TP : Propriétés des signaux périodiques

On se propose dans ce T.P. de mesurer des grandeurs électriques telles que : l'amplitude d'un signal électrique, sa valeur efficace, sa valeur moyenne. Vous étudierez les régimes variable et statique.

Pour réaliser ces mesures, vous utiliserez plusieurs appareils dont l'oscilloscope, le multimètre numérique et l'analyseur de spectre.

1 Mesures des grandeurs caractéristiques d'un signal périodique

Nous travaillerons avec des tensions mais les mêmes définitions peuvent être transposées au cas de l'intensité d'un courant électrique. Nous utiliserons les instruments de mesure suivants : oscilloscope, multimètre numérique[1] et analyseur de spectre.

Soit u une tension de valeur instantanée $u(t)$, périodique de période T : $u(t+T) = u(t)$. Déterminons les différentes grandeurs caractéristiques de cette tension.

1.1 Valeur moyenne

1.1.1 Définitions

La valeur moyenne $< u >$ de $u(t)$ est définie par :

$$< u > \;=\; \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 \,+\, \Delta t} u(t)\; dt$$

Dans le cas d'une tension périodique, il suffit de calculer $< u >$ sur une période : $< u > \;=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\; dt$.
Pour mesurer la valeur moyenne d'une tension quelconque on peut utiliser un voltmètre numérique sur la position continu : DC (Direct Current).

☞ Identifiez la touche DC sur le multimètre numérique dont vous disposez.

On appelle tension *alternative* ou *alternée*, une tension de valeur moyenne nulle : $\langle u_{alt}(t)\rangle = 0$.

On appelle *rapport cyclique* d'un signal carré et on note en général α le rapport de la durée haute T_h d'un signal carré à la durée de la période T : $\alpha = T_h/T$.

1. Attention ! Les appareils de mesures disposent d'une *bande passante* dans laquelle il faut se placer pour effectuer des mesures convenables. Dans le cas du multimètre numérique utilisé au laboratoire, il faut manipuler des signaux dont l'harmonique le plus élevé ne dépasse pas la fréquence $f_{\text{sup}} = 50\,\text{kHz}$ et l'harmonique le plus bas est supérieur à $f_{\text{min}} = 10\,\text{Hz}$.

1.1.2 Préparations

✍ Déterminez l'expression théorique de la valeur moyenne des signaux suivants :
- signal carré compris entre 0 et E et de rapport cyclique α ;
- signal sinusoïdal $u(t) = U_0(1 + \sin \omega t)$;
- signal « sinusoïdal » redressé mono-alternance puis double alternance ;
- signal modulé en amplitude de la forme :

$$u(t) = U_0(1 + k \cos \omega_m t) \cos \omega_p t \tag{1}$$

✍ Pour le signal modulé en amplitude, comment appelle-t-on les grandeurs k, ω_m et ω_p ?

✍ On considère le montage représenté figure 2. Le composant `AD633` est un multiplieur analogique dont les principales caractéristiques sont décrites dans la notice technique fournie en annexe. Retenons seulement ici que la tension de sortie Z du multiplieur obéit à la relation suivante :

$$Z = \frac{(X1 - X2)\,(Y1 - Y2)}{K} + W + V_{S0}$$

avec $K = 10\,\mathrm{V}$ et V_{S0} une tension de décalage de quelques millivolts que nous négligerons ici.
- Montrez que la tension de sortie Z s'écrit de la même façon qu'en (1). En déduire l'expression de k en fonction de K et U_1.

1.1.3 Mesures

1.1.3.1 Signal carré

☞ À l'aide du GBF[2] (et de l'oscilloscope) produisez un signal carré $u(t)$ compris entre 0 V et $E = 1\,\mathrm{V}$, de fréquence $f = 1\,\mathrm{kHz}$ et de rapport cyclique $\alpha = 0,5$.

☞ Mesurez la valeur moyenne du signal à l'aide d'un multimètre numérique en position DC.

☞ Comparez vos mesures avec la valeur théorique.

☞ Observez l'influence du rapport cyclique α sur la valeur moyenne de $u(t)$. Discutez.

