Chapitre 2

Dynamique d'un système de points matériels

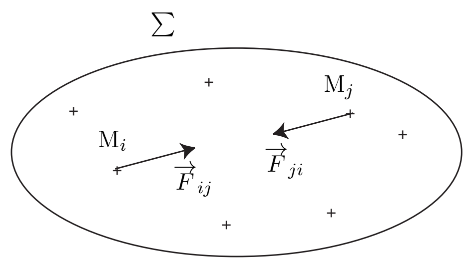
La dynamique des systèmes matériels tient compte de l'effet des actions (forces) sur le mouvement.

1 Actions extérieures et intérieures

Pour un système matériel Σ, les actions mécaniques (forces) mises en jeu peuvent être classées en deux types :
- les actions extérieures $\overrightarrow{F}_{\text{ext}}$: qui sont exercées par l'extérieur sur le système.
- Les action intérieures $\overrightarrow{F}_{\text{ext}}$: elles sont exercées par toute partie de Σ sur les autres parties.

D'après le principe de l'action et de la réaction, la force (intérieure) exercée par M_i sur M_j est opposée à celle exercée M_j sur M_i :

$$\overrightarrow{F}_{ij} = -\overrightarrow{F}_{ij}$$



donc la résultante des actions intérieures à un système est nulle :

$$\boxed{\sum_i \overrightarrow{F}_{\text{int}} = \overrightarrow{0}} \tag{24}$$

et le moment totale en un point A est aussi nulle :

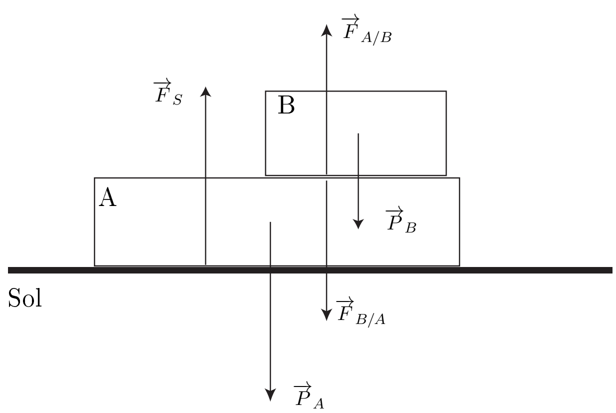
$$\boxed{\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A,\text{int}} = \overrightarrow{0}} \tag{25}$$

Exemple : Considérons un système constitué de deux corps A et B.

Pour le système $\Sigma = \{A + B\}$:
- les forces extérieures sont : $\overrightarrow{P}_A$, $\overrightarrow{P}_B$ et $\overrightarrow{F}_S$.
- les forces intérieures sont : $\overrightarrow{F}_{A/B}$ et $\overrightarrow{F}_{B/A}$.

on a : $\overrightarrow{F}_{A/B} + \overrightarrow{F}_{B/A} = \overrightarrow{0}$.

Pour le système $\Sigma = \{A\}$:
- les forces : $\overrightarrow{P}_A$, $\overrightarrow{F}_{B/A}$ et $\overrightarrow{F}_S$ sont des forces extérieures.



2 Théorème de la résultante cinétique (TRC)

2.1 Énonce

✓ Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement $\overrightarrow{P}$ d'un système fermé (de masse m) est égale à la somme des actions extérieures :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}}{\mathrm{d}t}_{/\mathcal{R}_g} = m\,\overrightarrow{a}(G/\mathcal{R}_g) = \sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}}} \tag{26}$$

Remarque : Pour un système <u>isolé</u> ($\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = \overrightarrow{0}$) : $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{cte}$ (conservation de la quantité de mouvement totale d'un système isolé)

✓ Dans un référentiel <u>non galiléen</u> $\mathcal{R}$, le TRC s'écrit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}}{\mathrm{d}t}_{/\mathcal{R}} = m\,\overrightarrow{a}(G/\mathcal{R}) = \sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} + \overrightarrow{F}_{ie} + \overrightarrow{F}_{ic}} \tag{27}$$

avec :

