans $\mathcal{R}$ et dans lequel la résultante cinétique du système est nulle.

3 Moment cinétique d'un système

3.1 Définition

Le **moment cinétique** $\overrightarrow{L}_A$, en un point A, du système $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est :

$$\boxed{\overrightarrow{L}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i\,\overrightarrow{v}_i} \tag{9}$$

où : $\overrightarrow{v}_i = \overrightarrow{v}(M_i/\mathcal{R})$.

Entre deux point A et B on :

$$\overrightarrow{L}_B = \sum_i \overrightarrow{BM}_i \wedge m_i\overrightarrow{v}_i = \sum_i \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}_i\right) \wedge m_i\overrightarrow{v}_i = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i\overrightarrow{v}_i + \overrightarrow{BA}\wedge \underbrace{\sum_i m_i\overrightarrow{v}_i}_{\overrightarrow{P}} = \overrightarrow{L}_A + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{P}$$

d'où la relation entre les moments cinétiques en deux point A et B :

$$\boxed{\overrightarrow{L}_B = \overrightarrow{L}_A + \overrightarrow{P}\wedge\overrightarrow{AB}} \tag{10}$$

Pour un système continu, le moment cinétique $\overrightarrow{L}_A$ est donnée par :

$$\boxed{\overrightarrow{L}_A = \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})\mathrm{d}m} \tag{11}$$

Le moment cinétique, en A, dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ est :

$$\boxed{\overrightarrow{L}^*_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i\overrightarrow{v}(M_i/\mathcal{R}^*)} \tag{12}$$

Il est indépendant du point A où on le calcule.
En effet, le moment cinétique barycentrique en un point B est :

$$\overrightarrow{L}_B^* = \sum_i \overrightarrow{BM}_i \wedge m_i \overrightarrow{v}_i^* = \sum_i \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}_i\right) \wedge m_i \overrightarrow{v}_i^* = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \overrightarrow{v}_i^* + \underbrace{\sum_i \overrightarrow{BA} \wedge m_i \overrightarrow{v}_i^*}_{\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{L}_A^*$$

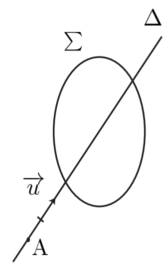
Application

Un cerceau homogène de centre O, de masse m et de rayon a tourne à vitesse angulaire constante ω autour de son axe fixe. Calculer son moment cinétique en O.

Réponse : $\overrightarrow{L}_O = m\, a^2\, \omega\, \overrightarrow{e}_z$.

3.2 Moment cinétique par rapport à un axe Δ

Le moment cinétique L_Δ du système par rapport à un axe Δ est la projection du moment cinétique $\overrightarrow{L}_A$ sur cet axe.



$$\boxed{L_\Delta = \overrightarrow{L}_A . \overrightarrow{u}} \tag{13}$$

où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire de l'axe Δ et A est un point quelconque de Δ ($A \in \Delta$).

Ce moment cinétique est indépendant du choix du point A.

3.3 Théorème de Kœnig pour le moment cinétique

Ce théorème relie les moments cinétiques $\overrightarrow{L}_O$ dans $\mathcal{R}$et le moment cinétique barycentrique $\overrightarrow{L}^*$.

Le moment cinétique, en un point O, du système $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ dans $\mathcal{R}$ est :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L}_O &= \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i\, \overrightarrow{v}(M_i/\mathcal{R}) \\
&= \sum_i (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_i) \wedge m_i\, [\overrightarrow{v}(M_i/\mathcal{R}^*) + \overrightarrow{v}_e(M_i)] \\
&= \sum_i (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_i) \wedge m_i \left[\underbrace{\overrightarrow{v}(M_i/\mathcal{R}^*)}_{\overrightarrow{v}_i^*} + \overrightarrow{v}(G)\right] \\
&= \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{v}(G) \underbrace{\sum_i m_i}_{=m} + \underbrace{\sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge m_i \overrightarrow{v}_i^*}_{=\overrightarrow{L}_G^*} + \overrightarrow{OG} \wedge \underbrace{\sum_i m_i \overrightarrow{v}_i^*}_{\overrightarrow{P}^*=\overrightarrow{0}} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i\right)}_{=\overrightarrow{0}} \wedge \overrightarrow{v}(G)
\end{aligned}$$

d'où le théorème de Kœnig pour le moment cinétique :