1.1.3.2 Signal sinusoïdal

☞ À l'aide du GBF produisez un signal sinusoïdal d'amplitude $U_0 = 1\,\mathrm{V}$, de composante continue 1 V et de fréquence $f = 1\,\mathrm{kHz}$.

☞ Mesurez la valeur moyenne du signal à l'aide d'un multimètre numérique en position DC.

☞ Refaites les mesures en annulant la composante continue. Concluez.

1.1.3.3 Signal redressé

☞ Réalisez le montage représenté figure 1.

☞ À l'aide du GBF produisez un signal sinusoïdal alterné d'amplitude $U_0 = 1\,\mathrm{V}$ et de fréquence $f = 1\,\mathrm{kHz}$.

☞ Mesurez la valeur moyenne du signal à l'aide d'un multimètre numérique en position DC. Concluez sur le rôle de la diode dans ce montage.

2. GBF : Générateur Basses Fréquences.

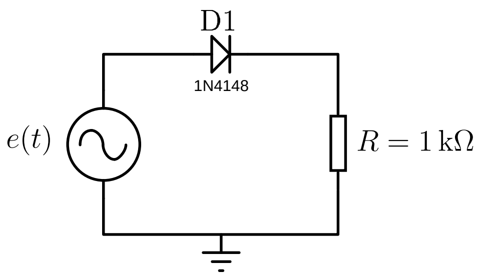

FIGURE 1 – Circuit pour le redressement mono-alternance.

1.1.3.4 Signal modulé en amplitude

☞ Réalisez le montage modulateur d'amplitude représenté figure 2 sur une plaquette d'essai à part. On ne démontera plus ce montage jusqu'à la fin de la séance de T.P.

☞ À l'aide de deux GBF et du montage 2 produisez un signal $Z(t)$ modulé en amplitude. On choisira par exemple $f_m = 1\,\mathrm{kHz}$, $f_p = 10\,\mathrm{kHz}$, $U_0 = 1\,\mathrm{V}$ et U_1 réglable. Visualisez et relevez les oscillogrammes de $Z(t)$ respectivement pour $k < 1$ et $k > 1$.

☞ Mesurez la valeur moyenne du signal $Z(t)$ à l'aide d'un multimètre numérique en position DC.

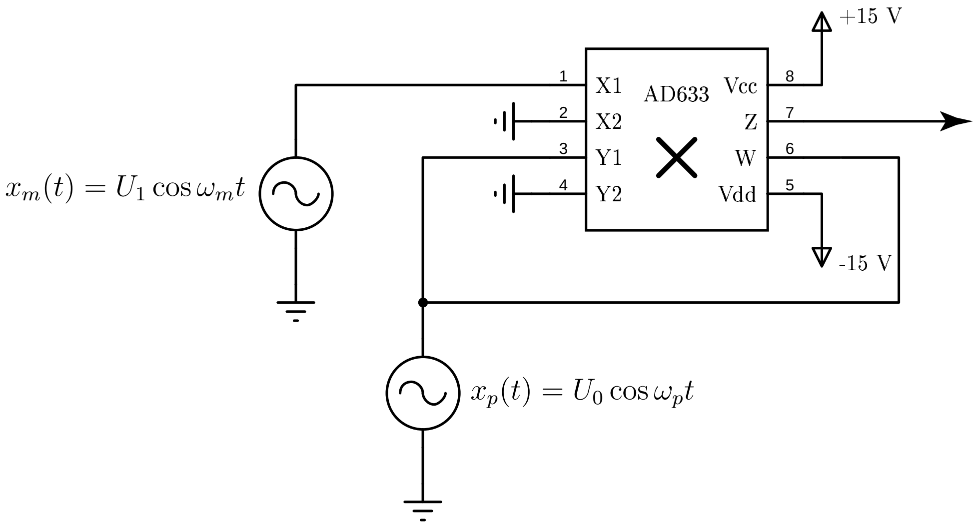

FIGURE 2 – Montage modulateur d'amplitude.

1.2 Valeur efficace

1.2.1 Définitions

La valeur efficace U_{eff} d'un signal périodique $u(t)$ est définie par :

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{< u^2(t) >} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\, dt}$$

Pour mesurer la valeur efficace d'une tension périodique quelconque il faut utiliser un voltmètre « True Root Mean Square » (ou « T.R.M.S.») sur la position AC+DC. Certains multimètres qui ne sont que R.M.S. « enlèvent » systématiquement la composante continue du signal dont ils mesurent la valeur efficace.