— $\boxed{\overrightarrow{F}_{ie} = \sum_i -m_i\,\overrightarrow{a}_e(M_i) = -m\,\overrightarrow{a}_e(G)}$: Force d'inertie d'entraînement.
En effet :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_{ie} &= -\sum_i m_i \overrightarrow{a}_{ie}(M_i)\\
&= -\sum_i m_i \frac{d^2\overrightarrow{OM}_i}{dt^2}_{/M_i \in R}\\
&= -\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i\right)_{/M_i \in R}\\
&= -\frac{d^2}{dt^2}\left(m\overrightarrow{OG}\right)_{/G \in R}\\
&= -m\overrightarrow{a}_{ie}(G)
\end{aligned}$$

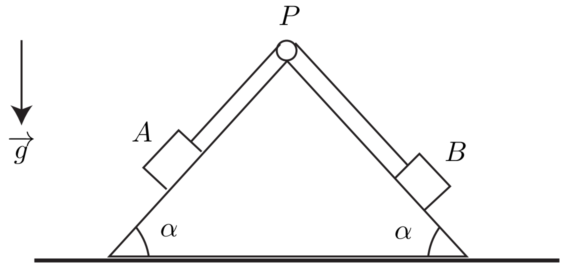
— $\boxed{\overrightarrow{F}_{ic} = \sum_i -m_i\,\overrightarrow{a}_c(M_i) = -m\,\overrightarrow{a}_c(G)}$: Force d'inertie de CORIOLIS.
En effet :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_{ic} &= -\sum_i m_i \overrightarrow{a}_{ic}(M_i)\\
&= -\sum_i m_i 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}_i\\
&= -2\overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\sum_i m_i \overrightarrow{v}_i\right)\\
&= -2\overrightarrow{\Omega} \wedge m\overrightarrow{v}(G)\\
&= -m\overrightarrow{a}_{ic}(G)
\end{aligned}$$

Remarque : Le TRC s'appelle aussi le théorème du centre de masse ou encore le théorème de la quantité de mouvement.

2.2 Application

Un prisme de masse M, dont la section droite a la forme d'un triangle isocèle d'angle α, peut glisser sans frottement sur le sol horizontal. Sur ce prisme, peuvent glisser sans frottement deux cubes A de masse $2m$ et B de masse m, reliés par un fil inextensible passant par une petite poulie P ; le fil et la poulie ont une masse négligeable et les deux brins de fil sont en permanence parallèles aux lignes de plus grande pente du prisme.
Calculer l'accélération a du prisme.



Réponse : $a = \frac{m \sin\alpha \cos\alpha}{M+3m\sin^2\alpha} g$

3 Théorème du moment cinétique (TMC)

3.1 Énonce du TMC

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, la dérivée par rapport au temps, du moment cinétique $\overrightarrow{L}_A$ d'un système fermé, en un point A <u>fixe</u> dans $\mathcal{R}_g$, est égale au moment en A des actions extérieures.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_A}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A,\mathrm{ext}}} \tag{28}$$

En effet, le TMC appliqué à un point M_i dans un référentiel galiléen est :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{i,A}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{i,A}^{\mathrm{ext}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{i,A}^{\mathrm{int}}$$

où A est un point fixe.
soit :

$$\sum_i \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{i,A}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{i,A}^{\mathrm{ext}} + \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{i,A}^{\mathrm{int}}$$

et puisque $\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{i,A}^{\mathrm{int}} = \overrightarrow{0}$, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_A}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A,\mathrm{ext}}$$

Remarque 1 : Pour un système isolé ($\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A,\mathrm{ext}} = \overrightarrow{0}$) : $\overrightarrow{L}_A = \overrightarrow{cte}$ (il y a conservation du moment cinétique, en un point <u>**fixe**</u>, d'un système <u>isolé</u>).

Remarque 1 : si le point A n'est pas fixe on montre que :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_A}{\mathrm{d}t} + \overrightarrow{v}(A) \wedge m\overrightarrow{v}(G) = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A,\mathrm{ext}}$$

3.2 TMC en G

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, le TMC appliqué en G (centre de masse du système) s'écrit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_G}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{G,\mathrm{ext}}} \tag{29}$$

cette expression est valable même si G n'est pas fixe dans $\mathcal{R}_g$.