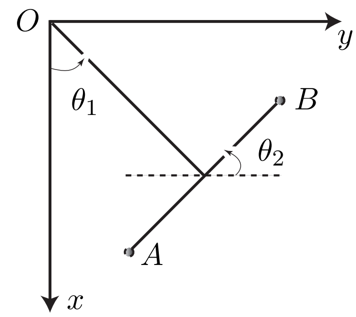
$$\boxed{\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{L}_G^* + \overrightarrow{OG} \wedge m\, \overrightarrow{v}(G/\mathcal{R})} \tag{14}$$

Le terme $\boxed{\overrightarrow{OG} \wedge m\, \overrightarrow{v}(G/\mathcal{R})}$ représente le moment cinétique en O du "point matériel G" dans $\mathcal{R}$.

Remarque : si $O \equiv G$ alors :

$$\boxed{\overrightarrow{L}_G = \overrightarrow{L}^*_G}$$

3.4 Application



Deux boules identiques, assimilable à deux points matériels de masse m, sont fixées aux deux extrémités d'une barre AB de masse négligeable et de longueur l. Cette barre, astreinte à rester dans le plan (Ox, Oy), est articulée en G à une tige OG de masse négligeable et de longueur a. Le mouvement est repéré par les angles θ_1 et θ_2.

1. *Calculer le moment cinétique $\overrightarrow{L}_O$ du système en fonction de m, a, l, $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.*

Réponse : $\overrightarrow{L}_O = m(2l^2\dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}a^2\dot{\theta}_2)\overrightarrow{e}_z$

4 Énergie cinétique

4.1 Définition

L'énergie cinétique du système $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est :

$$\boxed{E_c = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \overrightarrow{v}^2(M_i/\mathcal{R})} \tag{15}$$

Pour un système continu :

$$\boxed{E_c = \tfrac{1}{2} \iiint_\Sigma \overrightarrow{v}^2(M/\mathcal{R})\mathrm{d}m} \tag{16}$$

4.2 Théorème de Kœnig pour l'énergie cinétique

Ce théorème relie l'énergie cinétique E_c du système dans un référentiel $\mathcal{R}$ à l'énergie cinétique E_c^* dans $\mathcal{R}^*$.

L'énergie cinétique du système $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ dans $\mathcal{R}$ est :

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v}^2(M_i/\mathcal{R}) \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\overrightarrow{v}^*_i + \overrightarrow{v}(G/\mathcal{R})\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m \overrightarrow{v}^2(G/\mathcal{R}) + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v}^{*2}_i}_{E_c^*} + \overrightarrow{v}(G/\mathcal{R}) \underbrace{\sum_i m_i \overrightarrow{v}^*_i}_{\overrightarrow{0}} \end{aligned}$$

L'énergie cinétique dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ est :

$$E_c^* = \sum_i \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v}^{*2}_i$$

d'où le théorème de KŒNIG pour l'énergie cinétique :

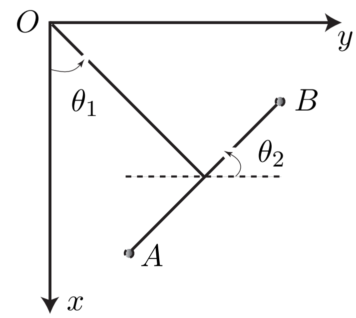
$$\boxed{E_c = E_c^* + \frac{1}{2} m \overrightarrow{v}^2(G/\mathcal{R})} \qquad (17)$$

Le terme $\boxed{\frac{1}{2} m \overrightarrow{v}^2(G/\mathcal{R})}$ représente l'énergie cinétique du "point matériel G" dans $\mathcal{R}$.

Application

Deux boules identiques, assimilable à deux points matériels de masse m, sont fixées aux deux extrémités d'une barre AB de masse négligeable et de longueur l. Cette barre, astreinte à rester dans le plan (Ox, Oy), est articulée en G à une tige OG de masse négligeable et de longueur a. Le mouvement est repéré par les angles θ_1 et θ_2.

