Chapitre 3

Solides en contact

1 Cinématique

1.1 Mouvements d'un solide

Le mouvement le plus général d'un solide S dans un référentiel $\mathcal{R}$ peut se décomposer en :

- un mouvement de G dans $\mathcal{R}$ qui traduit la translation d'ensemble de S ;
- un mouvement autour de G dans $\mathcal{R}^*$: il correspond à un mouvement de rotation autour d'un axe fixe passant par G.

Un solide S est en translation dans un référentiel $\mathcal{R}$ lorsque un vecteur quelconque fixe dans $\mathcal{R}_s$ reste constant dans $\mathcal{R}$ au cours du temps. Dans ce cas on a :

$$\overrightarrow{\Omega}(S_1/\mathcal{R}) = \overrightarrow{0}$$

1.2 Mouvements d'un solide

Le mouvement le plus général d'un solide S dans un référentiel $\mathcal{R}$ peut se décomposer en :

- un mouvement de G dans $\mathcal{R}$ qui traduit la translation d'ensemble de S ;
- un mouvement autour de G dans $\mathcal{R}^*$: il correspond à un mouvement de rotation autour d'un axe fixe passant par G.

Un solide S est en translation dans un référentiel $\mathcal{R}$ lorsque un vecteur quelconque fixe dans $\mathcal{R}_s$ reste constant dans $\mathcal{R}$ au cours du temps. Dans ce cas on a :

$$\overrightarrow{\Omega}(S_1/\mathcal{R}) = \overrightarrow{0}$$

1.3 Vitesse de glissement

Considérons deux solides S_1 et S_2 en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ et qui sont en contact en un point I.

Soit Π le plan tangent aux deux solides en I.

✓ On appelle **vitesse de glissement** $\overrightarrow{v}_g(I)$ en I de S_1 sur S_2 à l'instant t :

$$\boxed{\overrightarrow{v}_g(I) = \overrightarrow{v}(I \in S_1/\mathcal{R}) - \overrightarrow{v}(I \in S_2/\mathcal{R}) = \overrightarrow{v}(I \in S_1/\mathcal{R}_{s2})} \quad (1)$$

où $\mathcal{R}_{s2}$ est le référentiel lié au solide S_2.

✓ Si le **mouvement** de S_1 sur S_2 se fait **sans glissement** alors :

$$\boxed{\overrightarrow{v}_g(I) = \overrightarrow{0}} \quad (2)$$

Application :
Calculer la vitesse de glissement en I dans les cas suivants :

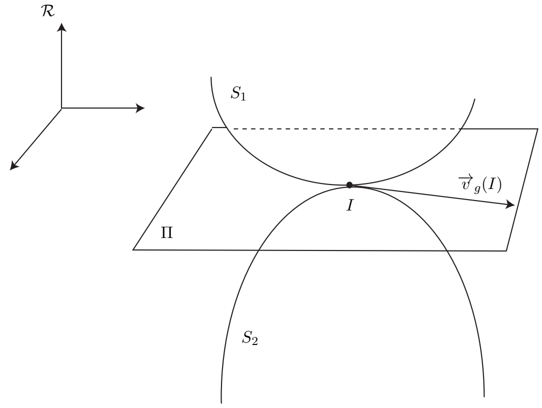
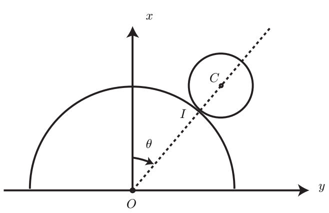
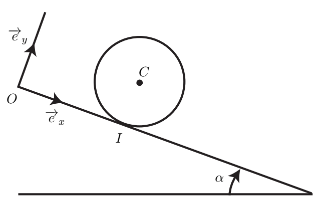
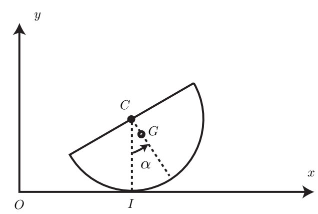


FIGURE 2 – Deux solides en contact en un point I.







Réponses :
1) $v_g(I) = (a+b)\dot{\theta} - b\dot{\varphi}$; 2) $v_g(I) = \dot{x}_c + R\omega$; 3) $v_g(I) = \dot{x}_c + R\dot{\alpha}$

1.4 Roulement et pivotement

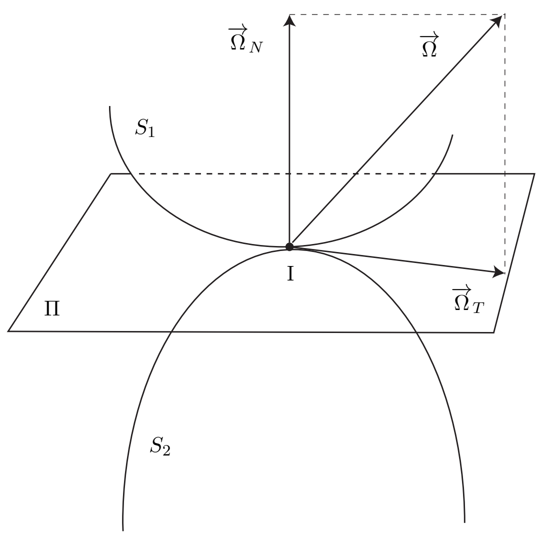
Soient $\overrightarrow{\Omega}(S_1/\mathcal{R})$ et $\overrightarrow{\Omega}(S_2/\mathcal{R})$ les vitesses de rotation des deux solides S_1 et S_2 respectivement.
La **vitesse de rotation relative** de S_1 par rapport à S_2 est :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_2) = \overrightarrow{\Omega}(S_1/\mathcal{R}) - \overrightarrow{\Omega}(S_2/\mathcal{R})}$$

