

CENTRE RÉGIONALE DES MÉTIERS
DE L'ÉDUCATION ET DE LA FORMATION
MARRAKECH-SAFI

CPA

Préparation Concours AGP

PROBLÈMES CORRIGÉS

MÉCANIQUE
AGRÉGATION DE PHYSIQUE-CHIMIE
OPTION PHYSIQUE

Par :
ABDELFETTAH HABIB

2014-2021

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| 1 Étude d'un pendule simple | 5 |
| 1.1 Énoncé | 5 |
| 1.2 Corrigé | 7 |
| 2 Étude d'un satellite artificiel | 11 |
| 2.1 Énoncé (d'après ATS) | 11 |
| 2.2 Corrigé | 12 |
| 3 Système de deux points matériels | 17 |
| 3.1 Énoncé | 17 |
| 3.2 Corrigé | 18 |
| 4 Champ magnétique et propriétés de la matière | 21 |
| 4.1 Énoncé (d'après CNC 2005) | 21 |
| 4.2 Corrigé | 21 |
| 4.2.1 Nature de la trajectoire et applications | 21 |
| 4.2.2 Satbilité de la trajectoire | 23 |
| 4.2.3 Théorème de Larmor | 24 |
| 4.2.4 Oscillateur harmonique spatial | 26 |
| 4.2.5 Changements de fréquence dus à la rotation de LARMOR | 29 |
| 4.2.6 Conséquence sur les raies d'émission de l'atome | 31 |
| 5 Mouvements d'un cerceau | 35 |
| 5.1 Énoncé (d'après CCP) | 35 |
| 5.2 Corrigé | 37 |
| 6 Composition de mouvement | 43 |
| 6.1 Énoncé | 43 |
| 6.2 Corrigé | 45 |
| 7 Mouvement d'un cerceau lesté | 51 |
| 7.1 Énoncé (d'après CCP) | 51 |
| 7.2 Corrigé | 52 |
| 8 Oscillation d'un cylindre dans une gouttière | 57 |
| 8.1 Énoncé | 57 |
| 8.2 Corrigé | 59 |

Problème - 1

Étude d'un pendule simple

1.1 Énoncé

On considère un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'une tige de longueur L et de masse négligeable.

L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g\vec{e}_x$, \vec{e}_x étant un vecteur unitaire de l'axe vertical descendant Ox . La position du point M est repérée par l'angle $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM})$.

On donne $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $L = 0,25 \text{ m}$.

1. Oscillations non amorties

Dans cette partie, on négligera tout type de frottement.

1.1. En utilisant le théorème du moment cinétique en O , déterminer l'équation différentielle du mouvement de M . Calculer la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0 du système pour les petites oscillations.

1.2. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique du système en prenant l'origine de l'énergie potentielle en $\theta = 0$.

1.3. Déterminer, en fonction de m , g et L , l'expression de l'énergie mécanique minimale E_0 qu'il faut donner à M en $\theta = 0$ pour qu'il atteigne le sommet de sa trajectoire.

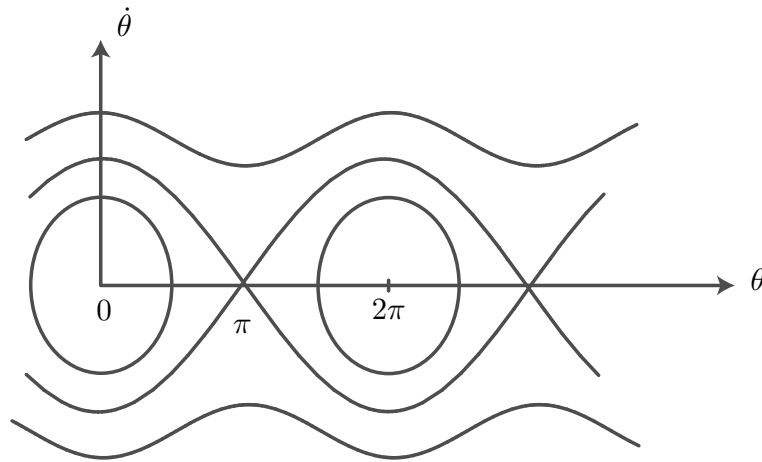
1.4. Dans la figure ci-dessous on donne le portrait de phase du système.

1.4.1. Indiquer les positions d'équilibre stables et instables.

1.4.2. Identifier les trajectoires de phases correspondantes à $E_m < E_0$, $E_m = E_0$ et $E_m > E_0$ et décrire le mouvement de M dans chaque cas.

2. Oscillations libres amorties

En réalité, les frottements fluides sont inévitables à cause de l'air. On modélise les actions dissipatrices de type fluide par une force $\vec{f} = -2m\lambda\vec{v}$ où λ est une constante positive. Dans ces conditions, le pendule effectue des oscillations amorties.



- 2.1.** En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle du mouvement.
- 2.2.** Déterminer la solution de l'équation précédente pour les petites oscillations.
On donne à $t = 0$, $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \Omega > 0$.
- 2.3.** Représenter l'allure de $\theta(t)$ et donner l'expression de la pseudo-période.
- 2.4.** On observe qu'après 10 oscillations, l'amplitude de mouvement n'est que 80 % de l'amplitude initiale. Calculer le décrement logarithmique du mouvement et en déduire la valeur de λ et du facteur de qualité Q .
- 2.5.** On lance le pendule de la position $\theta = 0$ avec une vitesse $\Omega > 0$. Dessiner qualitativement dans le plan de phase $(\theta, \dot{\theta})$ les trajectoires de phase dans les deux cas suivants :
- 2.5.1.** La vitesse du pendule s'annule pour la première fois pour $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$.
- 2.5.2.** La vitesse du pendule s'annule pour la première fois pour $\theta_2 = \frac{7\pi}{3}$.

3. Oscillations forcées

Pour compenser l'énergie dissipée par les frottements, on exerce sur le pendule, une action excitatrice de moment par rapport à O :

$$\vec{M} = mL^2 a \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

- 3.1.** Écrire la nouvelle équation différentielle vérifiée par θ . Préciser l'unité de a .
- 3.2.** Déterminer la solution, en régime établi, sous la forme $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$.
- 3.3.** Tracer l'allure de θ_m en fonction de ω en précisant les points particuliers de la courbe. Interpréter les résultats.
- 3.4.** Comment choisir a pour que l'amplitude θ_m reste voisine de 0,1 rad pour $\omega = \omega_0$.

1.2 Corrigé

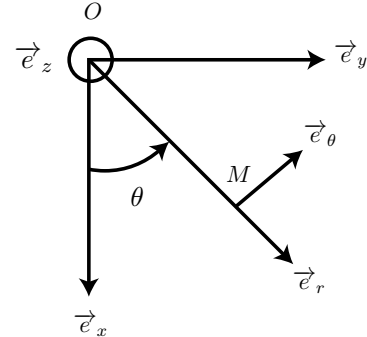
1. Oscillations non amorties

1.1. Le théorème du moment cinétique (au point O fixe) donne :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} &= \frac{d(\overline{OM} \wedge m\vec{v})}{dt} = mL^2\ddot{\theta}\vec{e}_z \\ &= \overline{OM} \wedge (T\vec{e}_r + mg\vec{e}_x) = -mgL \sin\theta \vec{e}_z \end{aligned}$$

d'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0$$



Pour les petites oscillations : $\sin\theta \simeq \theta$, d'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

donc :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{et} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

1.2. L'énergie potentielle du poids est :

$$E_{p1} = - \int_0^\theta mg \vec{e}_x \cdot L d\theta \vec{e}_\theta = \int_0^\theta mgL \sin\theta d\theta = mgL(1 - \cos\theta)$$

L'énergie potentielle de la tension du fil est :

$$\int_0^{E_{p2}} dE_{p2} = E_{p2} = - \int_0^\theta T \vec{e}_r \cdot L d\theta \vec{e}_\theta = 0$$

L'énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos\theta) \\ &= \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

1.3. Puisque on néglige les frottements, il y a conservation de l'énergie mécanique, donc :

$$E_m(\theta = 0) = E_0 = E_m(\theta = \pi)$$

et puisque

$$\dot{\theta}(\theta = \pi) = 0 \quad (\text{d'après le portrait de phase})$$

il vient :

$$E_0 = 2mgL$$

1.4.

1.4.1. Les positions d'équilibre :

Les positions d'équilibre stables sont telles que :

$$\left(\frac{dE_p}{d\theta}\right)_{\theta_e} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta_e} < 0$$

soit :

$$\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$$

Les positions d'équilibre instables sont telles que :

$$\left(\frac{dE_p}{d\theta}\right)_{\theta_e} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta_e} > 0$$

soit :

$$\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$$

1.4.2. Les trajectoires de phase correspondant à $E_m < E_0$ sont les ellipses. Le mouvement de M est un mouvement oscillatoire non amorti.

Les trajectoires de phase correspondant à $E_m = E_0$ sont les trajectoires passant par $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ ces positions correspondent à des points d'arrêt du point M .

Les trajectoires de phase correspondant à $E_m > E_0$ sont les trajectoires qui ne coupent pas l'axe des θ . Le mouvement de M est un mouvement rotatoire dans un même sens.

2. Oscillations libres amorties

2.1. Le théorème du moment cinétique conduit à :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = mL^2\ddot{\theta}\vec{e}_z = \vec{OM} \wedge (T\vec{e}_r + mg\vec{e}_x - 2m\lambda L\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = -(mgL \sin \theta + 2m\lambda L^2\dot{\theta})\vec{e}_z$$

d'où :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

2.2. Pour les petites oscillations $\sin \theta \simeq \theta$ d'où :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

$\Delta' = \lambda^2 - \frac{g}{L} < 0$, d'où la solution de l'équation précédente :

$$\theta = \exp(-\lambda t) \left[A \cos(\sqrt{-\Delta'} t) + B \sin(\sqrt{-\Delta'} t) \right]$$

ou A et B sont deux constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales ($\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = \Omega$).

soit :

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = \frac{\Omega}{\sqrt{-\Delta'}}$$

2.3. La solution de l'équation est alors :

$$\theta = \frac{\Omega \exp(-\lambda t)}{\sqrt{-\Delta'}} \sin(\sqrt{-\Delta'} t)$$



L'expression de la pseudo-période :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{-\Delta'}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L} - \lambda^2}}$$

2.4. Le décrément logarithmique est défini par :

$$\delta = \frac{1}{10} \ln \frac{\theta(t)}{\theta(t + 10T)} = \frac{1}{10} \ln \frac{100}{80} \simeq 0,022$$

En remplaçant θ par son expression dans la définition du décrément logarithmique, on trouve :

$$\delta = \lambda T = \lambda \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L} - \lambda^2}}$$

d'où :

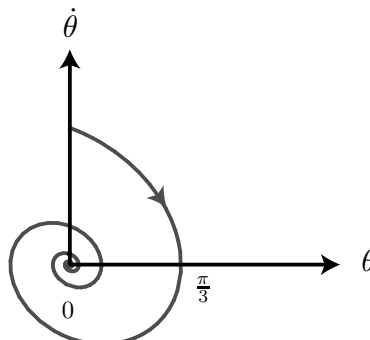
$$\lambda = \sqrt{\frac{g\delta^2}{L(4\pi^2 + \delta^2)}} \simeq 0,022 \cdot \text{s}^{-1}$$

et le facteur de qualité est :

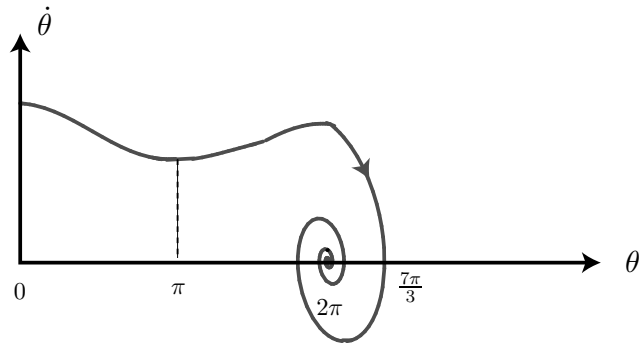
$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\sqrt{g}}{2\lambda\sqrt{L}} \simeq 141$$

2.5.

2.5.1.



2.5.2.



3.

3.1. Pour les petites oscillations :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = a \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

L'unité de a est rad.s^{-2} .

3.2. Remplaçons, en notation complexe, $\underline{\theta}$ par son expression $\theta_m \exp(j(\omega t + \varphi))$ dans l'équation précédente :

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\lambda)\underline{\theta} = a \exp(j\omega t)$$

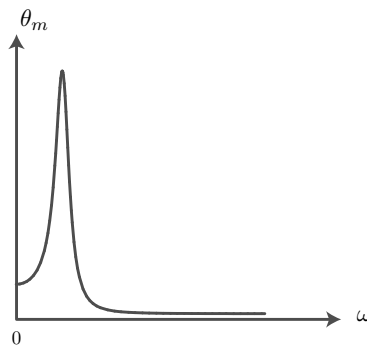
d'où :

$$\theta_m = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}}$$

et

$$\begin{cases} \varphi = \arctan \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} & \text{si } \omega_0 > \omega \\ \varphi = \arctan \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} - \pi & \text{si } \omega_0 < \omega \end{cases}$$

3.3



3.4. On a :

$$\theta_m = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}}$$

lorsque $\omega = \omega_0$, alors :

$$a = 2\theta_m\omega_0\lambda = 2\theta_m\lambda\sqrt{\frac{g}{L}} \simeq 0,03 \text{ rad.s}^{-2}$$

Problème - 2

Étude d'un satellite artificiel

2.1 Énoncé (d'après ATS)

Toute l'étude sera faite par rapport au référentiel géocentrique supposé galiléen.

1. Propriétés générales de la trajectoire

Un satellite artificiel S assimilable à un point matériel de masse m , évolue librement à grande distance de la terre. La terre est considérée comme un corps immobile, rigoureusement sphérique et homogène, de rayon R , de masse M et de centre O .

On désigne par $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OS}$, le vecteur position du satellite et par $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ son vecteur vitesse. À l'instant initial $t = 0$, le satellite se trouve dans la position \vec{r}_0 , animé de la vitesse \vec{v}_0 , non radiale.

L'influence de la lune, du soleil, des autres planètes, ainsi que celle de l'atmosphère sont ignorées. On étudie la situation pour $t > 0$.

1.1. Donner l'expression vectorielle du champ de force $\vec{F}(\vec{r})$ auquel est soumis le satellite. On désignera par G la constante de gravitation universelle et par \vec{u} le vecteur unitaire radial. S'agit-il d'un champ de force central ?