✍ Donner le schéma synoptique de la mesure d'une grandeur efficace.

☞ Identifiez l'ensemble de touches AC+DC sur le multimètre numérique dont vous disposez. Basculez alternativement en mode R.M.S. et T.R.M.S.

1.2.2 Préparations

✍ Déterminez l'expression théorique de la valeur efficace vraie (T.R.M.S.) puis de la valeur efficace (R.M.S.) des signaux suivants :

- signal carré compris entre 0 et E et de rapport cyclique α ;
- signal sinusoïdal $u(t) = U_0(1 + \sin \omega t)$;
- signal modulé en amplitude de la forme (1).

✍ Rappelez l'égalité de PARSEVAL.

1.2.3 Mesures

1.2.3.1 Signal carré

☞ À l'aide du GBF produisez un signal carré $u(t)$ compris entre 0 V et $E = 1\,\text{V}$, de fréquence $f = 1\,\text{kHz}$ et de rapport cyclique $\alpha = 0,5$.

☞ Mesurez la valeur efficace vraie (T.R.M.S.) du signal à l'aide d'un multimètre numérique en position AC+DC. Même chose pour la valeur efficace (R.M.S.).

☞ Comparez vos mesures avec les valeurs théoriques.

1.2.3.2 Signal sinusoïdal

☞ À l'aide du GBF produisez un signal sinusoïdal d'amplitude $U_0 = 1\,\text{V}$, de composante continue 1 V et de fréquence $f = 1\,\text{kHz}$.

☞ Mesurez la valeur efficace vraie (T.R.M.S.) du signal puis la valeur efficace (R.M.S.).

1.2.3.3 Signal modulé en amplitude

☞ Mesurez la valeur efficace (T.R.M.S) du signal $Z(t)$ modulé en amplitude pour $U_0 = 1\,\text{V}$ et $k = 1$. Comparez les résultats avec la théorie. Le théorème de PARSEVAL est-il vérifié ici ?

1.3 Facteur de forme

1.3.1 Définition

Le facteur de forme F d'un signal périodique $u(t)$ quelconque est défini, lorsqu'il existe, par :

$$F = \frac{U_{\text{eff}}}{< u >}$$

✍ Que vaut F lorsque le signal est continu ?

1.3.2 Mesures

☞ Mesurer le facteur de forme F d'un signal sinusoïdal redressé mono-alternance d'amplitude $U_m = 5\,\mathrm{V}$, puis d'un signal double-alternance de même amplitude. Comparer ces deux valeurs et dégager l'intérêt du facteur de forme.

1.4 Ondulation - Taux d'ondulation

1.4.1 Définition

Soit $u(t)$ une tension variable *périodique* quelconque (figure 3). D'après le théorème de Fourier, on peut toujours écrire $u(t)$ sous la forme générale suivante :

$$u\,(t) = \langle u \rangle + u_{\mathrm{alt}}\,(t)$$

avec $\langle u \rangle$ la valeur moyenne de $u(t)$ appelée aussi composante continue (parfois aussi offset) et $u_{\mathrm{alt}}(t)$ la composante alternative de $u(t)$ ou *ondulation*.

On caractérise en général l'ondulation du signal $u(t)$ par son *taux d'ondulation* noté τ et défini par :

$$\tau = \frac{u_{\mathrm{alt,eff}}}{\langle u \rangle}$$

avec $u_{\mathrm{alt,eff}}$ la valeur efficace de l'ondulation $u_{\mathrm{alt}}(t)$.

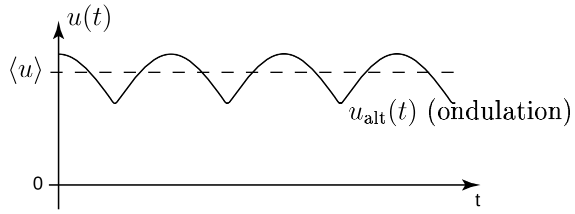

Figure 3 – Ondulation d'un signal périodique quelconque.