3.3 TMC dans un référentiel non galiléen

Dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}$, le TMC en un point A fixe dans $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_A}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A,\mathrm{ext}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A,\mathrm{ie}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A,\mathrm{ic}}} \tag{30}$$

avec :

— $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{A,\mathrm{ie}} = -\sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \overrightarrow{a}_e(M_i)}$: Moment des forces d'inertie d'entraînement

— $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{A,\mathrm{ic}} = -\sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \overrightarrow{a}_c(M_i)}$: Moment des forces d'inertie de Coriolis

3.4 TMC dans le référentiel barycentrique

Dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$, le TMC appliqué au point G s'écrit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_G^*}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{G,\mathrm{ext}}} \tag{31}$$

cette expression est valable même si $\mathcal{R}^*$ n'est pas galiléen.

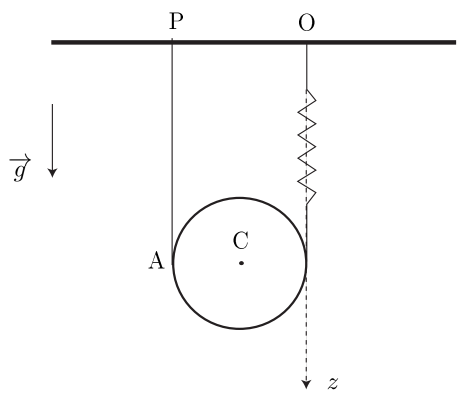
En effet, dans $\mathcal{R}^*$, qui est en translation, on a :

— $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{G,\mathrm{ie}} = -\sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge m_i \overrightarrow{a}_e(M_i) = -\sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge m_i \overrightarrow{a}_e(G) = -\underbrace{\left(\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i\right)}_{=\overrightarrow{0}} \wedge \overrightarrow{a}_e(G) = \overrightarrow{0}$

— $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{G,\mathrm{ic}} = \overrightarrow{0}$ car $\mathcal{R}^*$ est en translation.

3.5 Applications

Considérons le système mécanique schématisé ci-contre. Le fil AP est inextensible, supposé sans masse, sans raideur et ne glisse pas sur le cylinre. Le ressort a une raideur k.
Calculer la période des oscillations verticales du centre C du cylindre homogène de masse m et de rayon R.



Réponse : $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{8k}}$

4 Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

4.1 TEC dans un référentiel galiléen

Dans un référentiel $\mathcal{R}_g$, l'énergie cinétique d'un système de points matériels $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ est :

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v_i}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dE_c}{dt} = \sum_i m_i \, \overrightarrow{a_i}.\overrightarrow{v_i}$$

le PFD appliqué au point M_i dans le référentiel **galiléen** $\mathcal{R}_g$ est :

$$m_i\overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{f}_{i,ext} + \overrightarrow{f}_{i,int}$$

donc :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{v}_i.\overrightarrow{f}_{i,\mathrm{ext}} + \sum \overrightarrow{v}_i.\overrightarrow{f}_{i,\mathrm{int}}$$

d'où le TEC pour un système quelconque dans un référentiel **galiléen** $\mathcal{R}_g$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}_{\mathrm{ext}} + \sum \mathcal{P}_{\mathrm{int}}} \tag{32}$$

avec :

✓ $\sum \mathcal{P}_{\mathrm{ext}} = \sum\limits_i \left(\overrightarrow{f}_{i,\mathrm{ext}}.\overrightarrow{v}_i\right)$ la somme des puissances des actions extérieures appliquées sur le système (Σ).

✓ $\sum \mathcal{P}_{\mathrm{int}} = \sum\limits_i \left(\overrightarrow{f}_{i,\mathrm{int}}.\overrightarrow{v}_i\right)$ la somme des puissances des actions intérieures à (Σ).

En intégrant entre deux instants t_1 et t_2 il vient :

$$\boxed{E_{c2} - E_{c1} = \sum W_{\mathrm{ext}}(t_1, t_2) + \sum W_{\mathrm{int}}(t_1, t_2)} \tag{33}$$

où $\sum W_{\mathrm{int}}(t_1, t_2)$ est la somme des travaux des actions intérieures entre les instants t_1 et t_2.
et $\sum W_{\mathrm{ext}}(t_1, t_2)$ est la somme des travaux des actions extérieures entre les instants t_1 et t_2.