1.2. Définir le vecteur moment cinétique \vec{J} du satellite, par rapport au centre O .

1.3. Montrer que, quel que soit $t \geq 0$, le moment cinétique \vec{J} du satellite est constant, égal à une valeur \vec{J}_0 . Expliciter \vec{J}_0 .

1.4. Justifier le fait que la trajectoire suivie par le satellite, pour $t \geq 0$, est entièrement contenue dans un plan fixe \mathcal{P} que l'on précisera.

2. Étude du mouvement plan. Aspects dynamiques et énergie

On reprend les hypothèses du paragraphe 1. ci-dessus, en se plaçant dans le plan \mathcal{P} de la trajectoire. Ce plan est rapporté aux coordonnées polaires (r, θ) de centre O et de base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. \vec{u}_r et \vec{u}_θ sont respectivement le vecteur unitaire radial et le vecteur unitaire orthoradial.

2.1. Montrer que le principe fondamentale de la dynamique, appliqué au satellite, conduit à l'équation

différentielle :

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

2.2. Dédurre de l'équation différentielle précédente que le mouvement du satellite vérifie une relation de la forme :

$$r^n\dot{\theta} = C = \text{cte}$$

Déterminer l'exposant n et relier la constante C au moment cinétique J du satellite par rapport au centre de la terre et à sa masse m .

2.3. Montrer que l'aire dA balayée par le rayon vecteur \vec{r} durant l'intervalle de temps dt est proportionnelle à dt .

2.4. Calculer l'énergie potentielle $U(r)$ dont dérive la force gravitationnelle \vec{F} . On adoptera la convention $U = 0$ à l'infini.

2.5. Soit $K(r)$ l'énergie cinétique du satellite. De quelle propriété jouit la somme :

$$E(r) = U(r) + K(r) \quad ?$$

2.6. Soient U_0 et K_0 respectivement l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du satellite à l'instant initial. À quelle condition liant U_0 et K_0 , le satellite reste-t-il en orbite autour de la terre (état lié) ? Quelle est alors la trajectoire suivie par le satellite ? On donnera ces deux résultats sans les démontrer.

3. Satellite géostationnaire

La terre tourne sur elle-même, autour de sa ligne des pôles, à la vitesse angulaire Ω . On ne considère pas son mouvement de révolution autour du soleil.

Le satellite évolue maintenant de façon géostationnaire, c'est à dire qu'il tourne de façon synchrone avec la terre sur une orbite circulaire de rayon a_1 , située dans le plan équatorial.

3.1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au satellite, déterminer l'expression du rayon a_1 de l'orbite géostationnaire, en fonction de G , M et Ω .

3.2. Exprimer l'énergie mécanique totale E_T du satellite sur son orbite géostationnaire, en fonction de G , M , m et a_1 .

3.3. Le satellite a été lancé à partir d'une base terrestre située sur l'équateur (Kourou [Guyane]).

Déterminer l'énergie mécanique W qu'il a fallu dépenser pour le placer sur l'orbite géostationnaire de rayon a_1 . On ne tient pas compte des frottements dans l'atmosphère.

2.2 Corrigé

1.

1.1. Le satellite S est soumis à la force gravitation :

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}$$

\vec{F} est une force centrale puisqu'elle est toujours dirigée vers O .

1.2. Le moment cinétique du satellite par rapport à O est :

$$\vec{J} = \vec{OS} \wedge m \vec{v}$$

1.3. Le théorème du moment cinétique (dans le référentiel géocentrique) du satellite, donne : :

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{OS} \wedge \vec{F} = r \vec{u} \wedge F \vec{u} = \vec{0}$$

donc \vec{J} est un vecteur constant :

$$\vec{J} = \vec{J}_0 = \vec{r}_0 \wedge m \vec{v}_0$$

1.4. On a :

$$\vec{J}_0 = \vec{cte} = \vec{OS} \wedge m \vec{v}$$

donc :

$$\vec{OS} \perp \vec{cte}$$

d'où le mouvement de S est dans le plan contenant O et perpendiculaire à \vec{J}_0 .

2. Étude du mouvement plan. Aspect dynamique et énergétique

2.1. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à S dans le référentiel géocentrique est : :

$$m \frac{d^2 \vec{OS}}{dt^2} = \vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}$$

puisque :

$$\vec{OS} = r \vec{u} \implies \frac{d\vec{OS}}{dt} = \dot{r} \vec{u} + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \implies \frac{d^2 \vec{OS}}{dt^2} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u} + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta$$

d'où :

$$m \left[(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u} + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta \right] = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}$$

d'où l'on tire :

$$r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} = 0 \implies r^2 \ddot{\theta} + 2 r \dot{r} \dot{\theta} = 0$$

L'accélération du satellite est radiale.

2.2. On a :

$$r^2 \ddot{\theta} + 2 r \dot{r} \dot{\theta} = \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} = 0 \implies r^2 \dot{\theta} = C = \text{cte}$$

C est une constante du mouvement (constante des aires).

Le moment cinétique est :

$$\vec{J} = r \vec{u} \wedge m(\dot{r} \vec{u} + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

d'où :

$$J = mC$$

2.3.

$$dA \simeq \frac{1}{2} (\vec{r} \wedge d\vec{r}) = \frac{1}{2} (\vec{r} \wedge \vec{v}) dt = \frac{1}{2} C dt$$

2.4. La variation de l'énergie potentielle étant égale et opposée au travail de la force conservative, l'énergie potentielle étant conventionnellement nulle à l'infini, d'où :

$$U(r) = GMm \int_0^r \frac{dr}{r^2} + \text{cte} \implies U(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

2.5. Le théorème de l'énergie cinétique du satellite, est :

$$dK = \delta W(\vec{F}) = -dU \implies d(K + U) = 0 \implies E(r) = K(r) + U(r) = \text{cte}$$

2.6. L'état lié correspond à une énergie mécanique du satellite négative :

$$E(r) = K_0 + U_0 < 0$$

Le mouvement reste lié si $r < \infty$, donc $E \leq 0$. La trajectoire du satellite est elliptique.

3. Satellite géostationnaire

3.1. L'application du P.F.D au satellite (dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}) en orbite géostationnaire circulaire conduit à :

$$m \vec{a}(S)_{/\mathcal{R}} = -G \frac{Mm}{a_1^2} \vec{u}$$

La loi de composition du mouvement donne :

$$\vec{a}(S)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(S)_{/\mathcal{R}_T} + \vec{a}(O)_{/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \vec{OS} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OS}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(S)_{/\mathcal{R}_T}$$

ou \mathcal{R}_T étant un référentiel terrestre ($\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z = \text{cté}$).

Le satellite étant fixe par rapport à la terre : $\vec{a}(S)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{0}$ et $\vec{v}(S)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{0}$. Donc,

$$\vec{a}(S)_{/\mathcal{R}} = -\Omega^2 a_1 \vec{u} = -G \frac{M}{a_1^2} \vec{u}$$

d'où :

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{GM}{\Omega^2}}$$

3.2. On a :

$$E_T = U(a_1) + K(a_1) = -\frac{GMm}{a_1} + \frac{1}{2} m a_1 \Omega^2 = -\frac{GMm}{a_1} + \frac{1}{2} m \frac{GM}{a_1}$$

donc :

$$E_T = -G \frac{Mm}{2a_1}$$

3.3. L'énergie mécanique qu'il faut communiquer au satellite au sol est :

$$W = E_T - E_{T0}$$

avec E_{T0} énergie mécanique du satellite sur la surface de la terre et exactement sur l'équateur :

$$E_{T0} = \frac{1}{2} m R^2 \Omega^2 - G \frac{Mm}{R}$$

or :

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a_1^3}$$

donc :

$$E_{T0} = \frac{GM}{2a_1^3} m R^2 - G \frac{Mm}{R}$$

soit :

$$W = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2a_1} - \frac{R^2}{2a_1^3} \right)$$

Problème - 3

Systeme de deux points materiels

3.1 Énoncé

Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle, forment un système isolé. À l'instant t , elles sont situées respectivement aux points A_1 et A_2 repérés, dans un référentiel galiléen, par $\vec{r}_1 = \vec{OA}_1$ et $\vec{r}_2 = \vec{OA}_2$, avec les vecteurs vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2 . On pose $\vec{r} = \vec{A_1A_2}$ et $r = |\vec{r}|$ et on désignera par \mathcal{G} la constante de gravitation universelle.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux masses.
2. Déterminer la position de leur centre de masse G . Quelle est la trajectoire de G ? Déterminer sa vitesse.
3. Calculer l'énergie cinétique des deux masses dans le référentiel barycentrique ; montrer qu'elle est égale à celle d'une masse ponctuelle de vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ et de masse μ que l'on déterminera en fonction de m_1 et m_2 .
4. Montrer que le mouvement relatif de m_2 par rapport à m_1 , caractérisé par \vec{r} , est équivalent à celui de cette masse ponctuelle soumise à une force que l'on explicitera et dont on précisera les caractéristiques.
5. À quelle condition portant sur r et v les deux masses restent-elles à distance finie l'une de l'autre ?
6.
 - 6.1. À quelle condition sur r et v , les deux masses restent-elles à distance fixe r_0 l'une de l'autre ?
 - 6.2. Déterminer dans ce cas, la période T de leur mouvement, ainsi que la vitesse angulaire Ω , en fonction de m_1 , m_2 , r_0 et \mathcal{G} .

7. Étude d'un cas particulier du problème à trois corps

On étudie un cas particulier du problème à trois corps "restreint", à savoir :

★ deux masses m_1 et m_2 sont beaucoup plus grandes que la troisième m , soit $m_1 \gg m$ et $m_2 \gg m$. La masse m est supposée ponctuelle comme m_1 et m_2 .

★ les deux masses m_1 et m_2 , à distance constante l'une de l'autre, effectuent un mouvement de rotation à la vitesse angulaire Ω autour de leur centre d'inertie G . Ce mouvement décrit au 6., n'est pas affecté par la présence de la troisième masse m . On ne considère que la situation où les trois masses restent alignées au

cours du temps. La masse m est située au point A . On prendra la direction $\overrightarrow{A_1A_2}$ comme axe $x'Gx$ d'origine G , avec :

$$\overrightarrow{GA_1} = -r_1 \vec{e}_x ; \quad \overrightarrow{GA_2} = r_2 \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GA} = x \vec{e}_x$$

\vec{e}_x vecteur unitaire.

La composante selon l'axe $x'Gx$ de la force qui s'exerce sur la masse m , dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire Ω est :

$$F_x = -\frac{Gmm_1}{|x+r_1|^3}(x+r_1) - \frac{Gmm_2}{|x-r_2|^3}(x-r_2) + m\Omega^2x$$

7.1 Que représente chacun des termes de F_x ?

7.2. Montrer que, dans ce référentiel tournant, cette composante dérive d'une fonction $U(x)$ qui joue le rôle d'une "énergie potentielle". Expliciter $U(x)$.

7.3. Effectuer une étude qualitative de $U(x)$ en fonction de x , par une analyse graphique, et montrer qu'il y a trois positions "d'équilibre" possibles pour la masse m et les situer qualitativement par rapport aux masses m_1 et m_2 .

7.4. Discuter de la stabilité de ces positions d'équilibre, dans le référentiel tournant, vis à vis des déplacements selon l'axe $x'Gx$.

3.2 Corrigé

1. On a :

$$dE_p = dE_{p1} + dE_{p2} = -\vec{f}_1 \cdot d\vec{A}_1 - \vec{f}_2 \cdot d\vec{A}_2$$

or :

$$\vec{f}_1 = \vec{f}_2 \quad \text{puisque'il s'agit d'un système isolé}$$

d'où :

$$dE_p = -\vec{f}_2 \cdot d\overrightarrow{A_1A_2} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr$$

donc si on prend $E_p(\infty) = 0$:

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

2. On a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2}}{m_1 + m_2}$$

Le théorème de la résultante cinétique appliqué au système $\{A_1, A_2\}$, s'écrit :

$$(m_1 + m_2) \vec{a}_G = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$$

la trajectoire de G est donc rectiligne et sa vitesse :

$$\vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

3. On a :

$$E_c^* = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^* + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^*$$

or la loi de composition des vitesses donne, puisque $\vec{\omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$:

$$\vec{v}_1^* = \vec{v}_1 - \vec{v}_G = -\frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2^* = \vec{v}_2 - \vec{v}_G = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \vec{v}$$

d'où :

$$E_c^* = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ la masse réduite}$$

4. Les théorèmes de la résultante cinétique appliqués respectivement à A_1 et A_2 , s'écrivent :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{A}_1}{dt^2} = \vec{f}_1 \quad \text{et} \quad m_2 \frac{d^2 \vec{A}_2}{dt^2} = \vec{f}_2$$

Puisque $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$, alors on en déduit :

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_2$$

c'est le théorème de la résultante cinétique d'une particule fictive de masse μ et soumise à la force $\vec{f}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$: force exercée par \vec{A}_1 sur \vec{A}_2 . Il s'agit d'une force centrale.

5. Pour que r soit finie (état lié), il faut que :

$$E_m^* = \frac{1}{2} \mu v^2 - G \frac{m_1 m_2}{r} < 0$$

6.

6.1. Dans ce cas, le mouvement de la particule fictive dans le référentiel barycentrique est circulaire de rayon r_0 . Le théorème de sa résultante cinétique donne :

$$\mu \frac{v^2}{r_0} = G \frac{m_1 m_2}{r_0^2} \quad v = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{r_0}}$$

6.2.

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi r_0}{v} = 2\pi r_0 \sqrt{\frac{r_0}{G(m_1 + m_2)}} \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{v}{r_0} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{r_0^3}}$$

7. • $-\frac{Gm_1 m_2}{|x+r_1|^3} (x+r_1)$ représente la force exercée par A_1 sur A .

• $-\frac{Gm_1 m_2}{|x-r_2|^3} (x-r_2)$ représente la force exercée par A_2 sur A .