Ce vecteur peut se décomposer en deux vecteurs :

— un vecteur **normal** $\overrightarrow{\Omega}_N$ au plan tangent Π en I : c'est le vecteur rotation de **pivotement**.

— un vecteur **tangent** $\overrightarrow{\Omega}_T$ au plan tangent Π en I : c'est le vecteur rotation de **roulement**.

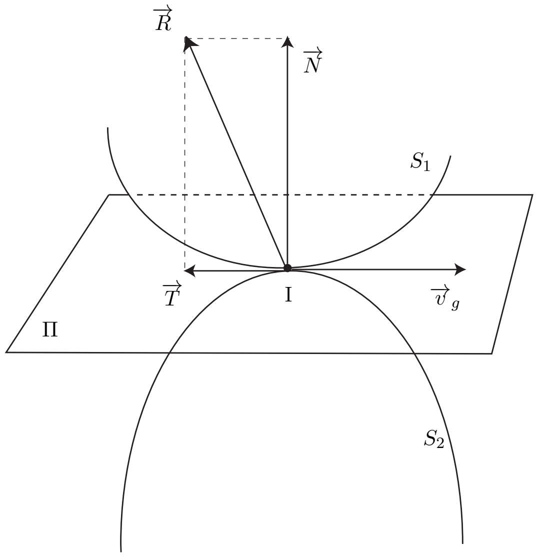


2 Lois de COULOMB

Les lois de Coulomb sont des lois phénoménologique (basées sur l'expérience et les modèles) qui complètent le système d'équations du mouvement.

2.1 Action de contact

considérons deux solides dans un référentiel $\mathcal{R}$ et qui sont en contacte en un point I.



La résultante $\overrightarrow{R}$ des actions de contact peut se décomposer en deux composantes :

✓ une composante $\overrightarrow{N}$ normale au plan tangent Π : c'est la **réaction normale**. Elle assure le contact entre les deux solides.
si : $N = 0$ alors il y a rupture de liaison (pas de contact).

✓ une composante $\overrightarrow{T}$ tangentielle au plan tangent Π : c'est la **force de frottement** (de glissement).

On alors :

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T}$$

2.2 Propriétés de la force de frottement

On distingue deux cas : cas ou il y a glissement et cas où il n y a pas de glissement.

✓ S'**il y a glissement** de S_1 sur S_2 alors : $\boxed{\overrightarrow{v}_g \neq \overrightarrow{0}}$.
Dans ce cas on a :
- $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{v}_g$ sont colinéaires et de sens opposés.

$$\boxed{\overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{v}_g = \overrightarrow{0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{T}.\overrightarrow{v}_g < 0} \tag{3}$$

- Les **modules** de $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ sont proportionnels :

$$\boxed{\| \overrightarrow{T} \| = f \| \overrightarrow{N} \|} \tag{4}$$

f est le coefficient de frottement de glissement (cinétique)

✓ S'**il n'y a pas de glissement** de S_1 sur S_2 alors : $\boxed{\vec{v}_g = \vec{0}}$.
Dans ce cas on a :

$$\boxed{\| \vec{T} \| \leq f_0 \| \vec{N} \|} \tag{5}$$

f_0 est le coefficient de frottement de glissement (statique).

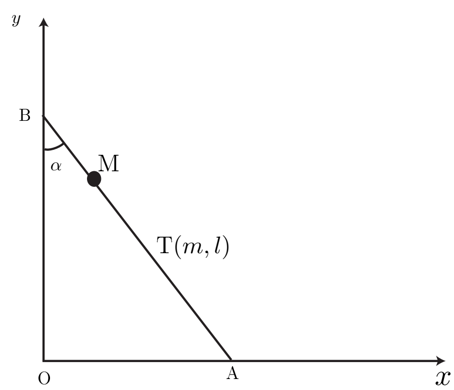
Remarque : Dans la plus part des problèmes on confond f avec f_0.

Le coefficient de frottement f dépend de la nature des surfaces en contact. Exemples :
- Métal–Métal : f = 0,1 à 0,2.
- Bois–Bois : f = 0,3 à 0,4.