Remarque 1 : Bien que la somme des actions intérieures est nulle, la puissance de ces actions n'est pas nulle à priori.

Remarque 2 : La puissance $\mathcal{P}_{\mathrm{int}}$ des actions intérieures est indépendante du référentiel dans lequel on fait les calculs. En effet :

• Dans un référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, la puissance des actions intérieures est :

$$\mathcal{P}_{\mathrm{int}} = \sum_i \left(\overrightarrow{f}_{i,\mathrm{int}}.\overrightarrow{v}_i\right)$$

• Dans un autre référentiel $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$, elle s'écrit :

$$\mathcal{P}'_{\mathrm{int}} = \sum_i \left(\overrightarrow{f}_{i,\mathrm{int}}.\overrightarrow{v}'_i\right)$$

car la force est indépendante du référentiel.

D'après la loi de composition des vitesses, on a :

$$\overrightarrow{v}_i = \overrightarrow{v}'_i + \overrightarrow{v}(O'/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M_i}$$

donc :

$$\mathcal{P}_{\mathrm{int}} = \sum_i \left(\overrightarrow{f}_{i,\mathrm{int}}.\overrightarrow{v}'_i\right) + \left(\sum_i \overrightarrow{f}_{i,\mathrm{int}}\right).\overrightarrow{v}(O'/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Omega}.\sum_i \left(\overrightarrow{O'M_i} \wedge \overrightarrow{f}_{i,\mathrm{int}}\right)$$

or :

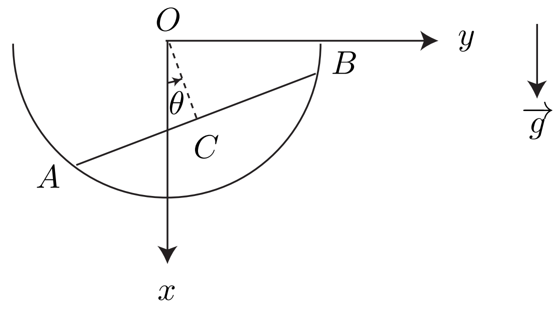
$$\sum_i \overrightarrow{f}_{i,\text{int}} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \sum_i \overrightarrow{O'M_i} \wedge \overrightarrow{f}_{i,\text{int}} = \overrightarrow{0}$$

d'où :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}'_{\text{int}}$$

Application :

Une tige homogène AB, de centre C, de longueur $2L$, de moment d'inertie $J = \frac{1}{3}mL^2$ par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par C, glisse sans frottement à l'intérieur d'un demi-cercle de centre O et de rayon $R = \frac{2}{\sqrt{3}}L$.
Ce demi-cercle est situé dans le plan vertical (Oxy) d'un référentiel galiléen.
1. *En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OC}\right)$.*



Réponse : $\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta$

4.2 TEC dans un référentiel non galiléen

Dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$, l'énergie cinétique d'un système de points matériels $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ est :

$$E'_c = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v}'^2_i\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}E'_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i (m_i \, \overrightarrow{a}'_i).\overrightarrow{v}'_i$$

le PFD appliquée au point M_i dans $\mathcal{R}'$ est :

$$m_i \overrightarrow{a}'_i = \overrightarrow{f}_{i,\text{ext}} + \overrightarrow{f}_{i,\text{int}} + \overrightarrow{f}_{ie}(M_i) + \overrightarrow{f}_{ic}(M_i)$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{d}E'_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}'_{\text{ext}} + \sum \mathcal{P}'_{\text{int}} + \mathcal{P}_{ie} + \mathcal{P}_{ic}$$

avec :