1. *Calculer l'énergie cinétique E_c du système en fonction de m, a, l, $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.*



Réponses :

Remarque : Parmi les grandeurs d'un système on trouve aussi :

— la résultante dynamique : $\overrightarrow{S} = \sum_i m_i \overrightarrow{a}_i = m\overrightarrow{a}(G)$

— le moment dynamique en un point A : $\overrightarrow{D}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \overrightarrow{a}_i$

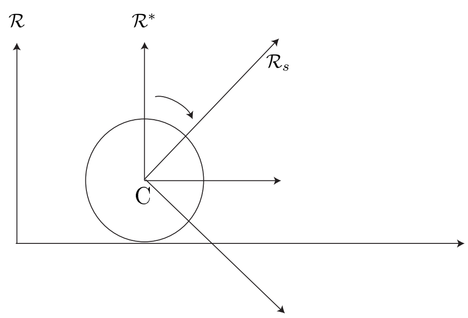
5 Cinétique d'un système solide

5.1 Définition

Un système solide (S) est corps indéformable, c-à-d, la distance entre deux points quelconques A et B de ce corps reste constante au cours du temps :

$$\boxed{S \text{ est un solide} \Rightarrow \forall A, B \in S : AB = \text{constante}}$$

Au solide S on peut associer un référentiel $\mathcal{R}_s$ dont l'origine est un point quelconque de S.



Le référentiel $\mathcal{R}_s$ est lié au solide.

5.2 Champ des vitesses d'un solide

Soit un solide S qui se déplace dans un référentiel $\mathcal{R}$ et considérons deux point A et B de ce solide (fixes dans $\mathcal{R}_s$).
La vitesse du point B dans le référentiel $\mathcal{R}$ est :

$$\begin{aligned}
\vec{v}(B/\mathcal{R}) &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})}{\mathrm{d}t}\right|_{/\mathcal{R}} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{/\mathcal{R}} \\
&= \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{/\mathcal{R}}
\end{aligned}$$

or on sait que :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{/\mathcal{R}_s} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$$

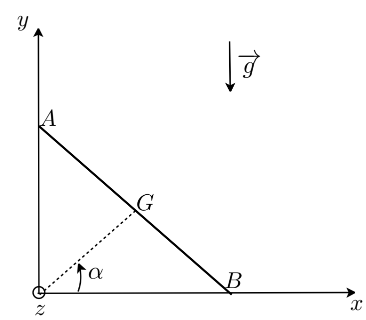
et puisque $\overrightarrow{AB}$ est fixe dans $\mathcal{R}_s$, il vient :

$$\boxed{\vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}} \tag{18}$$

avec : $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ est la vitesse de rotation de $\mathcal{R}_s$ (donc de S) dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Application

Une barre AB homogène de masse m, de longueur 2b et de centre G, milieu de AB, est posée sur le sol horizontal et repose contre un mur vertical. Sa position est déterminée par l'angle $\alpha = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OG})$. Les contacts en A et B sont supposés sans frottements.
1. *Déterminer les composantes de la vitesse $\vec{v}(G)$ du point G en fonction de α et de la dérivée de α.*
2. *En déduire le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de la tige.*



Réponses :

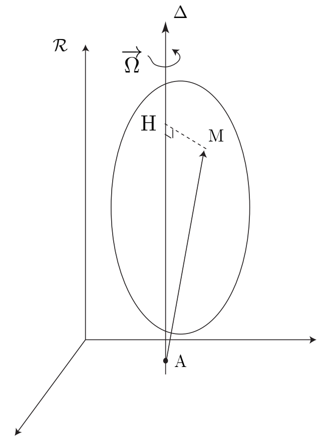
$$\textbf{1.}\quad \vec{v}(G) = -b(\Omega + 2\dot{\alpha})\sin(\alpha)\vec{e}_x - b\Omega\cos(\alpha)\vec{e}_y$$

$$\textbf{2.}\quad \vec{\Omega} = -\dot{\alpha}\vec{e}_z$$

5.3 Solide en rotation autour d'un axe fixe

5.3.1 Moment cinétique

Considérons un solide S en rotation autour d'un axe Δ fixe dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$. Le moment cinétique en un point A fixe de l'axe est :



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L}_A &= \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v}(M) dm \\
&= \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\underbrace{\overrightarrow{v}(A)}_{=\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM} \right) dm \\
&= \iiint_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM} \right) dm \\
&= \left(\iiint_S AM^2 \mathrm{d}m \right) \overrightarrow{\Omega} - \iiint_S (\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{\Omega}) \overrightarrow{AM} \mathrm{d}m \\
&= \left(\iiint_S AM^2 \mathrm{d}m - \iiint_S AH^2 \mathrm{d}m \right) \overrightarrow{\Omega} - \iiint_S (\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{\Omega}) \overrightarrow{HM} \mathrm{d}m
\end{aligned}$$

avec H est la projection de M sur l'axe Δ, d'où :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L}_A &= \overrightarrow{\Omega} \iiint_S HM^2 \mathrm{d}m - \iiint_S (\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{\Omega}) \overrightarrow{HM} \mathrm{d}m \\
&= \overrightarrow{L}_{A\parallel} + \overrightarrow{L}_{A\perp}
\end{aligned}$$

avec :