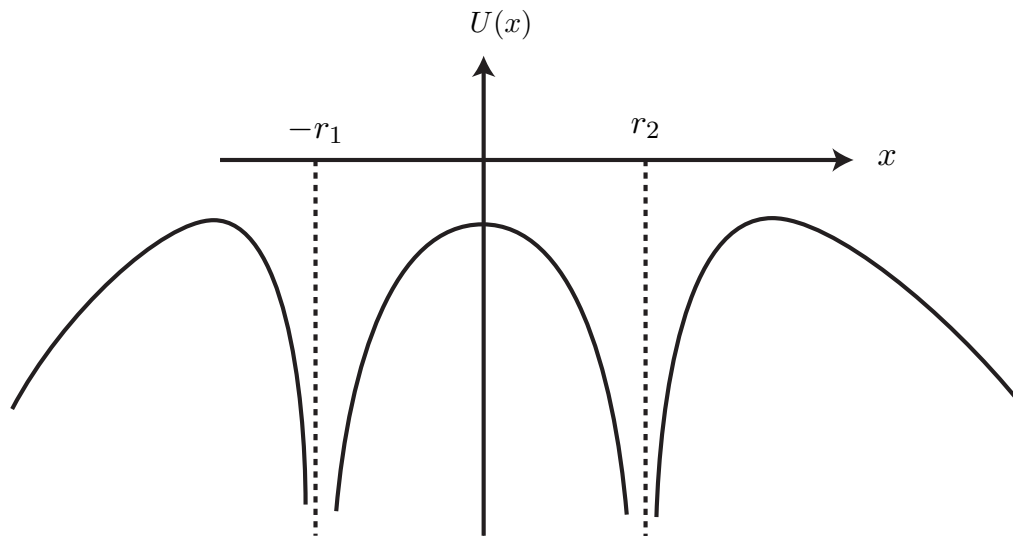
• $m\Omega^2 x$ représente la force d'inertie. En effet :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ie} &= -m \vec{a}_e \\ &= -m \left[\vec{a}_{G/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{GA} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{GA}) \right] \\ &= m\Omega^2 x \vec{e}_x \end{aligned}$$

Remarque : La force de CORIOLIS :

$$\vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_e = -2m\Omega \vec{e}_z \wedge \vec{v}_{A/\mathcal{R}} = -2m\Omega \dot{x} \vec{e}_y$$

n'a pas de composante suivant Ox .



7.2. On a :

$$dU(x) = -F_x dx = -G \frac{mm_1}{|x+r_1|} - G \frac{mm_2}{|x-r_2|} - \frac{m}{2} \Omega^2 x^2$$

7.3. $U(x)$ présente trois maximum, donc trois positions d'équilibre.

7.4. Les positions d'équilibre correspondent à des maximums de $U(x)$, donc elles sont instables.

Problème - 4

Champ magnétique et propriétés de la matière

4.1 Énoncé (d'après CNC 2005)

4.2 Corrigé

Faisceau électronique

4.2.1 Nature de la trajectoire et applications

4.2.1.1 Théorème de la résultante cinétique

On néglige le poids de l'électron.

Par rapport à un référentiel galiléen, le théorème de la résultante cinétique (TRC), s'écrit pour l'électron :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

4.2.1.2 Nature du mouvement

La projection sur :

\vec{u}_z donne : $m_e \frac{dv_z}{dt} = 0$ (1) $\implies v_z = cte = 0 \implies$ trajectoire plane.

\vec{v} donne : $m_e \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ (2) $\implies v^2 = cte = 0 \implies v = cte$.

4.2.1.3 La trajectoire

La projection sur :

\vec{u}_x donne : $m_e \frac{dv_x}{dt} = -ev_y B \implies v_x = -\frac{eB}{m_e} y + v_{0x}$

$\implies y - \frac{v_{0x} m_e}{eB} = -v_x \frac{m_e}{eB}$ (3).

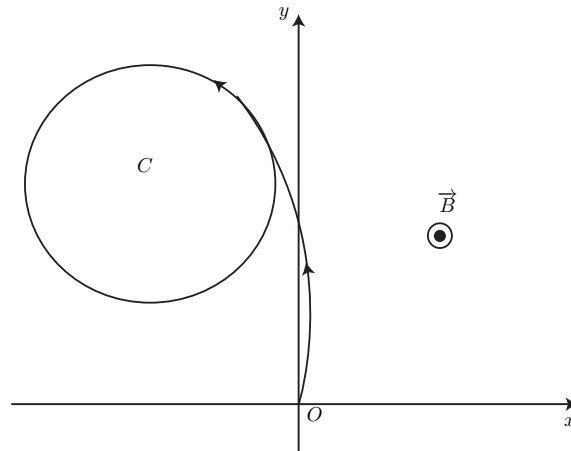
\vec{u}_y donne : $m_e \frac{dv_y}{dt} = +ev_x B \implies v_y = +\frac{eB}{m_e} x + v_{0y}$

$\implies x + \frac{v_{0y} m_e}{eB} = v_y \frac{m_e}{eB}$ (4).

(3)² + (4)² \implies :

$$\left(x + \frac{m_e}{eB} v_{0y}\right)^2 + \left(y - \frac{m_e}{eB} v_{0x}\right)^2 = \left(\frac{m_e}{eB}\right)^2 (v_{x0}^2 + v_{y0}^2) = \left(\frac{m_e v_0}{eB}\right)^2$$

La trajectoire est donc un cercle de centre $C(-\frac{m_e}{eB} v_{0y}; \frac{m_e}{eB} v_{0x})$.



4.2.1.4 Rayon de giration

Le rayon de giration de la trajectoire est alors :

$$R = \frac{m_e v_0}{eB}$$

4.2.1.5 Période du mouvement

La période du mouvement est : $T = \frac{2\pi R}{v_0} = 2\pi \frac{m_e}{eB}$

$$T = -2\pi \frac{1}{\omega_c}$$

AN : $T = 7.1.10^{-9} s \simeq 7ns$

4.2.1.6 La charge spécifique de l'électron

Le théorème de l'énergie cinétique donne : $e\Delta V = \frac{1}{2}m_e v^2 \implies v_0 = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m_e}}$

Or $R = \frac{D}{2} = \frac{\sqrt{2m_e\Delta V}}{B}$ alors :

$$\frac{e}{m_e} = \frac{8\Delta V}{D^2 B^2}$$

AN : $\frac{e}{m_e} = 1,8.10^{11} C.kg^{-1}$ résultat très proche de celui obtenu avec les valeurs de e et m_e données au début de l'énoncé $\frac{e}{m_e} \simeq 1,75.10^{11} C.kg^{-1}$.

Les éventuelles sources d'erreurs peuvent être :

- Vitesse initiale de l'électron négligée.
- incertitude sur : ΔV , D et B

4.2.1.7 Mesure de la charge de l'électron

Connaissant la masse de l'électron il suffit de mesurer le rapport $\frac{e}{m_e}$ à partir de la mesure du diamètre de la trajectoire circulaire décrite par l'électron dévié par un champ magnétique.

On peut citer aussi l'expérience de MILLIKAN (1911) qui consiste en des mesures directes de la charge de petites gouttelettes d'huile entre deux plateaux d'un condensateur placé horizontalement.

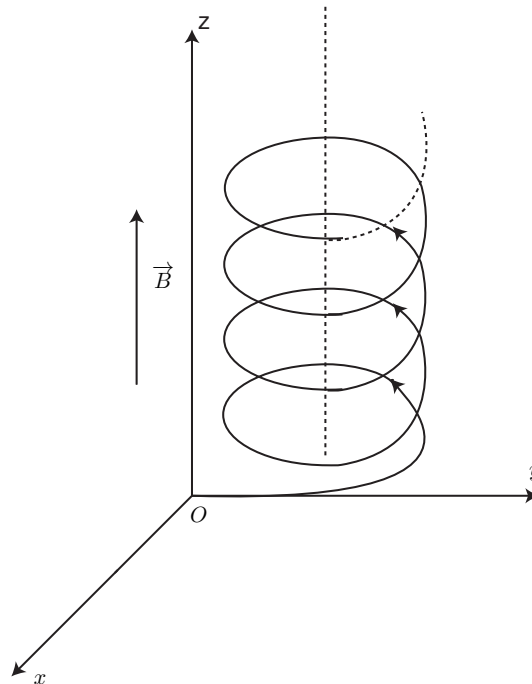
4.2.1.8 Ordre de grandeur

$$\frac{\|m_e \vec{g}\|}{\|e \vec{v} \wedge \vec{B}\|} = \frac{m_e g}{evB} = \left(\frac{m_e}{e}\right)^{3/2} \frac{g}{B\sqrt{2\Delta V}} = \left(\frac{1}{1,78 \cdot 10^{11}}\right)^{3/2} \frac{10}{5 \cdot 10^{-3} \sqrt{10^4}} \simeq 2,7 \cdot 10^{16} \ll 1$$

4.2.1.9 Trajectoire dans le plan \perp à \vec{B}

La trajectoire devient hélicoïdale puisque :

- Le mouvement de l'électron est circulaire dans le plan perpendiculaire à \vec{B} .
- Le mouvement de l'électron est uniforme dans la direction de \vec{B} .



4.2.2 Stabilité de la trajectoire

4.2.2.1

Le TRC en projection sur \vec{u}_r , \vec{u}_θ , \vec{u}_z s'écrit respectivement :

$$\begin{cases} \ddot{\varepsilon}_r - (R + \varepsilon_r)(-w_c + \dot{\varepsilon}_\theta)^2 = w_c(R + \varepsilon_r)(-w_c + \dot{\varepsilon}_\theta) \\ (R + \varepsilon_r)\ddot{\varepsilon}_\theta + 2\dot{\varepsilon}_r(-w_c + \dot{\varepsilon}_\theta) = -w_c\dot{\varepsilon}_r \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

4.2.2.2

À l'ordre un la projection sur \vec{u}_θ devient : $R\ddot{\varepsilon}_\theta - 2w_c\dot{\varepsilon}_r = w_c\dot{\varepsilon}_r$ ce qui revient à écrire :

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{w_c}{R}\varepsilon_r$$

4.2.2.3

La projection sur \vec{u}_r s'écrit aussi :

$$R\ddot{\varepsilon}_r - [(R + \varepsilon_r)(w_c^2 - 2w_c\dot{\varepsilon}_\theta + \dot{\varepsilon}_\theta^2)] = w_c(-Rw_c + R\dot{\varepsilon}_\theta - w_c\varepsilon_r + \varepsilon_r\dot{\varepsilon}_\theta)$$

En remplaçant $\dot{\varepsilon}_\theta$ par la valeur de la question 1.2.2 on obtient :

$$\ddot{\varepsilon}_r + w_c^2\varepsilon_r = 0$$

4.2.2.4

La solution de l'équation différentielle précédente est : $\varepsilon_r = A\cos(w_ct) + B\sin(w_ct)$. Avec $\varepsilon_r(0) = 0$, on obtient :

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r0} \sin(w_ct)$$

Avec $\varepsilon_{r0} = \varepsilon_r(t = 0)$

D'après la relation de la question 1.2.2 il vient :

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{w_c\varepsilon_{r0}}{R} \sin(w_ct)$$

Le mouvement selon \vec{u}_r est borné donc stable.

La vitesse angulaire est aussi bornée le mouvement selon \vec{u}_θ est aussi stable.

4.2.2.5

Le mouvement selon Oz n'est pas borné : il est donc instable. En effet : $z = \dot{z}_0 \times t$.

Deuxième partie : Effet ZEEEMAN

4.2.3 Théorème de Larmor

4.2.3.1 L'accélération dans le référentiel \mathcal{R}

$$m_e \vec{a}_0 = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a}_0 = \frac{q}{m_e} \vec{E}$$

4.2.3.2

$$m_e \vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m_e} \vec{E} + \frac{q}{m_e} \vec{v} \wedge \vec{B}$$

4.2.3.3 L'accélération dans le référentiel \mathcal{R}'

$$\vec{a}' = \frac{q}{m_e} \vec{E} + \frac{q}{m_e} \vec{v} \wedge \vec{B} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}') - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}'$$

4.2.3.3.1 Expression de \vec{a}' :

On a

$$m_e \vec{a}' = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B} - m_e \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}') - 2m_e \vec{\Omega} \wedge \vec{v}'$$

soit :

$$m_e \vec{a}' = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B} - m_e \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}') - 2m_e \vec{\Omega} \wedge (\vec{v} - \vec{\Omega} \wedge \vec{r}')$$

d'où

$$m_e \vec{a}' = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B} + m_e \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}') - 2m_e \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

4.2.3.3.2 Expression de $\vec{\Omega}$:

si on prend

$$q \vec{v} \wedge \vec{B} = 2m_e \vec{\Omega} \wedge \vec{v}'$$

soit

$$\vec{\Omega} = -\frac{q}{2m_e} \vec{B}$$

alors

$$m_e \vec{a}' = q \vec{E} + m_e \left(\frac{-q}{2m_e}\right)^2 \vec{B} \wedge (\vec{B} \wedge (\vec{r}'))$$

$$m_e \vec{a}' = q \vec{E} + \left(\frac{q^2}{4m_e}\right) \vec{B} \wedge (\vec{B} \wedge (\vec{r}'))$$

4.2.3.3.3 Expression du champ électrostatique :

$$\vec{E} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r^3}$$

4.2.3.3.4 Expression du rapport ρ :

$$\rho = \frac{\left(\frac{q^2}{4m_e}\right) \vec{B} \wedge (\vec{B} \wedge (\vec{r}'))}{|q| \|\vec{E}\|} \leq \left(\frac{q^2 B^2 r}{4m_e}\right) / |qE| = \rho_{max}$$

En remplaçant E par son expression, il vient : $\rho_{max} = \frac{\pi}{\mu_0 c_0^2} \frac{B^2 r^3}{m_e}$ **4.2.3.3.5 Ordre de grandeur ρ_{max} :**

$$\rho_{max} \simeq 10^{-10} \ll 1$$

donc

$$m_e \vec{a}' = q \vec{E}$$

4.2.3.4

L'équation précédente traduit le théorème de LARMOR

4.2.4 Oscillateur harmonique spatial

4.2.4.1 Nature du mouvement

Le théorème de la résultante cinétique dans le référentiel galiléen :

$$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{r}' \wedge \vec{f}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_0 = m_e \vec{r}' \wedge \vec{v} = cte$$

donc le mouvement est dans le plan \perp à $\vec{\sigma}_0$
Le mouvement peut être rectiligne si $\vec{\sigma}_0 = \vec{0}$

4.2.4.2 Dans le plan de la trajectoire :

4.2.4.2.1 Projection de $\vec{\sigma}$:

On a :

$$\vec{\sigma} = m_e \vec{r}' \wedge \vec{v} = r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta)$$

soit :

$$\vec{\sigma} = m_e r^2 \dot{\theta} \vec{u} \Rightarrow \sigma = \vec{\sigma} \cdot \vec{u} = m r^2 \dot{\theta}$$

4.2.4.2.2 L'expression de l'énergie mécanique :

$$E = E_C + E_P$$

L'énergie potentielle :

$$dE_P = -\vec{f}_r \cdot d\vec{r} = m_e \omega_o^2 r dr \Rightarrow E_P = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 r^2 + \text{constante}$$

La *constante* est annulée en prenant $E_P(r=0) = 0$.