✍ Montrer que $F^2 = \tau^2 + 1$.

✍ Que vaut τ lorsque le signal est continu ?

1.4.2 Mesures

☞ Mesurer τ avec les mêmes signaux qu'à la question 1.3.2.

2 Analyse harmonique d'un signal périodique

2.1 Présentation

L'analyse spectrale d'un signal *analogique* consiste à déterminer le spectre en fréquences de ce signal.

En effet tout signal analogique peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire discrète (pour les signaux périodiques) ou continue (pour les signaux apériodiques) de fonctions trigonométriques simples sin ou (et) cos. Pour simplifier les calculs, nous nous limitons au cas des signaux $u(t)$ périodiques de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ avec ω la pulsation du fondamental. Sous réserve que $u(t)$ satisfasse à certaines conditions de régularités[3], on peut écrire le développement en série de FOURIER du signal $u(t)$ sous la forme :

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\omega t + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin n\omega t \tag{2}$$

avec A_n et B_n les coefficients de FOURIER définis par :

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\cos(n\omega t)\, dt \\ B_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\sin(n\omega t)\, dt \end{cases} \quad \text{et} \quad U_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\, dt \tag{3}$$

U_0 représente la valeur moyenne ou composante continue du signal.
On peut encore écrire (2) sous la forme :

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n) \tag{4}$$

✍ Pour chacune des formes (2) et (4), identifier $\langle u \rangle$ et $u_{\text{alt}}(t)$.

2.1.1 Signal carré

✍ Montrer que les coefficients de FOURIER du signal carré de rapport cyclique α et d'amplitude U_m, représenté figure 4 sont donnés par :

$$A_n = \frac{4U_m}{2n\pi} \sin \alpha n\pi \tag{5}$$

✍ Montrer que l'expression de la valeur moyenne U_0 de ce signal carré est donné par $U_0 = \alpha U_m$.

2.1.2 Signal triangulaire

✍ Montrer que les coefficients de FOURIER du signal triangulaire d'amplitude U_m, représenté figure 5 sont donnés par :

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{si n pair} \\ \dfrac{8}{\pi^2}\dfrac{U_m}{n^2} & \text{si n impair} \end{cases} \tag{6}$$

✍ Proposer un circuit simple permettant de produire un signal triangulaire.

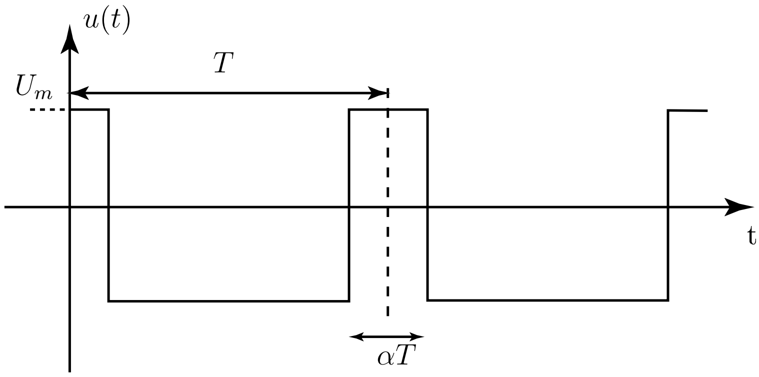

FIGURE 4 – Signal carré de rapport cyclique α.

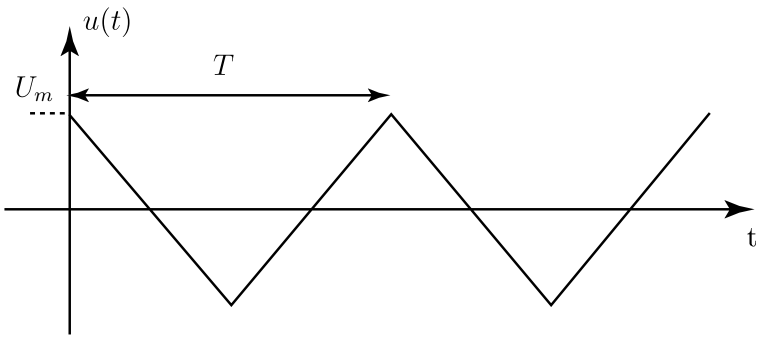

FIGURE 5 – Signal triangulaire d'amplitude U_m.