- $\overrightarrow{L}_{A\parallel} = \overrightarrow{\Omega} \iiint_S HM^2 \mathrm{d}m$: terme colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\Omega}$
- $\overrightarrow{L}_{A\perp} = - \iiint_S (\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{\Omega}) \overrightarrow{HM} \mathrm{d}m$: terme perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{\Omega}$

Le terme $\overrightarrow{L}_{A\parallel}$:

Le terme parallèle à l'axe de rotation s'écrit :

$$\overrightarrow{L}_{A\parallel} = J_\Delta \overrightarrow{\Omega} \tag{19}$$

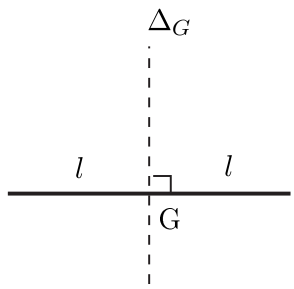
J_Δ est le moment d'inertie (en kg.m^2) du solide S par rapport à l'axe Δ. Il est définit par :

$$\boxed{J_\Delta = \iiint_S HM^2 \mathrm{d}m} \tag{20}$$

il ne dépend que de la répartition des masses autour de Δ.

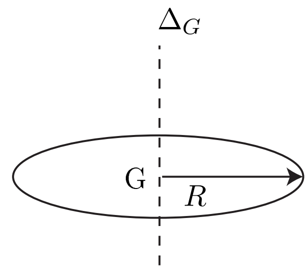
Exemples de moments d'inertie par rapport à un axe passant par G :
Le moment cinétique du solide par rapport à l'axe de rotation Δ est :

$$\boxed{L_\Delta = J_\Delta \Omega} \tag{21}$$



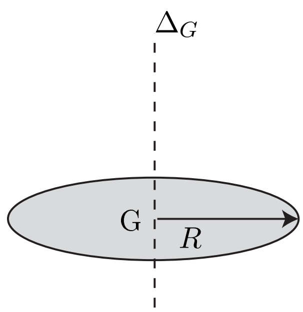
Tige de longueur $2l$, de masse m

$$J_{\Delta_G} = \frac{1}{3} m l^2$$



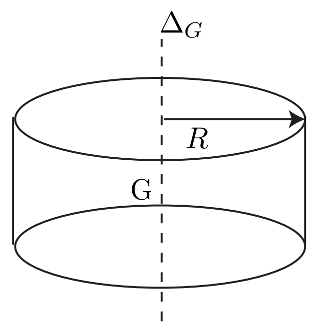
Cerceau de rayon R, de masse m

$$J_{\Delta_G} = m R^2$$



Disque de rayon R, de masse m

$$J_{\Delta_G} = \frac{1}{2} m R^2$$



Cylindre de rayon R, de masse m

$$J_{\Delta_G} = \frac{1}{2} m R^2$$

Le terme $\overrightarrow{L}_{A\perp}$:

Le terme perpendiculaire à l'axe de rotation (à $\overrightarrow{\Omega}$) est nul dans les cas suivants :

1) Lorsque l'axe de rotation Δ est l'axe de symétrie du solide S.
2) Lorsque le solide est plan et se déplace dans un plan perpendiculaire à Δ **en A**.

$$\overrightarrow{L}_{A\perp} = \overrightarrow{0}$$

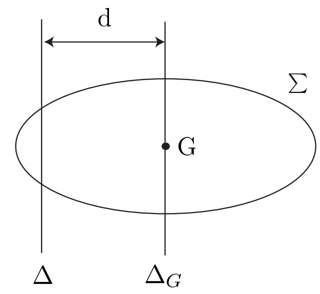
ces deux cas sont les cas les plus rencontrés (programme MP).

Dans ces cas on a alors :

$$\boxed{\overrightarrow{L}_A = J_\Delta \overrightarrow{\Omega}} \tag{22}$$

avec : $A \in \Delta$.