L'énergie cinétique :

$$E_C = \frac{1}{2} m_e (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

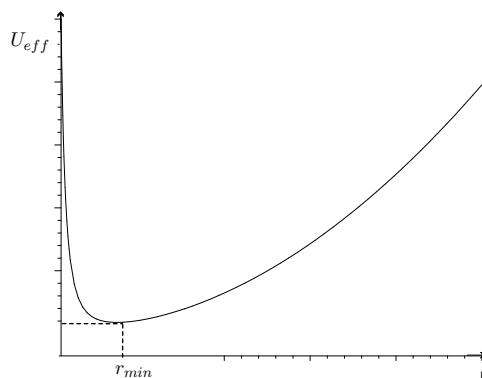
donc, l'énergie mécanique :

$$E = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + U_{eff}$$

avec

$$U_{eff} = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{\sigma^2}{m_e^2 r^2} + \omega_o^2 r^2 \right)$$

4.2.4.2.3 La seule force f_r étant conservative (elle dérive de E_P) alors $E = cte$



4.2.4.2.4 Rayon de la trajectoire :

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow r = r_{min} = \sqrt{\frac{\sigma}{m_e \omega_o}}$$

La trajectoire peut être circulaire de rayon r_{min} et qui correspond à $E = U_{eff_{min}}$ (car $\dot{r} = 0$ en $r = r_{min}$) soit $E = U_{eff}(r_{min}) = \sigma \omega_o$

4.2.4.3 Théorème de la résultante cinétique

$$m_e a_e = -m_e \omega_o^2 \vec{r} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} + \omega_o^2 \vec{r} = \vec{0}$$

d'où :

$$\vec{r}(t) = \vec{A} \cos(\omega_o t) + \vec{B} \sin(\omega_o t)$$

avec

$$\vec{A} = \vec{r}(0)$$

et

$$\vec{B} = \frac{\dot{\vec{r}}(0)}{\omega_o}$$

donc

$$\vec{r} = \vec{r}(0) \cos(\omega_o t) + \frac{\dot{\vec{r}}(0)}{\omega_o} \sin(\omega_o t)$$

4.2.4.4 Mouvement de l'électron suivant Oz

4.2.4.4.1 Expression de $z(t)$:

$$z(t) = z(0) \cos(\omega_o t) + \frac{\dot{z}(0)}{\omega_o} \sin(\omega_o t)$$

4.2.4.4.2 Module et argument de \underline{z} :

En notation complexe :

$$\underline{z} = [z(0) \exp -i(\omega_o t) + \frac{\dot{z}(0)}{\omega_o} \exp -i(\omega_o t - \frac{\pi}{2})] \vec{u}_z$$

$$\underline{z}(t) = (z(0) + i \frac{\dot{z}(0)}{\omega_o}) \exp -i\omega_o t = Z \exp -i(\omega_o t + \zeta) \vec{u}_z$$

Avec

$$Z = \sqrt{z^2(0) + \frac{\dot{z}(0)^2}{\omega_o^2}}$$

et

$$\zeta = -\text{Arctg} \left(\frac{\dot{z}(0)}{z(0) \omega_o} \right)$$

4.2.4.5 Expression de $\underline{x}(t)$

On a

$$\underline{x}(t) = A \exp -i(\omega_o t + \alpha) \vec{u}_x$$

4.2.4.5.1 :

$$A\vec{u}_x = \frac{A}{2}(\vec{u}_x + i\vec{u}_y) + \frac{A}{2}(\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \Rightarrow A' = \frac{A}{2}$$

4.2.4.5.2 Mouvement selon Ox :

On a

$$\vec{x} = \vec{x}_d(t) + \vec{x}_g(t)$$

mouvement circulaire droite :

$$\vec{x}_g = A'(\vec{u}_x + i\vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \alpha)$$

mouvement circulaire gauche :

$$\vec{x}_d = A'(\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \alpha)$$

4.2.4.6 Mouvement selon Oy

On a :

$$\vec{y}(t) = B \exp -i(\omega_0 t + \beta) \vec{u}_y$$

soit :

$$\vec{y}(t) = \frac{B}{2}(\vec{u}_y - i\vec{u}_x) \exp -i(\omega_0 t + \beta) + \frac{B}{2}(\vec{u}_y + i\vec{u}_x) \exp -i(\omega_0 t + \beta)$$

d'où :

$$\vec{y} = \frac{-iB}{2}(\vec{u}_x + i\vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \beta) + \frac{iB}{2}(\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \beta)$$

soit :

$$\vec{y} = \vec{y}_g(t) + \vec{y}_d(t)$$

4.2.4.7 Mouvement général

4.2.4.7.1 Dans le plan \perp à Oz :

$$\vec{r}_\perp(t) = \vec{x}(t) + \vec{y}(t)$$

$$\rightarrow \vec{r}_\perp(t) = (\vec{u}_x + i\vec{u}_y) \left(\frac{A}{2} \exp -i\alpha - i\frac{B}{2} \exp -i\beta \right) \exp -i\omega_0 t + (\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \left(\frac{A}{2} \exp -i\alpha + i\frac{B}{2} \exp -i\beta \right) \exp -i\omega_0 t$$

$$\vec{r}_\perp(t) = \underline{R}_g(\vec{u}_x + i\vec{u}_y) \exp -i\omega_0 t + \underline{R}_d(\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \exp -i\omega_0 t \quad \text{avec :}$$

$$\underline{R}_g = \frac{A}{2} \exp -i\alpha - i\frac{B}{2} \exp -i\beta$$

$$\underline{R}_d = \frac{A}{2} \exp -i\alpha + i\frac{B}{2} \exp -i\beta$$

4.2.4.7.2 Le mouvement le plus général dans le plan xOy est un *mouvement elliptique*.

4.2.5 Changements de fréquence dus à la rotation de LARMOR

4.2.5.1

Théorème de la résultante cinétique dans le référentiel du laboratoire :

$$m_e \ddot{\vec{r}} = q\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{f}$$

soit :

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{q}{m_e} \dot{\vec{r}} \wedge \vec{B} - \omega_0^2 \vec{r} \quad (4.1)$$

4.2.5.2

Projection sur de l'équation (4.1) sur Oz :

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

donc le mouvement selon Oz n'est pas modifié par la champ magnétostatique $\vec{B} = B\vec{e}_z$

4.2.5.3

Projection sur de l'équation (4.1) sur Ox et Oy donne :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{qB}{m_e} \dot{y}(t) - \omega_0^2 x(t) \\ \ddot{y}(t) = -\frac{qB}{m_e} \dot{x}(t) - \omega_0^2 y(t) \end{cases}$$

4.2.5.4

4.2.5.4.1 Un mouvement circulaire gauche peut s'écrire :

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_+ t + \varphi) \\ y(t) = A \sin(\omega_+ t + \varphi) \end{cases}$$

d'où :

$$\dot{y}(t) = \omega_+ x(t)$$

4.2.5.4.2 En injectant ces équations dans l'une des équations 2.3.3, il vient :

$$-\omega_+^2 x(t) = \frac{qB}{m_e} \omega_+ x(t) - \omega_0^2 x(t)$$

soit :

$$\omega_+^2 - \frac{eB}{m_e} \omega_+ - \omega_0^2 = 0$$

4.2.5.4.3 **Ordre de grandeur** :

Pour la lumière visible on peut prendre : $\lambda \sim 500 \text{ nm}$. D'où :

$$\omega_0 = 2\pi \frac{c}{\lambda} \sim 2\pi \frac{3.10^8}{5.10^{-7}} \sim 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$$

et

$$\frac{eB}{m_e} = \frac{1,6.10^{-19} \times 1}{9,1.10^{-31}} \sim 10^{11} \text{ rad.s}^{-1}$$

Commentaire : $\frac{eB}{m_e} \ll \omega_0$ et $\omega_+ > \omega_0$

4.2.5.4.4 Calcul de $\Delta\nu_+$:

$$\Delta = \left(\frac{eB}{m_e}\right)^2 + 4\omega_0^2 \simeq 4\omega_0^2$$

d'où :

$$\omega_+ = \omega_0 + \frac{eB}{2m_e}$$

soit :

$$\Delta\nu_+ = \frac{\omega_+ - \omega_0}{2\pi} = \frac{eB}{4\pi m_e}$$

donc :

$$\Delta\nu_+ = \frac{eB}{4\pi m_e}$$

Commentaire : Ce résultat est en accord avec le théorème de LARMOR. En effet, la composition du mouvement de rotation donne : $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_{Larmor}$ (polarisation gauche), avec : $\vec{\omega}_{Larmor} = \frac{e\vec{B}}{2m_e} = \vec{\Omega}$

4.2.5.5

Le mouvement circulaire droite (ω_-) peut s'écrire :

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_- t + \varphi) \\ y(t) = -A \sin(\omega_- t + \varphi) \end{cases}$$

soit :

$$\dot{y}(t) = -\omega_- x(t)$$

en remplaçant dans les équations du mouvement (2.3.3), on obtient :

$$-\omega_-^2 x(t) = -\frac{qB}{m_e} \omega_- x(t) - \omega_0^2 x(t)$$

soit :

$$\omega_-^2 - \frac{qB}{m_e} \omega_- - \omega_0^2 = 0$$

La résolution de cette équation donne :

$$\omega_- = \omega_0 - \frac{eB}{2m_e}$$

d'où :

$$\Delta\nu_- = \frac{\omega_0 - \omega_-}{2\pi} = \frac{eB}{4\pi m_e}$$

On constate que :

$$\Delta\nu_- = \Delta\nu_+$$

Commentaire : Ce résultat est en accord avec le théorème de Larmor. En effet, la composition du mouvement de rotation donne : $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 - \vec{\omega}_{Larmor}$ (polarisation droite), avec : $\vec{\omega}_{Larmor} = \frac{e\vec{B}}{2m_e} = \vec{\Omega}$

4.2.6 Conséquence sur les raies d'émission de l'atome

4.2.6.1 Mouvement selon Oz en l'absence du champ magnétostatique \vec{B}

4.2.6.1.1 Expression de $\vec{\mathcal{E}}$:

En remplaçant \vec{B} par son expression, il vient :

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{c_0^2 \omega}{\omega c_0} \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|} \wedge \left(\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi R^2 c_0} \right) \left(\vec{R} \wedge \vec{p}(t - \frac{R}{c_0}) \right)$$

soit :

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi R^3} \vec{R} \wedge \left(\vec{R} \wedge \vec{p}(t - \frac{R}{c_0}) \right)$$

et puisque : $\vec{R} = R\vec{e}_r$ et $\vec{p} = p\vec{e}_z$, on obtient :

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi R^3} R^2 p \left(t - \frac{R}{c_0} \right) \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_r \wedge \vec{e}_z)$$

soit :

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi R} p \sin(\theta) \vec{e}_\theta$$

4.2.6.1.2 :

$\vec{\mathcal{E}}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi R} (\vec{p} \cdot \vec{e}_\theta) \vec{e}_\theta$$

d'où :

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi R} (\vec{p} \cdot \vec{e}_\theta)$$

C'est une polarisation rectiligne selon \vec{e}_θ

4.2.6.1.3 :

Dans la direction de l'axe Oz , on a :

$$\vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_z = 0$$

puisque : $\vec{p} = p\vec{e}_z$

$$\vec{\mathcal{B}} = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi R c_0} p \sin(\theta) \vec{e}_\varphi$$

Dans la direction perpendiculaire à l'axe Oz ($\theta = \frac{\pi}{2}$), on a :

$$\vec{\mathcal{B}} = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi R c_0} p \vec{e}_\varphi$$

4.2.6.2

D'après la question 2.4.1.1, on a :

$$\underline{\mathcal{E}} = -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi R} \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_r \wedge \underline{\vec{p}})$$

soit :

$$\underline{\mathcal{E}} = -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi R} ((\underline{\vec{p}} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \underline{\vec{p}})$$

Or :

$$\underline{\vec{p}} = (\underline{\vec{p}} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r + (\underline{\vec{p}} \cdot \vec{e}_\theta)\vec{e}_\theta + (\underline{\vec{p}} \cdot \vec{e}_\varphi)\vec{e}_\varphi$$

d'où :

$$\underline{\vec{E}} = -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi R} \underbrace{((\underline{\vec{p}} \cdot \vec{e}_\theta)\vec{e}_\theta + (\underline{\vec{p}} \cdot \vec{e}_\varphi)\vec{e}_\varphi)}_{=\vec{V}}$$

Le vecteur $\vec{V} \in \text{plan}(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, c'est un vecteur projection sur ce plan.

4.2.6.3 Application d'un champ magnétostatique \vec{B} uniforme

4.2.6.3.1 D'après 2.3.4, l'application du champ \vec{B} conduit à l'apparition de deux nouvelles fréquences ν_+ et ν_- . On on alors trois raies de fréquences :

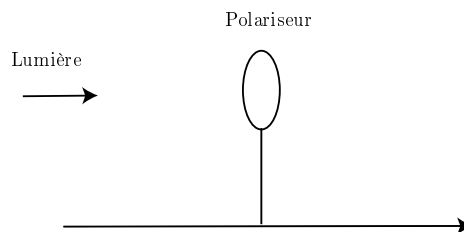
$$\begin{cases} \nu_+ = \nu_0 + \Delta\nu \\ \nu_0 \\ \nu_- = \nu_0 - \Delta\nu \end{cases}$$

4.2.6.3.2 :

Lorsqu'on observe dans la direction perpendiculaire à \vec{B} on voit trois polarisations rectilignes :

- un champ, polarisé rectilignement, parallèle à \vec{B} (ν_0);
- deux champs, polarisés rectilignement, perpendiculaires à la direction de \vec{B} (ν_+, ν_-).

Montage pratique pour vérifier l'état de polarisation des ces raies :



4.2.6.4 Observation dans la direction de \vec{B}

4.2.6.4.1 La lumière émise est constituée de deux raies de fréquences ν_+ et ν_- .

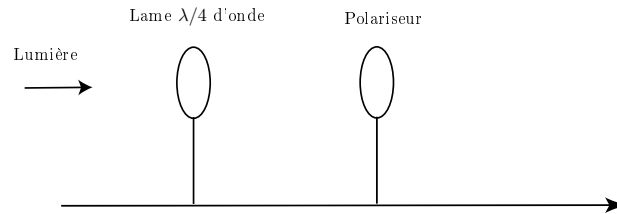
4.2.6.4.2 :

État de polarisation :

ν_+ : Polarisation circulaire gauche d'intensité $I_+ = 1$.

