Correction physique 2 centrale 2011

À propos du champ magnétique

I Généralités sur le champ magnétique

I.A - Les propriétés du champ magnétique

I.A.1) Le champ magnétique est à flux conservatif :

- Forme locale :

$$\boxed{\mathbf{div}\ \vec{B}(M) = 0}$$

- Forme intégrale :

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{B}(M).\vec{dS} = 0}$$

- La signification concrète : le nombre de vecteurs $\vec{B}$ qui entre dans une surface fermée quelconque Σ est égale au nombre de vecteurs $\vec{B}$ qui sort ; c'est à dire aucune ligne de champ ne diverge.
- Les cartes des champs à flux conservatif sont : a et d.

I.A.2)

- L'équation de Maxwell-Ampère :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{rot}}\ \vec{B} = \mu_o \vec{\mathbf{j}} + \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

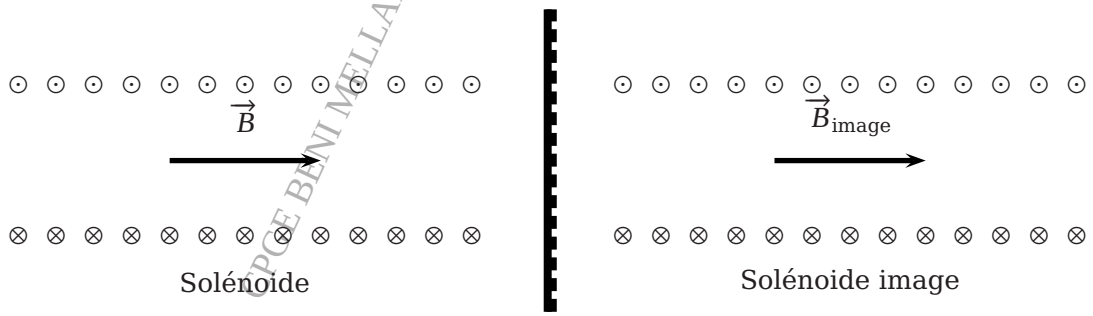
- Théorème d'Ampère dans le cadre de l'ARQS :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{rot}}\ \vec{B} = \mu_o \vec{\mathbf{j}} \Longrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{B}(M).\vec{d\ell} = \mu_o I_e}$$

- Les cartes d'un champ a rotationnel nul sont : a et c
- Les cartes du champ magnétique : d

I.A.3)

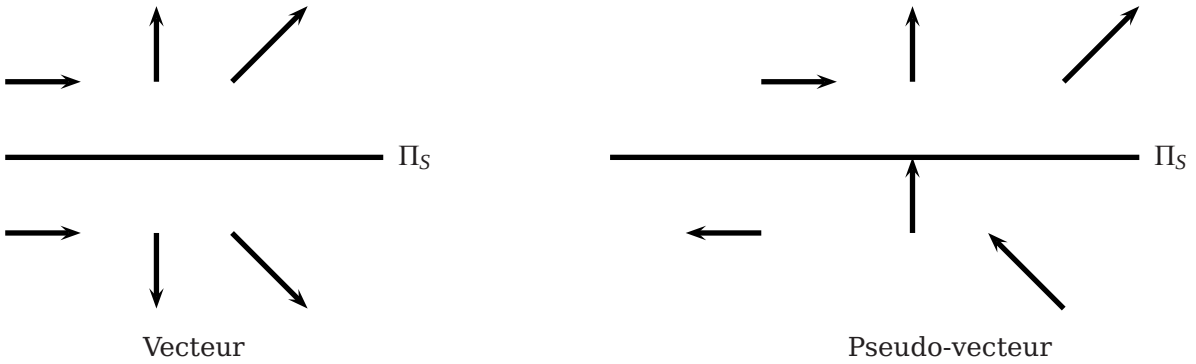
- Un plan de symétrie Π_S pour une distribution est un plan miroir.
- Un plan d'antisymétrie Π_A pour une distribution est un plan miroir avec changement du sens du courant.
- $\vec{B}(M) \in \Pi_A$
- $\vec{B}(M) \perp \Pi_S$



CPGE BENI MELLAL- CPGE BENI MELLAL- CPGE BENI MELLAL

On rappelle que :

- Un vecteur est transformé en son symétrie.
- Un pseudo-vecteur est transformé en l'opposé du symétrique.