2.1.3 Signal mono-alternance (facultatif)

✍ Montrer que les coefficients de FOURIER du signal sinusoïdal redressé mono-alternance représenté figure 6 sont donnés par :

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \dfrac{U_m}{2} & \text{si } n = 1 \\ -\dfrac{2\,U_m}{\pi}\dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n^2-1} & \text{si } n > 1 \text{ pair} \end{cases}$$

✍ Déterminer l'expression de la valeur moyenne U_0 du signal représenté figure 6. Expliquer pourquoi on utilise en général la fonction non linéaire de redressement mono ou double-alternance pour créer un signal continu à partit d'un signal sinusoïdal alterné.

✍ Proposer un circuit simple permettant de produire un signal triangulaire.

3. Les conditions de régularité sont aussi appelées conditions de DIRICHLETS. Nous supposerons que tous les signaux étudiés dans le cours et les travaux pratiques d'électronique satisfont à ces conditions.

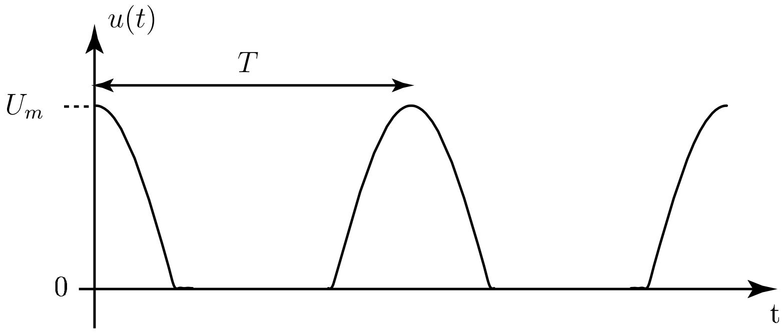

Figure 6 – Signal sinusoïdal redressé mono-alternance.

2.1.4 Signal double-alternance (facultatif)

✍ Montrer que les coefficients de Fourier du signal sinusoïdal redressé double-alternance représenté figure 7 sont donnés par :

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ -\dfrac{4\,U_m}{\pi}\dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n^2-1} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

✍ Déterminer l'expression de la valeur moyenne U_0 du signal représenté figure 7. Comparer cette valeur avec celle du redressement mono-alternance et expliquer pourquoi on préfère le redressement double-alternance dans la conversion alternatif–continu.

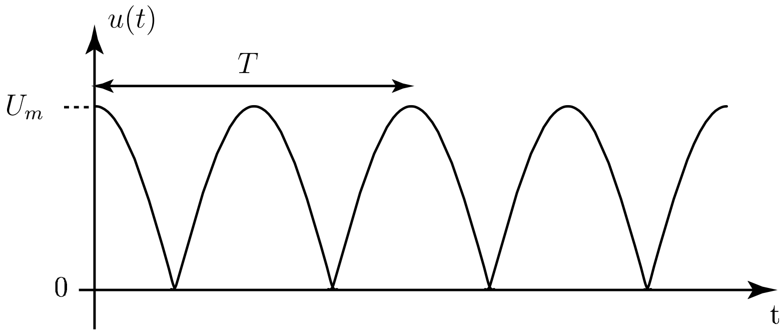

Figure 7 – Signal sinusoïdal redressé double-alternance.

✍ Proposer un circuit simple permettant de produire un signal sinusoïdal redressé double-alternance.

2.2 Analyse spectrale

2.2.1 Spectre d'amplitude

À partir de l'expression du DSF on peut représenter deux spectres réels : un spectre en amplitude et un spectre en phase.

Le spectre d'amplitude est le plus important et celui que nous représenterons de manière expérimentale à l'aide de notre analyseur de spectre de la carte d'acquisition ou de l'oscilloscope.

Le spectre d'amplitude du signal $x(t)$ consiste à représenter graphiquement (figure 8) par un bâtonnet ou une flèche l'amplitude de C_n en fonction de $\omega = n\omega_0$ ou en fonction de n.