2.3 Application

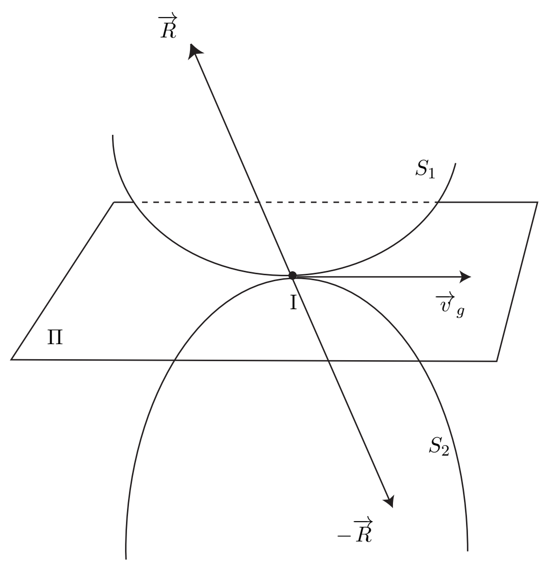
Une tige AB de masse m, de longueur l, repose sur un sol horizontal et appuyée sur un mur vertical avec une inclinaison α. Le contact en A présente un coefficient de frottement f alors qu'en il n'y a pas de frottement. Un point matériel P de masse M se déplace sur la tige. À quelle condition la tige reste en équilibre quelle que soit la position de P entre A et B ?

Réponse : $\tan(\alpha) \leq 2f\frac{M+m}{2M+m}$



3 Puissance des actions de contact

Dans un référentiel $\mathcal{R}$, considérons deux solides en contact en un point I. Le solide S_2 exerce un force $\vec{R}$ sur S_1. D'après le principe de l'action et de la réaction, le solide S_1 exerce une force $-\vec{R}$ sur S_2.



La puissance totale des actions de contact dans $\mathcal{R}$ est :

$$\mathcal{P}_c = \mathcal{P}(\overrightarrow{R}) + \mathcal{P}(-\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{v}(I \in S_1) + (-\overrightarrow{R}).\overrightarrow{v}(I \in S_2) = \overrightarrow{R}.\underbrace{(\overrightarrow{v}(I \in S_1) - \overrightarrow{v}(I \in S_2))}_{\overrightarrow{v}_g(I)}$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{P}_c = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{v}_g(I) = \overrightarrow{T}.\overrightarrow{v}_g(I) \leq 0} \qquad (6)$$

• Selon les lois de COULOMB cette puissanec est négative ou nulle.

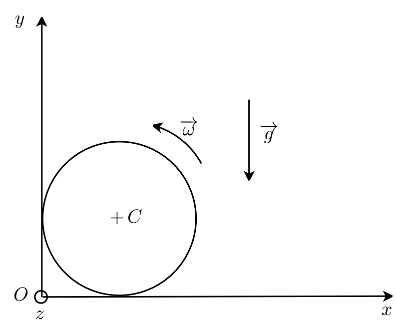
• $\mathcal{P}_c = 0$ en l'absence de frottement $\left(\overrightarrow{T} = \overrightarrow{0} \text{ car } \overrightarrow{R} \perp \overrightarrow{v}_g(I)\right)$ ou en l'absence de glissement ($\overrightarrow{v}_g = \overrightarrow{0}$).

• Si toutes les autres forces sont consevative alors le TEM donne : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_c \leq 0$, donc l'énergie mécanique du sytème $\{S_1, S_2\}$ dimunue. Elle se transforme en énergie d'agitation thermique (chaleur).

Remarque : cette puissance est une puissance des actions intérieures au système $\{S_1, S_2\}$ dons indépendante du référentiel.

Application :

Exercice 13* : *Rotation d'un cylindre dans une cornière*



Un cylindre de masse m, de rayon R, tournant, à l'instant initial, à la vitesse angulaire positive ω_0 autour de son axe, est posé sur une cornière. On suppose que le cylindre reste en permanence en contact avec les plans horizontal (Oxz) et vertical (Oyz) de la cornière et on appelle f le coefficient de glissement entre le cylindre et les plans de la cornière.
1.– En appliquant le théorème du moment cinétique en C, déterminer la loi horaire $\omega(t)$.

2.– Calculer l'instant t_0 auquel le cylindre s'immobilise.
3.– Établir un bilan énergétique entre l'instant initial et l'instant t_0.
Le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son axe est $J = \frac{1}{2}mR^2$.

Réponses :

4 Quelques liaisons entre les solides

4.1 Liaison parfaite

Une liaison entre deux solides S_1 et S_2 est dite **parfaite** si la puissance totale des actions de contact est nulle au cours du mouvement.

$$\mathcal{P}_c = 0$$

4.2 Liaison rotule ou sphérique

Les deux solides S_1 et S_2 ont une **liaison rotule** s'il y a un point A de S_1 fixe par rapport à S_2. Donc le seul mouvement de S_1 par rapport à S_2 est un mouvement de **rotation autour d'un point** lié à S_2.

4.3 Liaison pivot ou rotoïde

Les deux solides S_1 et S_2 ont une **liaison pivot** s'il y a un axe Δ de S_1 fixe par rapport à S_2. Donc le seul mouvement de S_1 par rapport à S_2 est un mouvement de **rotation autour d'un axe** Δ lié à S_2.

Application :