• les plans diamétrales sont des plans d'antisymétrie et par conséquent $\overrightarrow{B}(M)$ appartient à l'axe de révolution du solénoïde.

• puisque $\overrightarrow{B}$ est un pseudo-vecteur alors

$$\boxed{\overrightarrow{B}_{\text{image}} = -sym(\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B}_{G\to Droite}}$$

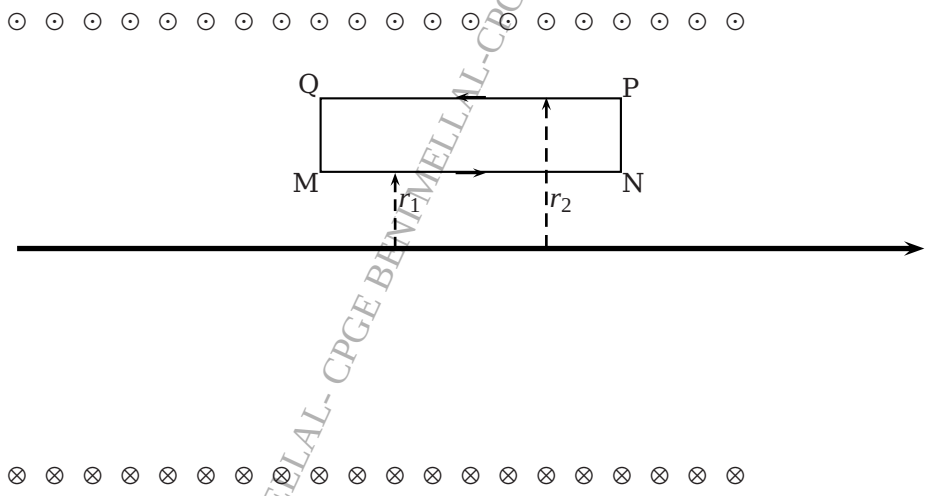
I.A.4)

a/ Solénoide infiniment long $\Longrightarrow l \gg R$

b/ Puisque :

- Tout plan diamétral est un plan d'antisymétrie alors $\overrightarrow{B}(M) \in \bigcap \Pi_A \Longrightarrow \overrightarrow{B}(M) = B(M)\overrightarrow{e_z}$
- Invariance par translation le long de l'axe oz (solénoide infiniment long), et par rotation autour de l'axe oz alors en coordonnées cylindriques on a : $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\overrightarrow{e_z}$

c/ Considérons le circuit MNPQ suivant à l'intérieur du solénoide :



Appliquons le théorème d'Ampère : $\oint_{MNPQ} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{d\ell} = \mu_o I_e$

Dans le contour MNPQ : $I_e = 0$ ainsi $B = cte$ sur MN et PQ puisque $r = cte$ ce qui donne :

$$\boxed{\oint_{MNPQ} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{d\ell} = 0 \Longrightarrow B(r_1) = B(r_2)}$$

CPGE BENI MELLAL- CPGE BENI MELLAL-CPGE BENI MELLAL-CPGE BENI MELLAL

ce résultat est valable pour tout $r_1; r_2 < R$ ce qui affirme que le champ magnétique $\vec{B}$ est uniforme à l'intérieur du solénoide.
L'expression de $\vec{B}(M)$ à l'intérieur du solénoide

$$\boxed{\vec{B}(M) = \mu_o n I \vec{e_z} = \mu_o \frac{N}{l} I \, \vec{e_z}}$$

d/ Application numérique :

$$\boxed{B = 12,56.10^{-4}\,(T)}$$

▶ Commentaire : valeur faible (même ordre de grandeur du champ magnétique terrestre).
▶ Pour augmenter la valeur de B :
- $I = 1A$ valeur assez importante, une augmentation de I risque de détériorer la sonde.
- Si on diminue l : l'approximation du solénoide infini ne reste plus valable.
- Si on augmente N par juxtaposition des couches de spires de rayon quasi constant on peut augmenter B.
- μ_o utiliser (introduire) un milieu ferromagnétique au lieu de l'air dans le solénoide : on augmente la valeur de B mais on risque de perdre la linéarité entre B et I.