ν_- : Polarisation circulaire droite d'intensité $I_- = 1$.

4.2.6.4.3 Montage pratique pour vérifier l'état de polarisation des raies :



L'angle entre l'axe de la lame $\lambda/4$ et l'axe du polariseur est $\pi/4$. ($\lambda \sim \lambda_0$)

4.2.6.5

4.2.6.5.1 Calcul de $\Delta\lambda/\lambda_0$:

On a :

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda_+$$

soit :

$$\Delta\lambda = \frac{c_0}{\nu_0} - \frac{c_0}{\nu_+} = c_0 \frac{\Delta\nu_+}{\nu_0\nu_+}$$

d'où, puisque $\nu_+ \approx \nu_0$:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\nu_+}{\nu_+} \approx \frac{eB\lambda_0}{4\pi m_e c_0}$$

4.2.6.5.2 Valeur de e/m_e :

On a :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{4\pi c_0} \underbrace{\frac{e}{m_e}}_{\text{Pente}} B$$

soit :

$$\frac{e}{m_e} = \text{Pente} \times \frac{4\pi c_0}{\lambda_0}$$

d'après la courbe, on obtient :

$$\frac{e}{m_e} = \frac{18,8 - 11,2}{0,54 - 0,32} \cdot 10^{-6} \frac{4\pi c_0}{\lambda_0}$$

d'où :

$$\frac{e}{m_e} = 2 \cdot 10^{11} \text{C.kg}^{-1}$$

4.2.6.5.3 On peut utiliser un interféromètre de MICHELSON. On mesure la distance entre deux brouillages et on déduit $\Delta\lambda$.

Mais, $\Delta\lambda$ est très petit ($\sim 10^{-3}\text{nm}$) \Rightarrow il vaut mieux utiliser un interféromètre de FABRY PERROT.

Problème - 5

Mouvements d'un cerceau

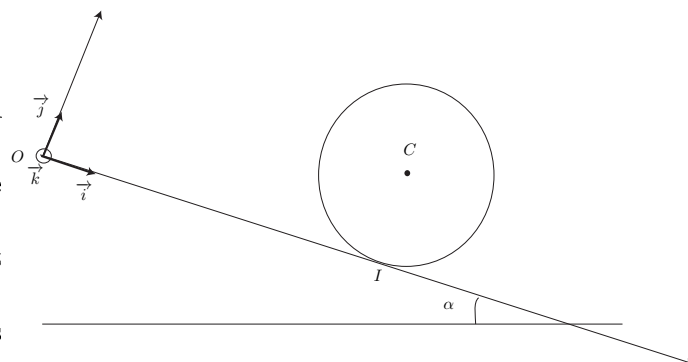
5.1 Énoncé (d'après CCP)

On se propose d'étudier quelques mouvements d'un cerceau de masse m , modélisé par un cercle de centre C et de rayon R . Ces mouvements auront lieu dans le plan vertical $(O; \vec{i}, \vec{j})$ le long d'un plan incliné de longueur suffisante, faisant l'angle α avec l'horizontale. Le contact en I du cerceau et du plan incliné est toujours supposé réalisé, et il est caractérisé par un coefficient de frottement de glissement f (terme positif et constant). On posera $\vec{OI} = x \vec{i}$. Dans tout le problème on raisonne dans le référentiel R_L . On note $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère lié à R_L supposé galiléen.

On désignera par :

- $\vec{v} = v \vec{i}$ le vecteur vitesse de C .
- $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ le vecteur vitesse de rotation du cerceau
- $\vec{V} = V \vec{i}$ le vecteur vitesse de glissement du cerceau par rapport au plan incliné.
- $\vec{F}_R = T \vec{i} + N \vec{j}$ la réaction du plan incliné sur le cerceau.
- $J = m R^2$ le moment d'inertie du cerceau par rapport à l'axe $(C; \vec{k})$.

À l'instant origine ($t = 0$), I se trouve en O et les conditions initiales imposées au cerceau sont $R\omega_0 > v_0 > 0$.



Données numériques : $m = 300$; $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ (accélération de la pesanteur); $f = 0,2$; $v_0 = 2 \text{ ms}^{-1}$; $R_0 = 7 \text{ ms}^{-1}$; $\sin(\alpha) = 0,1$.

Uniquement pour les applications numériques, on confondra $\cos(\alpha)$ et 1.

I. Préliminaires

1.— Vérifier que la vitesse de glissement V (vitesse du point I du cerceau) à un instant quelconque est égale à $(v + R\omega) \vec{i}$.

2.— Exprimer l'énergie cinétique E_k du cerceau à un instant quelconque en fonction de m , v et $R\omega$.

3.— Grâce au théorème du centre de masse et du théorème du moment cinétique et sans hypothèse particulière sur les mouvements du cerceau, trouver 3 relations scalaires liant \dot{v} et $R\dot{\omega}$ aux données.

4.– Écrire le théorème de l'énergie cinétique : en déduire une relation homogène à une puissance liant \dot{v} et $R\dot{\omega}$ aux données.

5.– L'équation obtenue au I.4 est-elle indépendante de celles obtenues au I.3 ?

6.– Calculer ω_0 sachant que $J = 75 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$.

II. Première phase

1.– Calculer $V(t = 0)$. En déduire précisément les caractéristiques du mouvement ultérieur du cerceau. Exprimer T .

2.– Trouver les lois d'évolution de v , $R\omega$ et V en fonction du temps. On pourra poser $a = (f \cos(\alpha) - \sin(\alpha))g$. Calculer numériquement a .

3.– En déduire que v s'annule pour un instant $t = t_1$ à déterminer. Que valent alors $R\omega$ et V ? (on les désignera respectivement par $R\omega_1$ et V_1)

4.– Exprimer la distance x_1 parcourue par C pendant cette première phase.

5.– *Application numérique* : calculer T_1 (T_1 désigne la réaction du plan incliné selon \vec{i} pour cette phase 1), t_1 , $R\omega_1$, V_1 et x_1 .

III. Deuxième phase

1.– Décrire le type de mouvement pour $t > t_1$.

2.– Quelles sont les lois d'évolution de v , $R\omega$, et V en fonction du temps au cours de cette deuxième phase ?

3.– Montrer que V va s'annuler pour un instant $t = t_2$ à déterminer. Que valent alors $R\omega$ et v ? (respectivement R_2 , et v_2).

4.– Préciser la position x_2 , de C à cet instant t_2 .

5.– *Application numérique* : calculer t_2 , R_2 , v_2 et x_2 .

IV. Troisième phase

On pourra prendre une nouvelle origine des temps au début de cette troisième phase ($t' = 0$).

1.– Décrire le type de mouvement ultérieur.

2.– Quelles sont les lois d'évolution de v , $R\omega$ et T en fonction de t' au cours de cette troisième phase ?

3.– Comment cette phase se termine-t-elle ? Préciser l'instant $t' = t'_1$. Que vaut alors $R\omega$ (désigné par $R\omega'_1$).

4.– Préciser la position x'_1 de C à cet instant t'_1 .

5.– Application numérique : calculer T , t'_1 et x'_1 .

V. Représentation graphique

Représenter sur un même graphique V et $R\omega$ en fonction du temps pour les trois phases précédentes. Donner simplement la nature du mouvement au delà de la troisième phase.

VI. Aspect énergétique

1.– Exprimer littéralement la variation d'énergie cinétique entre les instants $t' = 0$ et $t' = t'_1$. Faire l'application numérique. Que vaut, entre ces mêmes instants, le travail de la réaction \vec{F}_R ? Retrouver littéralement la variation d'énergie cinétique par application du théorème de l'énergie cinétique.

2.– Exprimer littéralement la variation d'énergie cinétique entre les instants $t = 0$ et $t = t_2$. Faire l'application numérique. Retrouver cette valeur en calculant numériquement les différents travaux mis en jeu.

5.2 Corrigé

1.1. La vitesse de glissement \vec{V} en I est égale à la vitesse du point I dans le référentiel lié au plan incliné qui est immobile :

$$\vec{V} = \vec{v}_c + \vec{IC} \wedge \omega \vec{k} = (v + R\omega) \vec{i}$$

1.2. Le théorème de KOENIG de l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_k = E_k^* + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

E_k^* est l'énergie cinétique du cerceau dans le référentiel barycentrique et $J = mR^2$.

soit :

$$E_k = \frac{1}{2}m(v^2 + R^2\omega^2)$$

1.3. Le théorème de la résultante cinétique dans \mathcal{R} :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{T}$$

En projection sur (Ox) :

$$m\dot{v} = mg \sin \alpha + T \quad (5.1)$$

En projection sur (Oy) :

$$N = mg \cos \alpha \quad (5.2)$$

Le théorème du moment cinétique en C en projection sur (Oz) s'écrit $mR^2\dot{\omega} = RT$, soit :

$$T = mR\dot{\omega} \quad (5.3)$$

1.4. Le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{T} \cdot \vec{V} + m \vec{g} \cdot \vec{v}$$

soit :

$$m(v\dot{v} + R^2\omega\dot{\omega}) = mgv \sin \alpha + TV = mgv \sin \alpha + mR\dot{\omega}(v + R\omega) \quad (5.4)$$

ou bien :

$$\dot{v} = g \sin \alpha + R\dot{\omega}$$

1.5. On a : (4) = (1)v + (3)R\omega donc, l'équation (4) n'est pas indépendante des équations (1) et (3).

1.6.

$$\omega_0 = \frac{R\omega_0}{R} = R\omega_0\sqrt{\frac{m}{J}} \simeq 14 \text{ rad.s}^{-1}$$

2. Première phase

2.1.

$$V(0) = v_0 + R\omega_0 = 9 \text{ m.s}^{-1}$$

puisque à $t = 0$, $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x = 2\vec{e}_x$ (m.s⁻¹) et $V(0) = 9 \text{ m.s}^{-1} \neq 0$, le mouvement ultérieur du cerceau est un mouvement **descendant** de roulement **avec glissement**.

\vec{T} étant colinéaire et opposé à $V(0) = 9 \text{ m.s}^{-1} > 0$, alors, d'après la loi du frottement de COULOMB :

$$T = -fN = -fmg \cos \alpha \quad (5.5)$$

2.2. En éliminant T entre (1) et (5), on obtient l'accélération de C :

$$\dot{v} = g \sin(\alpha) - fg \cos(\alpha) = -a$$

donc la vitesse de C :

$$v = -at + v_0 \quad (5.6)$$

En éliminant T entre (3) et (5), on obtient $R\dot{\omega} = -fg \cos(\alpha)$, soit après intégration :

$$R\omega = -fg \cos(\alpha)t + R\omega_0 \quad (5.7)$$

d'où :

$$V = v + R\omega = -(a + fg \cos(\alpha))t + R\omega_0 + v_0 \quad (5.8)$$

avec :

$$a = -g(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha))$$

Application numérique :

$$a = 1 \text{ m.s}^{-1}$$

2.3. v s'annule à l'instant t_1 tel que : $t_1 = \frac{v_0}{a}$

On a alors :

$$V_1 = R\omega_1 = -fg \cos(\alpha) t_1 + R\omega_0 = R\omega_0 - fg \cos(\alpha) \frac{v_0}{a}$$

2.4. En intégrant (6), on obtient la distance parcourue par le cerceau à l'instant t : On a :

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 - at \implies x_1 = v_0 t_1 - a \frac{t_1^2}{2}$$

2.5. Application numérique :

$$t_1 = 2 \text{ s} , \quad R\omega_1 = 3 \text{ m.s}^{-1} , \quad V_1 = 3 \text{ m.s}^{-1} , \quad x_1 = 2 \text{ m} \quad \text{et} \quad T_1 = -fmg \cos \alpha = -0,6 \text{ N}$$

3. Deuxième phase

3.1. Avant l'instant t_1 , le cerceau descend la pente et la vitesse de son centre d'inertie C s'annule pour $t = t_1$ avec une vitesse de glissement $V_1 = 3 \text{ m.s}^{-1} \neq 0$, donc, à partir de $t = t_1$, le cerceau remonte la pente avec glissement.

3.2. Les lois d'évolution de v , $R\omega$ et V sont les mêmes qu'en 2.2 car il y a toujours glissement. Donc :

$$v = v_0 - at ; \quad R\omega = R\omega_0 - fgt \cos \alpha ; \quad V = v_0 + R\omega_0 - (fg \cos \alpha + a)t \quad \text{et} \quad T = -fN = -fmg \cos \alpha$$

3.3. Le glissement cesse quand $V = 0$ soit à l'instant t_2 tel que :

$$t_2 = \frac{v_0 + R\omega_0}{fg \cos \alpha + a} \Rightarrow R\omega_2 = R\omega_0 - fgt_2 \cos \alpha \quad \text{et} \quad v_2 = v_0 - at_2$$

2.4. On a :

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 - at \Rightarrow x_2 = v_0 t_2 - a \frac{t_2^2}{2}$$

2.5. Application numérique :

$$t_2 = 3 \text{ s} , \quad R\omega_2 = 1 \text{ m.s}^{-1} , \quad v_2 = -1 \text{ m.s}^{-1} , \quad x_2 = 1,5 \text{ m}$$

4. Troisième phase

4.1. À $t = t_2$,

$$V = 0 \quad \text{et} \quad v = v_2 = -1 \text{ m.s}^{-1}$$

Le glissement a cessé à l'instant t_2 avec $v_2 < 0$. Le mouvement ultérieur sera donc un roulement ascendant sans glissement.