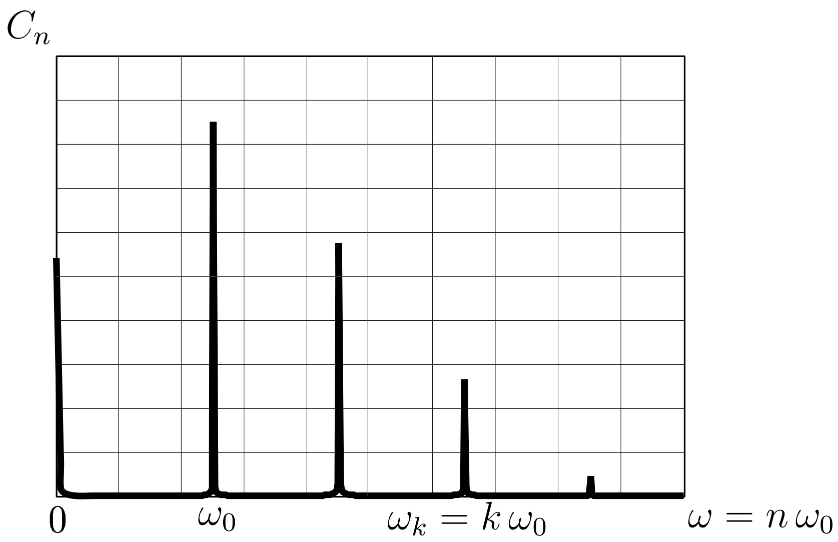

FIGURE 8 – Allure d'un spectre en amplitude réel.

2.3 Allure de quelques spectres

- ✍ Donnez l'allure du spectre d'amplitude du signal sinusoïdal.
- ✍ Donnez l'allure du spectre d'amplitude du signal modulé $u(t) = U_0(1 + k\cos\omega_m t)\cos\omega_p t$.
- ☞ À l'aide de l'analyseur de spectre, déterminer le spectre en amplitude d'un signal $x(t)$ sinusoïdal quelconque. Vérifier que ce spectre est bien en conformité avec les caractéristiques temporelles du signal $x(t)$.
- ☞ Mêmes questions pour un signal carré compris entre 0 et E et de rapport cyclique $\alpha = 0,5$. Retrouve-t-on les propriétés remarquables indiquées par l'expression (5) (dépendance des C_n en $1/n$ et n impair) ? Comment le spectre est-il modifié lorsque le rapport cyclique ne vaut plus 0,5 ?
- ☞ Mêmes questions pour un signal triangulaire symétrique. Les propriétés remarquables indiquées par l'expression (6) sont-elles vérifiées ?

2.4 Valeur efficace – Égalité de Parseval

L'égalité de Parseval établit l'équivalence entre l'expression temporelle de la valeur efficace et son expression fréquentielle :

$$\left[\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} = \left[X_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

- ✍ Démontrez l'égalité de Parseval.
- ☞ À l'aide de l'analyseur de spectre, visualisez le spectre d'amplitude du signal modulé en amplitude de la forme $u(t) = U_0(1 + k\cos\omega_m t)\cos\omega_p t$, avec $f_p = 10\,\text{kHz}$, $f_m = 1\,\text{kHz}$ et $U_0 = 1\,\text{V}$. En déduire sa valeur efficace.

✍ L'égalité de Parseval est-elle vérifiée ?

2.5 Taux de distorsion harmonique

2.5.1 Définition – Utilité

Le taux de distorsion harmonique D est défini par :

$$D = \frac{\sqrt{\sum\limits_{n>1}^{\infty} C_n^2}}{C_1} \tag{7}$$

Le taux de distorsion harmonique permet de quantifier l'écart que présente un signal périodique par rapport au signal sinusoïdal de même période.

Les systèmes physiques non linéaires (diodes, bobines saturées, amplificateurs en saturation ou en commutation,...) engendrent systématiquement de la distorsion harmonique en générant des harmoniques dans le circuit.

2.5.2 Mesure

☞ Mesurez le taux de distorsion harmonique du signal triangulaire et du signal carré ($\alpha = 0,5$). Comparez les valeurs et expliquez.

☞ Quantifiez la distorsion harmonique introduite par une diode de redressement dans un circuit.