- $\sum \mathcal{P}'_{\text{ext}} = \sum_i \left(\overrightarrow{f}_{i,\text{ext}}.\overrightarrow{v}'_i\right)$ la puissance des actions extérieures.
- $\sum \mathcal{P}'_{\text{int}} = \sum_i \left(\overrightarrow{f}_{i,\text{int}}.\overrightarrow{v}'_i\right)$ la puissance des actions intérieures.
- $\mathcal{P}_{\text{ie}} = \sum_i \left(\overrightarrow{f}_{\text{ie}}(M_i).\overrightarrow{v}'_i\right) = -\sum_i (m_i \overrightarrow{a}_{\text{ie}}(M_i).\overrightarrow{v}'_i)$ la puissance des forces d'entraînement.
- $\mathcal{P}_{\text{ic}} = \sum_i \left(\overrightarrow{f}_{\text{ic}}(M_i).\overrightarrow{v}'_i\right) = -2\sum_i m_i \left(\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{v}'_i\right).\overrightarrow{v}'_i = \overrightarrow{0}$: la puissance des forces de CORIOLIS est nulle .

d'où le TEC pour un système quelconque dans un référentiel non galiléen :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E'_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}'_{\text{ext}} + \sum \mathcal{P}'_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ie}}} \tag{34}$$

4.3 TEC dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$

Considérons un système de points matériels $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ et soit $\mathcal{R}^*$ le référentiel barycentrique (a priori non galiléen) par rapport à $\mathcal{R}$.

Le TEC dans $\mathcal{R}^*$ s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}E_c^*}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}_{\text{ext}}^* + \sum \mathcal{P}_{\text{int}}^* + \mathcal{P}_{\text{ie}}^*$$

avec :

$$\mathcal{P}_{\text{ie}}^* = \sum_i \left[\overrightarrow{f}_{\text{ie}}(M_i).\overrightarrow{v}_i^*\right] = -\sum_i \left[m_i \overrightarrow{a}_{\text{ie}}^*(M_i).\overrightarrow{v}_i^*\right]$$

or :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}_{\text{ie}}^*(M_i) &= \overrightarrow{a}(G/\mathcal{R}) + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{GM_i} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} \wedge (\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{GM_i}) \\ &= \overrightarrow{a}_{G/\mathcal{R}} \quad \text{puisque} \quad \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{ie}}^* &= -\overrightarrow{a}_{G/\mathcal{R}}.\sum_i \left[m_i \overrightarrow{v_i}^*\right] \\ &= -\overrightarrow{a}_{G/\mathcal{R}}.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \left[m_i \overrightarrow{GM_i}\right] \\ &= \overrightarrow{0} \qquad \text{par définition du centre d'inertie G}\end{aligned}$$

donc la puissance des forces d'inertie dans le référentiel barycentrique est nulle :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{ie}}^* = 0} \tag{35}$$

Le TEC dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ (qui n'est pas a priori galiléen) s'écrit comme dans un référentiel galiléen :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c^*}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext}}^* + \mathcal{P}_{\text{int}}^*} \tag{36}$$

4.4 TEC pour un solide

a/ Puissance des actions intérieures :

Considérons deux points M$_i$ et M$_j$ d'un solide. La puissance des forces intérieures $\overrightarrow{F}_{ij}$ et $\overrightarrow{F}_{ji}$ est :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \overrightarrow{F}_{ij}.\overrightarrow{v}_i + \overrightarrow{F}_{ji}.\overrightarrow{v}_j$$

soit :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \overrightarrow{F}_{ij}.(\overrightarrow{v}_i - \overrightarrow{v}_j) \qquad \text{car} \qquad \overrightarrow{F}_{ij} = -\overrightarrow{F}_{ji} = F\frac{\overrightarrow{M_iM_j}}{M_iM_j} = \text{cte}\,\overrightarrow{M_iM_j}$$

d'où :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \overrightarrow{F}_{ij}.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j}}{\mathrm{d}t} = \text{cte}\,\overrightarrow{M_iM_j}.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j}}{\mathrm{d}t} = \text{cte}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_iM_j}^2}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{car} \quad \overrightarrow{M_iM_j}^2 = \text{cte} \quad \text{(solide)}$$

Donc pour un système solide, la puissance des actions intérieures est nulle dans tout référentiel :

$$\boxed{\sum \mathcal{P}_{\text{int}} = 0} \tag{37}$$

b/ Puissance des actions extérieures :