5.3.2 Théorème de HUYGENS



Le moment d'inertie du solide par rapport à un axe Δ parallèle à Δ_G est :

$$\boxed{J_\Delta = J_{\Delta_G} + m\,d^2}$$

avec :

- J_{Δ_G} : un axe passant par G et parallèle à Δ
- d : la distance entre les deux axes Δ et Δ_G

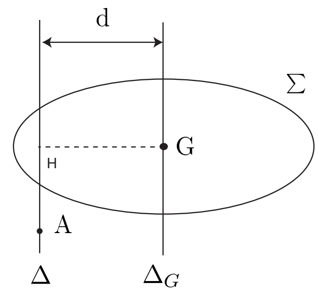
c'est le théorème de HUYGENS.

Démonstration :

Le théorème de KOENIG s'écrit :

$$\vec{L}_A = \vec{L}^*_G + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{v}(G)$$

avec A un point fixe de Δ et $\vec{v}(G) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AG}$



La projection sur l'axe de rotation donne :

$$L_\Delta = L^*_\Delta + m(\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AG})).\vec{u} =$$

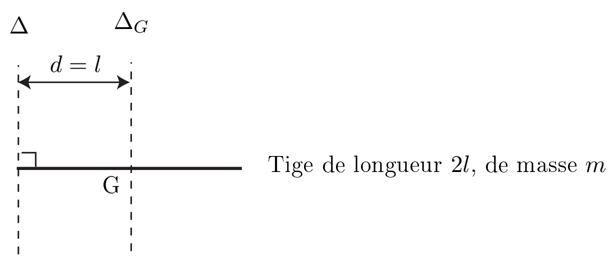
soit :

$$J_\Delta \Omega = J_{\Delta_G}\Omega + m(AG^2 - AH^2)\Omega$$

avec H est la projection de G sur l'axe.
d'où :

$$J_\Delta = J_{\Delta_G} + md^2$$

Exemple :



$$J_{\Delta_G} = \frac{1}{3}ml^2$$

$$J_\Delta = J_{\Delta_G} + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2$$

5.3.3 Énergie cinétique

L'énergie cinétique du solide S dans le référentiel $\mathcal{R}$ est :

$$\begin{aligned}
E_c &= \iiint_S \frac{1}{2}\vec{v}(M)^2 \mathrm{d}m \\
&= \iiint_S \frac{1}{2}(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}).\vec{v}(M)\mathrm{d}m \\
&= \iiint_S \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M)).\vec{\Omega}\,\mathrm{d}m \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\iiint_S (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M))\mathrm{d}m\right)}_{\vec{L}_A}.\vec{\Omega}
\end{aligned}$$

d'où l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ :

$$E_c = \frac{1}{2}\vec{L}_A.\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{L}_A.\vec{e}_z\Omega = \frac{1}{2}L_{A\parallel}\Omega = \frac{1}{2}(J_\Delta\Omega)\Omega$$

soit :

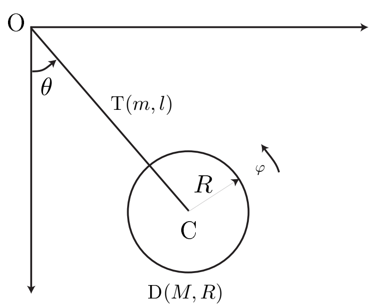
$$\boxed{E_c = \tfrac{1}{2}J_\Delta\Omega^2} \tag{23}$$

<u>**Remarque importante**</u> :

Dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$, le solide tourne autour d'un axe fixe passant par G (cas fréquent), les expressions de $\vec{L}^*$ et E_c^* sont alors immédiates. On déduit ensuite les grandeurs (L_A et E_c) dans le référentiel $\mathcal{R}$ par les théorèmes de KOENIG.

5.3.4 Application

Un disque $D(M,a)$ en rotation autour d'une tige $T(m,l)$ elle même en rotation autour d'un point O fixe. Calculer le moment cinétique par rapport à l'axe Oz et l'énergie cinétique E_c de l'ensemble dans le référentiel galiléen.



Réponse :

$$L_{Oz} = \frac{1}{2}Ma^2\dot{\varphi} + (M + \frac{1}{3}m)l^2\dot{\theta}$$

$$E_c = \frac{1}{6}\,m\,l^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\,M\,l^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}\,M\,a^2\dot{\varphi}^2$$