4.2. On a :

$$V = v + R\omega = 0 \Rightarrow v = -R\omega$$

En éliminant T/m entre (1) et (3), on obtient :

$$\dot{v} - R\dot{\omega} = g \sin(\alpha)$$

soit :

$$\dot{v} = \frac{g \sin(\alpha)}{2} \quad (\text{car } \dot{v} + R\dot{\omega} = 0)$$

Les lois horaires de v et $R\omega$ sont donc :

$$v = v_2 + \frac{g \sin \alpha}{2} t' = -R\omega$$

On en déduit :

$$T = mR\dot{\omega} = -\frac{mg \sin \alpha}{2}$$

4.3. La troisième phase se termine quand la vitesse de C s'annule, soit à l'instant t'_1 tel que :

$$v = v_2 + \frac{g \sin \alpha}{2} t' = 0 \Rightarrow t'_1 = -\frac{2v_2}{g \sin \alpha}$$

$R\omega$ s'annule aussi au même instant :

$$R\omega'_1 = 0$$

4.4. En intégrant la loi horaire de $v(t')$, on obtient la position de la roue à l'instant t' :

$$x'_1 = \frac{gt_1'^2 \sin \alpha}{4} + v_2 t'_1 + x_2$$

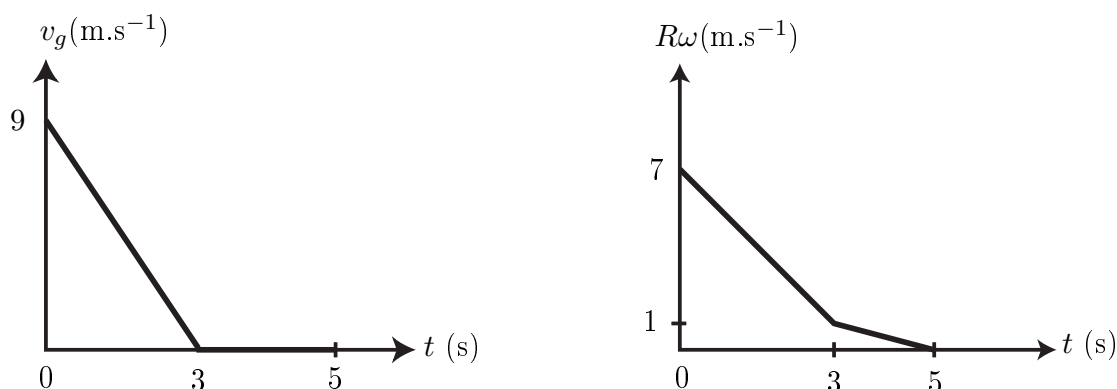
soit :

$$x'_1 = x_2 - \frac{v_2^2}{g \sin(\alpha)}$$

4.5. Application numérique :

$$T = -0,15 \text{ N} \quad , \quad t'_1 = 2 \text{ s} \quad \text{et} \quad x'_1 = 0,5 \text{ m}$$

5. Représentation graphique



Au delà de la 3ème phase, le cerceau aura un mouvement de roulement sans glissement descendant.

6.Aspect énergétique

6.1. La variation d'énergie cinétique entre les instants $t' = 0$ et $t' = t'_1$ est :

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= E_k(t' = t'_1) - E_k(t' = 0) \\ &= \frac{1}{2}m(v_1'^2 + R^2\omega_1'^2) - \frac{1}{2}m(v_2^2 + R^2\omega_2^2) \\ &= -\frac{1}{2}m(v_2^2 + R^2\omega_2^2) \\ &\simeq -0,3 \text{ J} \end{aligned}$$

Le travail des force appliquées sur le cerceau entre $t' = 0$ et $t' = t'_1$ est :

$$\begin{aligned} W &= mg(x'_1 - x_2) \sin \alpha + \int_{t'=0}^{t'_1} T v_g dt \\ &= mg(x'_1 - x_2) \sin \alpha \\ &\simeq -0,3 \text{ J} \end{aligned}$$

6.2. La variation d'énergie cinétique entre les instants $t = 0$ et $t = t_2$ est :

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= E_k(t = t_2) - E_k(t = 0) \\ &= \frac{1}{2}m(v_2^2 + R^2\omega_2^2) - \frac{1}{2}m(v_0^2 + R^2\omega_0^2) \\ &\simeq -7,65 \text{ J}\end{aligned}$$

Le travail des force appliquées sur le cerceau entre $t = 0$ et $t = t_2$ est :

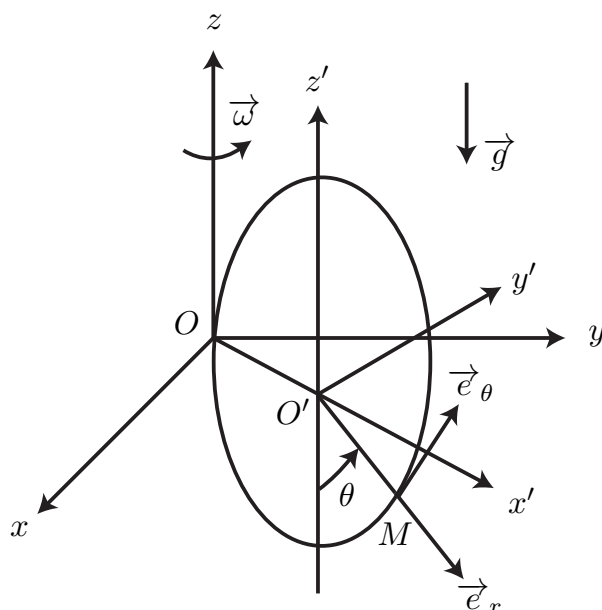
$$\begin{aligned}W &= mgx_2 \sin \alpha + \int_0^{t_2} T v_g dt \\ &= mgx_2 \sin \alpha - fmg \cos \alpha \left[(v_0 + R\omega_0)t_2 - (fg \cos \alpha + a)\frac{t_2^2}{2} \right] \\ &\simeq -7,65 \text{ J}\end{aligned}$$

Problème - 6

Composition de mouvement

6.1 Énoncé

Un cerceau (C) de centre O' et de rayon a , située dans le plan vertical, tourne autour d'une de ses tangentes verticales Oz , d'un mouvement de rotation uniforme de vecteur rotation $\vec{\omega}$.



Un anneau M de masse m , assimilé à un point matériel, est mobile sans frottement sur cette circonférence. On désigne par θ l'angle que fait $\overrightarrow{O'M}$ avec la verticale descendante passant par O' . θ est compté positivement dans le sens indiqué sur le schéma.

1. Étude du mouvement de M sur (C) par plusieurs méthodes

1.1. Utilisation du théorème de la résultante cinétique

1.1.1. Écrire le théorème de la résultante cinétique dans le référentiel $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$ lié au cercle et en rotation dans le repère galiléen $\mathcal{R}(O, x, y, z)$. On notera \vec{F}_{ie} et \vec{F}_{ic} les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS et \vec{R} la réaction de (C) sur M .

1.1.2.

a. Montrer que \vec{F}_{ic} est colinéaire à $\vec{e}_{x'}$, et exprimer sa norme en fonction de θ , m , a et ω .

b. Montrer que \vec{F}_{ic} est colinéaire à $\vec{e}_{y'}$, et exprimer sa norme en fonction de θ , m , $v = \|\vec{v}(M/\mathcal{R}')\|$ et ω .

1.1.3. Projeter le théorème de la résultante cinétique sur \vec{e}_θ et en déduire l'équation différentielle vérifiée par θ . Montrer que l'équation obtenue peut se mettre sous la forme :

$$a \frac{d^2\theta}{dt^2} = f(\theta) \quad \text{où } f(\theta) \text{ une fonction à déterminer}$$

1.2. Utilisation du théorème du moment cinétique

1.2.1. Calculer le moment cinétique en O' du point M dans son mouvement dans \mathcal{R}' et montrer qu'il est colinéaire à $\vec{e}_{y'}$.

1.2.2. En appliquant le théorème du moment cinétique en O' du point M dans \mathcal{R}' , retrouver l'équation différentielle du mouvement.

1.3. Utilisation du théorème de l'énergie cinétique

1.3.1. Calculer l'énergie potentielle U_1 dont dérive la force d'inertie d'entraînement en fonction de θ . On prendra $U_1(\theta = 0) = 0$.

1.3.2. Calculer l'énergie potentielle U_2 dont dérive le poids de M en fonction de θ . On prendra $U_2(\theta = 0) = 0$.

1.3.3. Écrire, en la justifiant, la conservation de l'énergie mécanique du point M et retrouver l'équation différentielle du mouvement.

2. Étude de l'équilibre relatif de M sur (C)

2.1. Montrer que l'équation en θ , dont les solutions donnent les positions d'équilibre relatif de M sur (C), est :

$$a\omega^2(1 + \sin\theta) = g \tan\theta$$

2.2. En examinant les directions et les sens des trois forces mises en jeu dans cet équilibre, déterminer quels sont les intervalles possibles pour θ correspondant aux positions d'équilibre parmi les quatre suivants :

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] ; \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] ; \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

2.3. Retrouver, graphiquement, le résultat de la question 2.2..

2.4. On désire que l'équilibre corresponde à $\theta = \theta_0 = 30^\circ$.

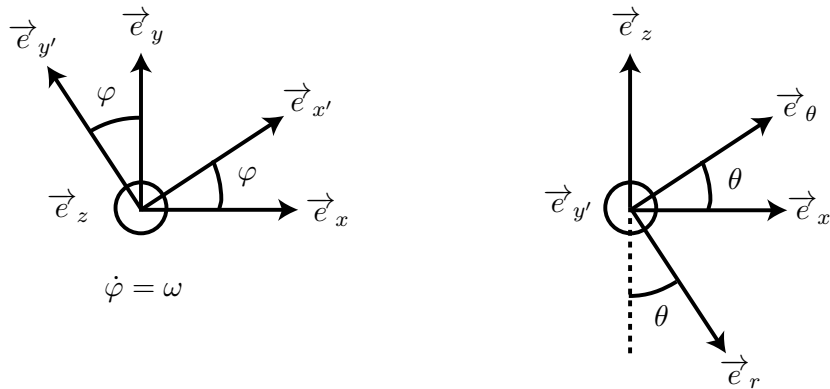
2.4.1. Quelle doit être la valeur de la vitesse angulaire ω sachant que $a = 0,2$ m et $g = 10$ m.s⁻² ?

2.4.2. Étudier la stabilité de la position d'équilibre $\theta_0 = 30^\circ$.

6.2 Corrigé

1. Étude du mouvement de M sur (C) par plusieurs méthodes

1.1.



1.1.1. Théorème de de la résultante cinétique :

$$m \vec{a}' = m \vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

1.1.2.

a. La force d'inertie d'entraînement est :

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e = -m \left[\vec{a}_{O'/R} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'M}) \right]$$

avec :

$$\vec{OO'} = a \vec{e}_{x'} \quad \text{et} \quad \vec{\omega} = \omega \vec{e}_z = c\dot{t}\vec{e} \implies \vec{a}_{O'/R} = -a\omega^2 \vec{e}_{x'} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$$

et :

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'M}) = \omega \vec{e}_z \wedge (\omega \vec{e}_z \wedge a \vec{e}_r) = -a\omega^2 \sin \theta \vec{e}_{x'}$$

donc :

$$\vec{F}_{ie} = ma\omega^2(1 + \sin \theta) \vec{e}_{x'}$$

elle est colinéaire à \vec{e}_x .

Sa norme est :

$$|\vec{F}_{ie}| = ma\omega^2(1 + \sin \theta)$$

b. La force d'inertie de CORIOLIS est :

$$\vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_c = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/R'}$$

avec :

$$\vec{v}_{M/R'} = \frac{d\vec{O'M}}{dt} \Big|_{R'} = a\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

d'où :

$$\vec{F}_{ic} = -2ma\omega\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_{y'}$$

Sa norme est :

$$|\vec{F}_{ic}| = 2ma|\omega\dot{\theta} \cos \theta| = 2mv|\omega| |\cos \theta|$$

1.1.3. On a :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta \implies \vec{a}' = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt}_{/\mathcal{R}'} = a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - a\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

Le théorème de la résultante cinétique de M dans \mathcal{R}' s'écrit donc :

$$m(a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - a\dot{\theta}^2\vec{e}_r) = -mg\vec{e}_z + R_r\vec{e}_r + R_y\vec{e}_{y'} + ma\omega^2(1 + \sin \theta)\vec{e}_{x'} - 2ma\omega\dot{\theta} \cos \theta\vec{e}_{y'}$$

Sa projection sur \vec{e}_θ donne :

$$a\ddot{\theta} = f(\theta) = -g \sin \theta + a\omega^2(1 + \sin \theta) \cos \theta$$

1.2.

1.2.1. Le moment cinétique en O' du point M dans \mathcal{R}' est :

$$\vec{\sigma}_{O'}(M)_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = -ma^2\dot{\theta}\vec{e}_{y'}$$

1.2.2. Le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O'}(M)_{\mathcal{R}'}}{dt} = \overrightarrow{O'M} \wedge (m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic})$$

Projection sur $\vec{e}_{y'}$:

$$a\ddot{\theta} = f(\theta) = -g \sin \theta + a\omega^2(1 + \sin \theta) \cos \theta$$

1.3.

1.3.1. L'énergie potentielle U_1 :

$$\begin{aligned} dU_1 &= -\delta W(\vec{F}_{ie}) = -\vec{F}_{ie} \cdot d\vec{M}_{/\mathcal{R}'} \\ &= -ma\omega^2(1 + \sin \theta)\vec{e}_{x'} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} dt \\ &= -ma\omega^2(1 + \sin \theta)\vec{e}_{x'} \cdot a d\theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

d'où :

$$U_1(\theta) = -ma^2\omega^2 \int_0^\theta (1 + \sin \theta) \cos \theta d\theta + U_1(\theta = 0) \implies U_1 = -ma^2\omega^2 \left(\sin \theta + \frac{\sin^2 \theta}{2} \right)$$

1.3.2. L'énergie potentielle U_2 :

$$dU_2 = mg\vec{e}_z \cdot a d\theta \vec{e}_\theta = mga \sin \theta d\theta$$

d'où :

$$U_2 = mga(1 - \cos \theta)$$

1.3.3.