Soit une force $\overrightarrow{F}$ appliquée en un point M du solide et A un point quelconque de ce solide. La puissance de cette force dans une référentiel $\mathcal{R}$ est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v}(M) \\
&= \overrightarrow{F}.(\overrightarrow{v}(A) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) \\
&= \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v}(A) + \overrightarrow{F}.(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) \\
&= \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v}(A) + \overrightarrow{\Omega}.(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v}(A) + \overrightarrow{\Omega}_{S/\mathcal{R}}.\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(F)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum \mathcal{P}_{\text{ext}} = \sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}}.\overrightarrow{v}(A) + \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A,\text{ext}}.\overrightarrow{\Omega}_{S/\mathcal{R}}} \tag{38}$$

A est un point quelconque du solide.

c/ TEC pour un solide :

Pour un solide, le TEC dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}_{\text{ext}}} \tag{39}$$

✓ E_c est l'énergie cinétique du solide dans $\mathcal{R}_g$.

✓ $\sum \mathcal{P}_{\text{ext}}$ est la somme des puissances des actions extérieures appliquées sur le solide.

En intégrant entre deux instants t_1 et t_2 il vient :

$$\boxed{E_{c2} - E_{c1} = \sum W_{ext}(t_1, t_2)} \tag{40}$$

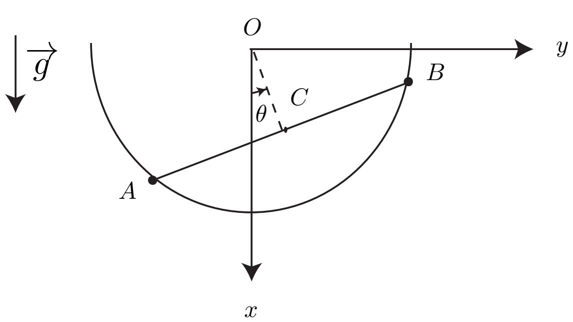
où $\sum W_{ext}(t_1, t_2)$ est la somme des travaux des actions extérieures entre les instants t_1 et t_2.

Application :

Une tige homogène AB, de centre C, de longueur $2l$, de moment d'inertie $J = \frac{1}{3}m\,l^2$ par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par C, glisse sans frottement à l'intérieur d'un demi-cercle de centre O et de rayon $R = \frac{2}{\sqrt{3}}L$.

Ce demi-cercle est situé dans le plan vertical (Oxy) d'un référentiel galiléen.

1. *En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OC}\right)$.*



Réponse : $\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$

5 Énergie mécanique d'un système de points matériels

5.1 Énergie potentielle

Dans un référentiel $\mathcal{R}$, l'énergie potentielle E_p dont dérive une force $\overrightarrow{F}$ appliquée sur un point matériel M est telle que :

$$\boxed{\mathrm{d}E_p = -\overrightarrow{F}.\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})\,\mathrm{d}t = -\delta W(\overrightarrow{F})} \tag{41}$$

On dit que la force $\overrightarrow{F}$ est une force **conservative**.

L'énergie potentielle d'un système $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ est la somme des énergies potentielles de toutes les forces conservatives :

$$E_p = \sum_i E_{\mathrm{p}i}$$

où $E_{\mathrm{p}i}$ est l'énergie potentielle de la force **conservative** f_i.

5.2 Théorème de l'énergie mécanique (TEM)

L'énergie mécanique du système $\Sigma\{M_i(m_i)\}$ dans $\mathcal{R}$ est :

$$E_m = E_c + E_p = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v}_i^2\right) + \sum_i E_{pi}$$

d'où :

$$\mathrm{d}E_m = \mathrm{d}E_c + \mathrm{d}E_p$$

or :

$$\mathrm{d}E_c = \sum \delta W^c + \sum \delta W^{nc} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}E_p = -\delta W^c$$

avec δW^c et δW^{nc} sont respectivement les travaux élémentaires des forces conservatives et non conservatives.

d'où le théorème de l'énergie mécanique (TEM) :

$$\boxed{\mathrm{d}E_m = \sum \delta W^{nc}} \tag{42}$$

5.3 Conservation de l'énergie mécanique

Si toutes les forces <u>non conseravatives</u> appliquées sur un système <u>ne travaillent pas</u>, alors :

$$\delta W^{nc} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{E_m = \mathrm{cte}}$$

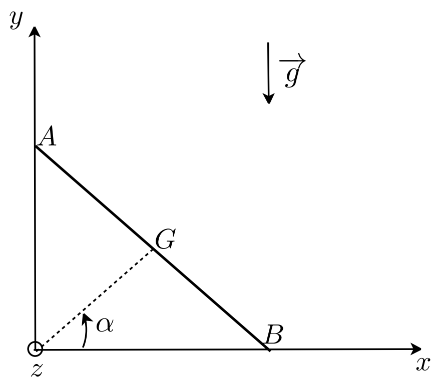
dans ce cas, et le système est dit **conservatif**.

L'équation $\boxed{E_m = E_c + E_p = \mathrm{cte}}$ est une <u>intégrale première du mouvement</u> : c'est l'**intégrale première de l'énergie** .

Remarque : Dans un référentiel non galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie d'entraînement qui peuvent eventuellement dériver d'une énergie potentielle.

Application :

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Une barre AB homogène de masse m, de longueur $2b$ et de centre G, milieu de AB, est posée sur le sol horizontal et repose contre un mur vertical. Sa position est déterminée par l'angle $\alpha = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OG})$. Les contacts en A et B sont supposés sans frottements.
1. *Écrire l'intégrale première de l'énergie en supposant qu'à l'instant initial, la barre est immobile avec une inclinaison α_0.*
2. *Calculer la réaction $\overrightarrow{R}_A$, du mur sur la barre, et en déduire pour quelle inclinaison α_1, la barre quitte le mur. On donne le moment d'inertie de la barre par rapport à sa médiatrice $J = \frac{1}{3}mb^2$.*



Réponses : $E_m = \frac{2}{3}mb^2\dot{\alpha}^2 + mgb\sin\alpha = mgb\sin\alpha_0$; $R_A = \frac{3}{2}mg\cos\alpha(\frac{3}{2}\sin\alpha - \sin\alpha_0)$; $\sin\alpha_1 = \frac{2}{3}\sin\alpha_0$

6 Notion de torseur

6.1 Définition

Considérons, dans un référentiel $\mathcal{R}$, un système de point matériels $\Sigma\{M_i(m_i)\}$. À chaque point matériel M_i est associé un veccteur $\overrightarrow{Q}_i(= \overrightarrow{v}_i, \overrightarrow{a}_i, \overrightarrow{F}_i, m_i\overrightarrow{v}_i, \dots)$.

On définit pour ce système de vecteur :
— la **résultante** : $\overrightarrow{R} = \sum_i \overrightarrow{Q}_i$
— le **moment** en un point A : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge \overrightarrow{Q}_i$
le moment en un autre point B est :
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_B = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{AB}$$
La résultante $\overrightarrow{R}$ et le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A$ sont appelés **éléments de réduction en A** du **torseur** $\tau = \left[\overrightarrow{R}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_A\right]$ associé au système $\{\overrightarrow{Q}_i\}$.

6.2 Cas particuliers

— si la résultante d'un torseur est nulle ($\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$), le torseur est appelé **un couple**.
— si le moment, en un point, d'un torseur est nul ($\overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{0}$), le torseur est appelé **un glisseur**.

6.3 Exemples

✓ Torseur **cinétique** τ_c :

• Les éléments de réduction sont : $\overrightarrow{R} = \sum_i m_i\overrightarrow{v}_i = m\overrightarrow{v}(G) = \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i\overrightarrow{v}_i = \overrightarrow{L}_A$

• On montre que :
$$\boxed{\overrightarrow{L}_B = \overrightarrow{L}_A + \overrightarrow{P} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

• On note le torseur cinétique :
$$\boxed{\tau_c = \left[\overrightarrow{P}, \overrightarrow{L}_A\right]}$$

✓ Torseur **dynamique** τ_d :

• Les éléments de réduction sont : $\overrightarrow{R} = \sum_i m_i \overrightarrow{a}_i = m\overrightarrow{a}(G) = \overrightarrow{S}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \overrightarrow{a}_i = \overrightarrow{D}_A$

• On montre que :

$$\boxed{\overrightarrow{D}_B = \overrightarrow{D}_A + \overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

• On note le torseur dynamique :

$$\boxed{\tau_d = \left[\overrightarrow{S}, \overrightarrow{D}_A\right]}$$

Remarque : il est facile de montrer qu'en un point fixe A on a : $\overrightarrow{D}_A = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_A}{\mathrm{d}t}$.