Pas de frottement $\implies dW(\vec{R}) = 0$.

$$dW(\vec{F}_{ic}) = -2m(\omega \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}) \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = 0.$$

le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$dE_c = dW(m\vec{g}) + dW(\vec{F}_{ie}) \Rightarrow d(E_c + U_1 + U_2) = dE_m = 0 \Rightarrow E_m = \text{cte}$$

Il y a donc conservation de l'énergie mécanique du point M dans \mathcal{R}' :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2(M) + U_1 + U_2 \\ &= \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - ma^2\omega^2 \left(\sin\theta + \frac{\sin^2\theta}{2} \right) + mga(1 - \cos\theta) = \text{cte} \end{aligned}$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on retrouve l'équation différentielle du mouvement :

$$a\ddot{\theta} = f(\theta) = -g\sin\theta + a\omega^2(1 + \sin\theta)\cos\theta$$

2. Étude de l'équilibre relatif de M sur (C)

2.1. Les positions d'équilibre relatif dans \mathcal{R}' correspondent à :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

L'équation différentielle du mouvement devient :

$$g \tan\theta = a\omega^2(1 + \sin\theta)$$

2.2. Lorsque M est en équilibre sur (C) (c'est à dire dans \mathcal{R}'), la force d'inertie de CORIOLIS s'annule et ne reste plus que trois forces appliquées sur M : $m\vec{g}$, \vec{F}_{ie} et \vec{R} avec :

$$m\vec{g} + \vec{F}_{ie} + \vec{R} = \vec{0}$$

Lorsqu'il y a équilibre relatif, il n'y a pas de mouvement selon la direction \vec{e}_θ donc :

$$m\vec{g} \cdot \vec{e}_\theta + \vec{F}_{ie} \cdot \vec{e}_\theta + \vec{R} \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

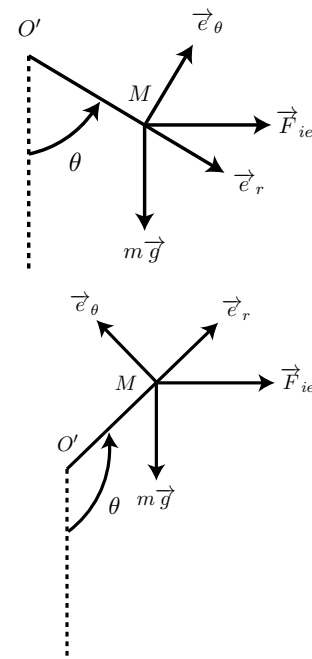
et puisque $\vec{R} \cdot \vec{e}_\theta$, il vient :

$$m\vec{g} \cdot \vec{e}_\theta = -\vec{F}_{ie} \cdot \vec{e}_\theta$$

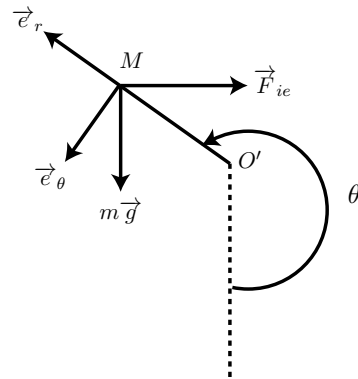
donc l'équilibre relatif peut avoir lieu si les deux forces $m\vec{g}$ et \vec{F}_{ie} ont des composantes de signes opposées selon la direction \vec{e}_θ .

• $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$: Équilibre relatif possible.

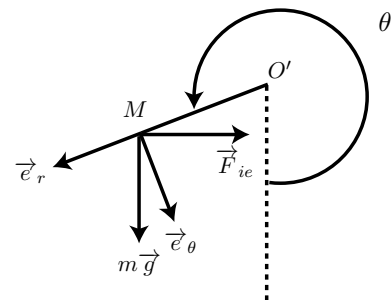
• $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$: Impossible d'avoir un équilibre relatif.



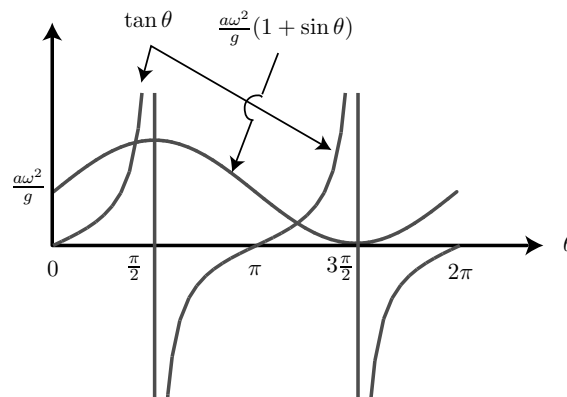
- $\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$: Équilibre relatif possible.



- $\theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$: Équilibre relatif non possible.



2.3. Traçons sur un même graphe $\tan \theta$ et $\frac{a\omega^2}{g}(1 + \sin \theta)$ en fonction de θ et cherchons leurs intersections :



On remarque que les deux courbes se coupent bien dans les intervalles $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ dans lesquelles il y a donc possibilité d’avoir équilibre relatif de M sur (C) .

2.4.

2.4.1. On a :

$$a\omega^2(1 + \sin \theta_0) = g \tan \theta_0 \implies \omega = \sqrt{\frac{g \tan \theta_0}{a(1 + \sin \theta_0)}} \simeq 4,4 \text{ rad.s}^{-1}$$

2.4.2. Remplaçons θ par $\theta_0 + \varepsilon$ dans l’équation différentielle :

$$a\ddot{\theta} = -g \sin \theta + a\omega^2(1 + \sin \theta) \cos \theta$$

d'où :

$$a\ddot{\varepsilon} = -g \sin(\theta_0 + \varepsilon) + a\omega^2(1 + \sin(\theta_0 + \varepsilon)) \cos(\theta_0 + \varepsilon)$$

or :

$$\sin \varepsilon \simeq \varepsilon \quad \text{et} \quad \cos \varepsilon \simeq 1$$

donc :

$$a\ddot{\varepsilon} = -g(\sin \theta_0 + \varepsilon \cos \theta_0) + a\omega^2(1 + \sin \theta_0 + \varepsilon \cos \theta_0)(\cos \theta_0 - \varepsilon \sin \theta_0)$$

Linéarisons cette équation en ne gardant que les terme d'ordres inférieurs ou égales à 1 en ε :

$$a\ddot{\varepsilon} = -g(\sin \theta_0 + \varepsilon \cos \theta_0) + a\omega^2(1 + \sin \theta_0 + \varepsilon \cos \theta_0) \cos \theta_0 - a\omega^2\varepsilon(1 + \sin \theta_0) \sin \theta_0$$

Puisque θ_0 est une position d'équilibre, alors :

$$-g \sin \theta_0 + a\omega^2(1 + \sin \theta_0) \cos \theta_0 = 0$$

donc :

$$a\ddot{\varepsilon} + [g \cos \theta_0 - a\omega^2 \cos^2 \theta_0 + a\omega^2(1 + \sin \theta_0) \sin \theta_0]\varepsilon = 0$$

d'où (puisque $a = 0,2 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, $\theta_0 = 30^\circ$ et $\omega \simeq 4,4 \text{ rad.s}^{-2}$) :

$$\ddot{\varepsilon} + 43,3\varepsilon = 0$$

Par conséquent, le mouvement de M est un mouvement sinusoïdal autour de la position d'équilibre $\theta = \theta_0 = 30^\circ$. Il s'agit donc d'une position d'équilibre stable.

Problème - 7

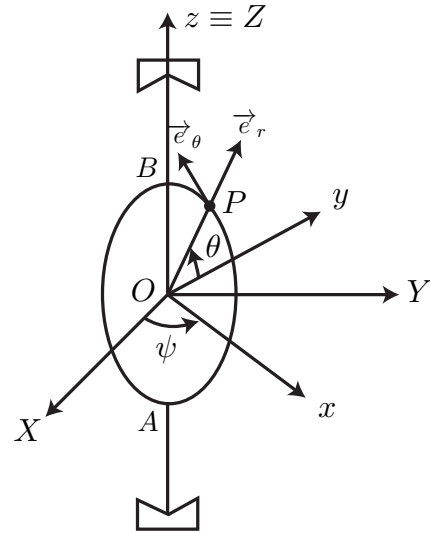
Mouvement d'un cerceau lesté

7.1 Énoncé (d'après CCP)

1. Un système matériel (Σ) est constitué d'un cerceau (C) homogène de masse m , de rayon b , de centre O , de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mb^2$ par rapport à un diamètre, sur lequel se déplace sans frottement un anneau assimilable à un point matériel P de même masse m .

Le système matériel (Σ) peut tourner autour du diamètre vertical AB de (C) qui reste fixe dans le référentiel galiléen $R_0(O, X, Y, Z)$, grâce à des liaisons parfaites en A et B entre (C) et le bâti fixe (b) lié à \mathcal{R}_0 .

On associe au cerceau le référentiel $R(O, x, y, z)$; l'axe Ox étant perpendiculaire au plan du cerceau. On pose $\psi = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Ox})$.



La position de P dans le plan du cerceau, est déterminée par $\theta = (\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{e_r})$.

On désignera par $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur.

1.

1.1. Exprimer la vitesse de P dans R ainsi que la vitesse d'entraînement de P par rapport à R_0 ; on écrira ces expressions dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. En déduire le moment cinétique de P en O dans R_0 .

1.2. Calculer le moment cinétique de (C) en O dans R_0 .

1.3. En déduire le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ de (Σ) en O dans R_0 , dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

2. Appliquer le théorème du moment cinétique à (Σ) . En déduire que la composante de $\vec{\sigma}_O$ sur l'axe Oz se conserve; écrire une première relation entre les seules paramètres θ et $\dot{\psi}$ ($\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$).

3. Montrer que l'on peut obtenir directement une autre équation du mouvement en appliquant le théorème de la résultante cinétique à la particule P dans R_0 . Donner l'expression de cette relation liant b , g , θ et les

dérivées par rapport au temps de θ et ψ .

4.

4.1. Calculer l'énergie cinétique E_c du système (Σ) dans R_0 .

4.2. Calculer l'énergie potentielle de pesanteur E_p du système (Σ) dans R_0 (on prendra l'origine des énergies potentielles en $z = 0$).

4.3. Justifier l'existence d'une intégrale première de l'énergie; en déduire une relation liant b , g , θ et les dérivées par rapport au temps de θ et ψ .

4.4. Les équations obtenues en 2., 3. et 4.3. sont-elles indépendantes? Justifier votre réponse.

5. On suppose maintenant, et pour toute la suite du problème, qu'un moteur, monté entre (C) et le bâti (b) impose au cerceau (C) une rotation autour de AB à vitesse uniforme : $\omega \vec{e}_z$.

5.1. Déterminer le couple $\vec{\Gamma}$ ($\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_z$) exercé par le moteur d'entraînement sur (C) à l'aide du principe fondamental de la dynamique.

5.2. Montrer que l'on retrouve l'expression de $\vec{\Gamma}$ en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

6. Calculer la réaction \vec{R} de (C) sur (P) dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Que retrouve-t-on?

7.

7.1. Déterminer les positions d'équilibre relatif de P par rapport à (C) .

7.2. Étudier la stabilité de ces positions d'équilibre. Déterminer la période des petits mouvements autour de ses positions d'équilibre dans le cas $\omega^2 < \frac{g}{a}$.

7.2 Corrigé

1.

1.1. Calcul du moment cinétique :

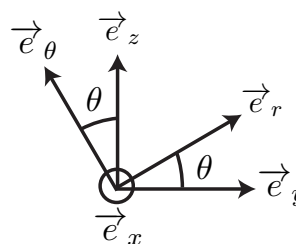
On a :

$$\vec{v}_{P/\mathcal{R}} = b\dot{\theta} \vec{e}_\theta = b\dot{\theta}(-\sin \theta \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z)$$

$$\vec{v}_e = \dot{\psi} \vec{e}_z \wedge b \vec{e}_r = -\dot{\psi} b \cos \theta \vec{e}_x$$

Le moment cinétique de P en O dans \mathcal{R}_0 est :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O(P) &= \vec{OP} \wedge m \vec{v}_{P/\mathcal{R}_0} \\ &= b \vec{e}_r \wedge m (\vec{v}_{P/\mathcal{R}} + \vec{v}_e) \\ &= mb^2 (\dot{\theta} \vec{e}_x - \dot{\psi} \cos \theta \sin \theta \vec{e}_y + \dot{\psi} \cos^2 \theta \vec{e}_z) \end{aligned}$$



1.2. Le moment cinétique en O de (C) est :

$$\vec{\sigma}_O(C) = J\dot{\psi}\vec{e}_z = \frac{mb^2}{2}\dot{\psi}\vec{e}_z$$

1.3. Le moment cinétique en O du système :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O &= \vec{\sigma}_O(P) + \vec{\sigma}_O(C) \\ &= mb^2 \left(\dot{\theta}\vec{e}_x - \dot{\psi}\cos\theta\sin\theta\vec{e}_y + \left[\frac{1}{2} + \cos^2\theta \right] \dot{\psi}\vec{e}_z \right)\end{aligned}$$

2. Appliquons le théorème du moment cinétique à (Σ) :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_O(2m\vec{g}) + \vec{M}_{O,\text{contact}} = \vec{OP} \wedge (-mg\vec{e}_z) + \vec{M}_{O,\text{contact}}$$

or la liaison entre (C) et le bâti étant parfaite :

$$\vec{M}_{O,\text{contact}} \cdot \vec{e}_z = 0$$

d'où :

$$\frac{d(\vec{\sigma}_O \cdot \vec{e}_z)}{dt} = 0 \implies \vec{\sigma}_O \cdot \vec{e}_z = \text{cste}$$

donc :

$$\left(\frac{1}{2} + \cos^2\theta \right) \dot{\psi} = \text{cste}$$

3. En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la particule P dans R_g :

$$m\vec{a}_{P/R_0} = m\vec{g} + \vec{R}$$

or

$$\vec{a}_{P/R_0} = \vec{a}_{P/R} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

avec :

$$\begin{aligned}\vec{a}_{P/R} &= b\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \\ &= b\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - b\dot{\theta}^2\vec{e}_r\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\vec{a}_e &= \dot{\psi}\vec{e}_z \wedge b\vec{e}_r + \dot{\psi}\vec{e}_z \wedge (\dot{\psi}\vec{e}_z \wedge b\vec{e}_r) \\ &= -b\cos\theta\dot{\psi}\vec{e}_x - b\dot{\psi}^2\cos\theta\vec{e}_y\end{aligned}$$

et aussi :

$$\begin{aligned}\vec{a}_c &= 2\dot{\psi}\vec{e}_z \wedge b\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ &= 2b\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\vec{e}_x\end{aligned}$$

d'où :

$$m(b\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - b\dot{\theta}^2\vec{e}_r - b\cos\theta\ddot{\psi}\vec{e}_x - b\dot{\psi}^2\dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_y) + 2mb\dot{\psi}\sin\theta\vec{e}_x = m\vec{g} + \vec{R}$$

d'autre part, P se déplaçant sans frottement sur le cerceau, alors :

$$\vec{R} \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

d'où la projection du théorème de la résultante cinétique de P sur \vec{e}_θ :

$$b\ddot{\theta} + b\dot{\psi}^2 \cos\theta \sin\theta + g \cos\theta = 0$$

4.

4.1.

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}m\vec{v}_{P/\mathcal{R}_0}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\psi}^2 \\ &= \frac{mb^2}{2} \left[\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \left(\cos^2\theta + \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

4.2.

$$E_p = mgb \sin\theta$$

4.3. La liaison entre (C) et le bâti étant parfaite et l'absence de frottement entre P et (C) impliquent :

$$\mathcal{P}_{\text{contact avec } O_z} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{\text{int}}(\vec{R}, -\vec{R}) = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned} E_m = E_c + E_p &= \text{cte} \\ \frac{b^2}{2} \left[\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \left(\cos^2\theta + \frac{1}{2} \right) \right] + gb \sin\theta &= \text{cte}' \end{aligned}$$

4.4. Les équations obtenues en 2, 3 et 4.3 ne sont pas indépendantes. On retrouve par exemple l'équation de la question 3 en combinant celles des questions 2 et 4.3. Les inconnues sont au nombre de deux : θ et ψ . Deux équations différentielles suffisent à les définir.