✓ Torseur **des actions mécaniques** (forces) τ_f :

• Les éléments de réduction sont : $\overrightarrow{R} = \sum_i \overrightarrow{F}_i$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge \overrightarrow{F}_i$

• On montre que pour une force $\overrightarrow{F}$ appliquée en un point M, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_B = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A + \overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

• On note le torseur des forces :

$$\boxed{\tau_f = \left[\sum_i \overrightarrow{F}_i, \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}_i)\right]}$$

✓ Torseur **des vitesses d'un solide** (cinématique) τ_v :

Pour deux points d'un solide on a : $\overrightarrow{v}_A = \overrightarrow{v}_B + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{BA}$
d'où le torseur cinématique d'un solide :

$$\boxed{\tau_v = \left[\overrightarrow{\Omega}, \quad \overrightarrow{v}_A\right]}$$

6.4 Formulation torsorielles des lois de la mécanique

6.4.1 Principe fondamental

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, le torseur dynamique τ_d d'un système fermé est égal au torseur des actions mécaniques extérieures $\tau_{f,ext}$:

$$\left[\overrightarrow{S}, \overrightarrow{D}_A\right] = \left[\sum_i \overrightarrow{F}_{i,\mathrm{ext}}, \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}_{i,\mathrm{ext}})\right]$$

d'où le TRC :

$$m\overrightarrow{a}(G) = \sum_i \overrightarrow{F}_{i,\mathrm{ext}}$$

et le TMC en un point fixe A :

$$\overrightarrow{D}_A = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_A}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}_{i,\mathrm{ext}})$$

6.4.2 Principe de l'action et de la réaction

Le torseur des actions mécaniques exercées par un système Σ_1 sur un système Σ_2 est opposé à celui exercé par Σ_2 sur Σ_1.

$$\tau_{f,1\rightarrow 2} = -\tau_{f,2\rightarrow 1}$$

d'où :

$$\overrightarrow{F}_{1\rightarrow 2} = -\overrightarrow{F}_{2\rightarrow 1}$$

et

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}_{1\rightarrow 2}) = -\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}_{2\rightarrow 1})$$

Annexe B : Lois de composition des vitesses et des accélérations

Considérons un référentiel fixe R(O, x, y, z) (celui du laboratoire) et un référentiel R$_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ mobile par rapport à R.
On va appeler :
- R le référentiel **absolu**.
- R$_1$ le référentiel **relatif**.

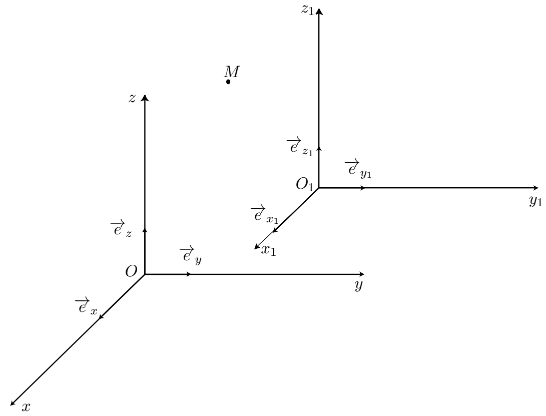


FIGURE 1 – Le référentiel R$_1$ est en mouvement par rapport à R.

La loi de composition des vitesses est :

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)$$

La loi de composition des accélérations est :

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

avec :

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}\,(O_1/R) + \vec{\omega}\,(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}\,(O_1/R) + \vec{\omega}\,(R_1/R) \wedge \left(\vec{\omega}\,(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) + \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega}\,(R_1/R)\right]_{/R} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{a}_c(M) = 2\vec{\omega}\,(R_1/R) \wedge \vec{v}_r$$