5.

5.1.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} &= \vec{OP} \wedge m\vec{g} + \Gamma\vec{e}_z + \vec{M}_{0,\text{contact}} \\ \frac{\sigma_{Oz}}{dt} &= \Gamma \end{aligned}$$

or :

$$\sigma_{Oz} = \left(\frac{1}{2} + \cos^2\theta \right) \dot{\psi} \quad \text{et} \quad \omega = \dot{\psi} = \text{cte} \implies \ddot{\psi} = 0$$

donc :

$$\Gamma = -2mb^2\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\sin\theta$$

5.2.

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(m\vec{g}) + \Gamma \cdot \dot{\psi}$$

or :

$$E_c = \frac{mb^2}{2} \left[\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{2} \right) \right] \quad \text{et} \quad \omega = \dot{\psi} = \text{cte} \implies \ddot{\psi} = 0$$

d'où :

$$mb\dot{\theta}(b\ddot{\theta} - b\dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta + g \cos \theta) = \Gamma \dot{\psi}$$

on a déjà trouvé que :

$$b\ddot{\theta} + g \cos \theta = -b\dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta$$

On retrouve donc :

$$\Gamma = -2mb^2\dot{\theta}\dot{\psi} \cos \theta \sin \theta$$

6.

$$\begin{aligned} m\vec{a}_{P/\mathcal{R}_0} &= m\vec{g} + \vec{R} \\ m(\vec{a}_{P/\mathcal{R}} + \vec{a}_e + \vec{a}_c) &= m\vec{g} + \vec{R} \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{R} = 2mb\dot{\theta}\dot{\psi} \sin \theta \vec{e}_x + (-mb\dot{\theta}^2 - mb\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + mg \sin \theta) \vec{e}_r + m(b\ddot{\theta} + b\dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta + g \cos \theta) \vec{e}_\theta$$

or :

$$b\ddot{\theta} + b\dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta + g \cos \theta = 0$$

On retrouve donc que :

$$\vec{R} \perp \vec{e}_\theta \quad \text{ce qui traduit qu'il n'y a pas frottement entre } (C) \text{ et } P$$

7.

7.1. Positions d'équilibre relatif de P par rapport à (C) implique :

$$\vec{v}_{P/\mathcal{R}} = b\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{P/\mathcal{R}} = b\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - b\dot{\theta}^2\vec{e}_r = \vec{0} \implies \ddot{\theta} = 0$$

d'où, d'après (2) :

$$\cos \theta (g + b\omega^2 \sin \theta) = 0$$

donc les positions d'équilibre relatif correspondent à :

$$\theta_{e1} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{e2} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta_{e3} = -\frac{g}{b\omega^2} > -1 \implies \omega^2 > \frac{g}{b}$$

7.2. Pour étudier la stabilité de ces positions d'équilibre, on posera $\theta = \theta_e + \varepsilon$ et on utilisera l'équation (2) :

$$b\ddot{\theta} + b\omega^2 \cos \theta \sin \theta + g \cos \theta = 0$$

$\theta_e = \theta_{e1} = \frac{\pi}{2}$:

$$\ddot{\varepsilon} - \left(\omega^2 + \frac{g}{b} \right) \varepsilon = 0$$

Cette position d'équilibre est donc instable.

$\theta_e = \theta_{e2} = -\frac{\pi}{2}$:

$$\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{g}{b} - \omega^2 \right) \varepsilon = 0$$

Cette position d'équilibre est donc instable si $\frac{g}{b} < \omega^2$ et elle est stable si $\frac{g}{b} > \omega^2$.

$\theta_e = \theta_{e3}$ tel que $\sin \theta_{e3} = -\frac{g}{b\omega^2} > -1$ et $\omega^2 > \frac{g}{b}$:

$$\ddot{\varepsilon} + \omega^2 \cos^2 \theta_{e3} \varepsilon = 0$$

Cette position d'équilibre est donc stable.

Si $\omega^2 < \frac{g}{b}$, la position d'équilibre stable correspond à $\theta_e = -\frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{g}{b} - \omega^2\right) \varepsilon = 0$$

La période est donc :

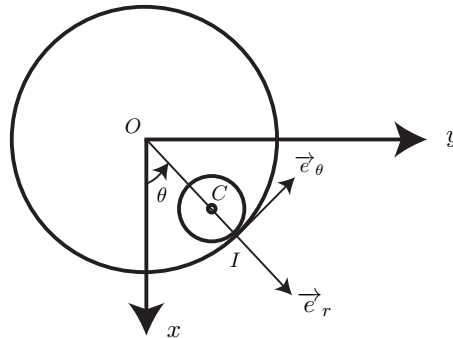
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{b} - \omega^2}}$$

Problème - 8

Oscillation d'un cylindre dans une gouttière

8.1 Énoncé

Une gouttière cylindrique (A), dont la masse M est répartie uniformément en surface, de centre O , de rayon a , de moment d'inertie $I = Ma^2$ par rapport à son axe, peut tourner sans frottement autour de son axe. Un cylindre (B), dont la masse m est répartie uniformément en volume, de centre C , de rayon b ($b < a$), de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mb^2$ par rapport à son axe, roule sans glisser à l'intérieur de la gouttière (A).



Le référentiel \mathcal{R} est repéré par le trièdre (O, x, y, z) ; l'axe Oz horizontal, coïncide avec l'axe de (A) et est colinéaire à celui de (B); l'axe (Ox) est vertical et orienté vers le bas. La position du centre d'inertie C de (B) est définie par l'angle $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OC})$.

Les vecteurs vitesses angulaires respectives de (A) et (B) dans \mathcal{R} sont notées $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ et $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$.

La réaction de (A) sur (B), en I est :

$$\vec{R} = T \vec{e}_\theta - N \vec{e}_r$$

À l'instant initial ($t=0$), la gouttière (A) et le cylindre (B) sont immobiles et $\theta = \theta_0$ ($0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$).

Toute l'étude sera faite dans le référentiel \mathcal{R} supposé galiléen.

1. En utilisant la condition de roulement sans glissement de (B) sur (A), établir une relation entre $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, a , b et les vitesses angulaires ω et Ω .

2.

- 2.1.** Écrire le théorème de la résultante cinétique de (B) . En déduire l'expression de T et N .
- 2.2.** Écrire le théorème du moment cinétique de (B) en C , en projection sur Oz .
- 2.3.** En appliquant le théorème du moment cinétique à (A) , en O , donner la relation entre T , $\dot{\Omega}$, M et a .
- 2.4.** Montrer, en utilisant ce qui précède que, l'équation différentielle vérifiée par θ , s'écrit :

$$(3M + m)(a - b)\ddot{\theta} + (2M + m)g \sin \theta = 0$$

- 2.5.** En déduire $\dot{\theta}^2$ en fonction de M , m , g , a , b , θ et θ_0 . Montrer alors que $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$.
- 2.6.** Donner les expressions de T et N en fonction de M , m , g , θ et éventuellement θ_0 .
- 2.7.** Pour quelle valeur de θ , T est maximum ? Donner l'expression de T_{max} .

Et pour quelle valeur de θ , N est minimum ? Donner l'expression de N_{min} .

Montrer alors, pour qu'il y ait toujours roulement sans glissement de (B) sur (A) , il faut que le coefficient de glissement f entre les 2 solides, soit supérieur à une valeur limite fonction de θ_0 que l'on précisera. Faire l'application numérique pour $M = m$ et $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

- 2.8.** En supposant θ_0 suffisamment faible pour que l'on puisse assimiler $\sin \theta$ à θ , calculer la période T_0 des petites oscillations du système.

Faire l'application numérique pour $M = m$, $a = 3b = 0,5$ m et $g = 10\text{m.s}^{-2}$.

- 2.9.** Calculer l'énergie cinétique du système $(\Sigma) = \{(A) + (B)\}$.
- 2.10.** Calculer l'énergie potentielle de pesanteur E_p du système (Σ) (on prendra l'origine des énergies potentielles en $x = 0$).
- 2.11.** Justifier qu'il y a conservation de l'énergie mécanique du système (Σ) et en déduire une intégrale première du mouvement.
- 2.12** La gouttière (A) est soumis à un couple moteur constant dont le moment par rapport à l'axe Oz est $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_z$ ($\Gamma > 0$).
- a) Écrire le théorème du moment cinétique de la gouttière (A) en O .
- b) Toujours dans l'hypothèse du roulement sans glissement de (B) sur (A) , établir l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait θ .
- c) En déduire que le centre d'inertie C de (B) possède une position d'équilibre θ_e , si Γ vérifie une inégalité à préciser.
- d) Cette position d'équilibre est-elle stable ? Si oui, quelle est la période des oscillations autour de cette position d'équilibre ?

8.2 Corrigé

1. La vitesse de glissement en I nulle (roulement sans glissement) :

$$\begin{aligned}\vec{v}_g &= \vec{v}_{I \in (B)/\mathcal{R}} - \vec{v}_{I \in (A)/\mathcal{R}} \\ &= \vec{v}(C) + \vec{IC} \wedge \vec{\omega} - \vec{v}(O) - \vec{IO} \wedge \vec{\Omega} \\ &= [(a-b)\dot{\theta} + b\omega - a\Omega] \vec{e}_\theta \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

D'où :

$$(a-b)\dot{\theta} + b\omega = a\Omega \quad (8.1)$$

2.

2.1. Théorème de la résultante cinétique appliquée à (B) :

$$\begin{aligned}m\vec{a}_C &= T\vec{e}_\theta - N\vec{e}_r + mg\vec{e}_x \\ m(a-b)[\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2\vec{e}_r] &= T\vec{e}_\theta - N\vec{e}_r + mg\vec{e}_x\end{aligned}$$

D'où :

$$T = m(a-b)\ddot{\theta} + mg \sin \theta \quad (8.2)$$

$$N = m(a-b)\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \quad (8.3)$$

2.2. Théorème du moment cinétique en C appliqué à (B) dans le référentiel barycentrique de (B) donne :

$$T = \frac{1}{2}mb\dot{\omega} \quad (8.4)$$

2.3. Théorème du moment cinétique en O appliqué à (A) :

$$T = -Ma\dot{\Omega} \quad (8.5)$$

2.4. En dérivant (1), et en utilisant (4), (5) puis (2), on montre que :

$$(3M+m)(a-b)\ddot{\theta} + (2M+m)g \sin \theta = 0 \quad (8.6)$$

2.5. On multiplie l'équation ci-dessus par $\dot{\theta}$ et on intègre le 1^{er} terme entre $\dot{\theta} = 0$ et $\dot{\theta}$ et le 2^{ème} terme entre θ_0 et θ :

$$(3M+m)(a-b)\frac{\dot{\theta}^2}{2} = (2M+m)g(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (8.7)$$

Comme $(a-b)\dot{\theta}^2 \geq 0 \implies \cos \theta \geq \cos \theta_0$ et $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$.

2.6. Les équations (2), (3), (6) et (7) donnent :

$$\begin{aligned}T &= \frac{M}{3M+m}mg \sin \theta \\ N &= \frac{mg}{3M+m}[(7M+3m) \cos \theta - 2(2M+m) \cos \theta_0]\end{aligned}$$

2.7. Comme $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$, T est maximal pour $\theta = \theta_0$:

$$T_{\max} = \frac{M}{3M + m} mg \sin \theta_0$$

De même N est minimal pour $\theta = \theta_0$:

$$N_{\min} = mg \cos \theta_0$$

On aura toujours roulement sans glissement si :

$$f > \frac{T_{\max}}{N_{\min}} = \frac{M}{3M + m} \tan \theta_0$$

Application numérique :

$$f > 0,25$$

2.8. L'équation différentielle vérifiée par θ devient, dans ce cas :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(2M + m)g}{(3M + m)(a - b)}}$$

Donc la période d'oscillation est :

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{2\pi}{\omega_0} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{(3M + m)(a - b)}{(2M + m)g}} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$T_0 = 1,32 \text{ s}$$

2.9. L'énergie cinétique de (Σ) :

$$\begin{aligned} E_c &= E_c(A) + E_c(B) \\ &= \frac{1}{2} I \Omega^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}_C^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} M a^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} m (a - b)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m b^2 \omega^2 \end{aligned}$$

2.10. L'énergie potentielle de pesanteur de (Σ) :

$$E_p = -m(a - b)g \cos \theta$$

2.11. (A) tourne sans frottement autour de son axe et (B) ne glisse pas sur (A), l'énergie mécanique du système est donc conservée.

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2} M a^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} m (a - b)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m b^2 \omega^2 - m(a - b)g \cos \theta \\ &= \text{cte} \end{aligned}$$

Or à $t = 0$, $\Omega = 0$, $\omega = 0$, $\dot{\theta} = 0$ et $\theta = \theta_0$, donc :

$$cte = -m(a - b)g \cos \theta_0$$

soit :

$$\frac{1}{2}Ma^2\Omega^2 + \frac{1}{2}m(a - b)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mb^2\omega^2 + m(a - b)g(\cos \theta_0 - \cos \theta) = 0$$

2.12.

a) Théorème du moment cinétique appliqué à (A) en O , donne :

$$Ma^2\dot{\Omega} = \Gamma - aT$$

b) En utilisant les relations (1), (2) et (4) qui restent inchangées et celle établie ci-dessus, on trouve l'équation différentielle demandée :

$$(3M + m)(a - b)\ddot{\theta} + (2M + m)g \sin \theta = \frac{\Gamma}{a}$$

c) La position d'équilibre θ_e est obtenue en posant $\ddot{\theta} = 0$:

$$\sin \theta_e = \frac{\Gamma}{(2M + m)ag}$$

θ_e existe si :

$$\sin \theta_e \leq 1$$

c'est à dire :

$$\Gamma \leq (2M + m)ag$$

d) Pour étudier la stabilité de cette position d'équilibre, remplaçons θ par $\theta_e + \varepsilon$ dans l'équation différentielle du mouvement :

$$(3M + m)(a - b)\ddot{\varepsilon} + (2M + m)g \cos \theta_e \varepsilon = 0$$

Le centre d'inertie C de (B) oscille donc autour de cette position d'équilibre avec la période :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{(3M + m)(a - b)}{(2M + m)g \cos \theta_e}}$$

La position d'équilibre θ_e de C est donc stable.