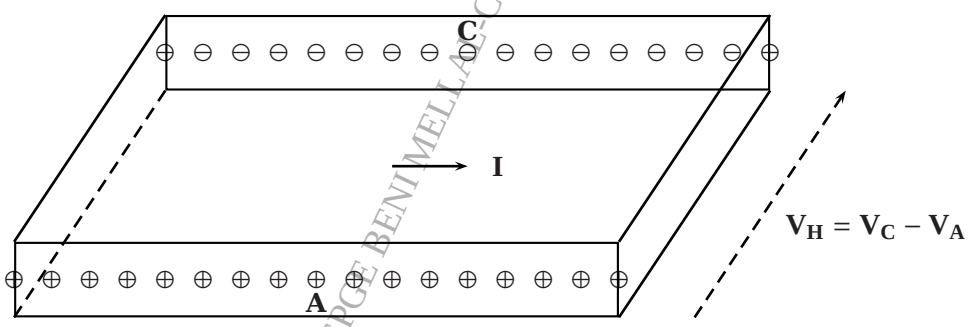
I.B - L'effet Hall

I.B.1)

a/ L'action du champ magnétique sur une porteur de charge $q < 0$, elle subit l'action de la force de Lorentz

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B} \Longrightarrow \vec{F} = -qVB\vec{e_y}}$$

b/ en régime transitoire on a séparation des porteurs de charges :
- Les charges négatives sur la face $y = a$.
- Les charges positives sur la face $y = 0$.
- ce qui donne



- V_H est négative et ne dépend pas de celui de la charge q

I.B.2) En régime permanent, la relation fondamentale de la dynamique

$$\boxed{m\frac{d\vec{V}}{dt} = q(\vec{E}_H + \vec{V} \wedge \vec{B}) = \vec{0} \Longrightarrow \vec{E}_H = VB\vec{e_y}}$$

I.B.3) La relation est

$$\boxed{\vec{j}_H = -nq\vec{V}}$$

CPGE BENI MELLAL-CPGE BENI MELLAL

La tension Hall est

$$\boxed{V_H = -\int_A^C \vec{E}.\vec{d\ell} \Longrightarrow V_H = -VBa}$$

Or $V = -\dfrac{j_H}{nq} \Longrightarrow V = -\dfrac{I}{abnq}$ ce qui donne

$$\boxed{V_H = \frac{I}{nqb}B}$$

ainsi $R_H = \dfrac{1}{nq} < 0$

I.B.4) Application numérique :

- On a : $n = \dfrac{N}{V} \Longrightarrow n = \rho\dfrac{N_A}{M}$ AN

$$\boxed{n = 8,39.10^{28}\ m^{-3}}$$

- $R_H = \dfrac{1}{nq} \Longrightarrow R_H = \dfrac{M}{\rho N_A q}$ A.N

$$\boxed{R_H = -7,45.10^{-11}}$$

- $V_H = \dfrac{IBR_H}{b}$ A.N

$$\boxed{V_H = -74,5\,nV}$$

- le choix de I et B sont réalistes mais assez élevés.
- le signe des porteurs de charges peut être déterminer à partir du signe de V_H :
  - Si $q > 0 \Longrightarrow R_H > 0$ et donc $V_H > 0$
  - Si $q < 0 \Longrightarrow R_H < 0$ et donc $V_H < 0$

I.B.5) On a :

- $V_H = \dfrac{IB}{nqb}$ donc pour augmenter V_H il faut diminuer n
- $n(metaux) \simeq 10^{28}$; $n(InAs) \simeq 10^{22}$
- $B_H = 0.34\,T$: le courant diminue par contre B a augmenté.

I.B.6) les raisons de la variation dans un semi conducteur la probabilité de libérer un électron est proportionnel au facteur de Boltzmann $e^{\frac{-eV}{k_BT}} \Longrightarrow R_H = \dfrac{1}{nq} \propto e^{\frac{eV}{k_BT}}$

- autres lois :
  - Dans l'atmosphère isotherme : $P = P_o e^{-\frac{e_p}{k_BT}}$
  - Lorsque une diode est dans le sens passant alors : $I = I_s e^{\frac{eV}{k_BT}}$
- On a $R_H = A\exp(\theta/T) \Longrightarrow \ln R_H = \ln A + \dfrac{\theta}{T}$ ce qui donne par dérivation que l'incertitude relative :

$$\boxed{\frac{\Delta R_H}{R_H} = \theta\frac{\Delta T}{T} \quad A.N \quad \frac{\Delta R_H}{R_H} = 0,22}$$

et par conséquent la précision est de 22%.

- Qualités du capteurs à effet hall :

CPGE BENI MELLAL-CPGE BENI MELLAL-CPGE BENI MELLAL-CPGE BENI MELLAL

- La tension Hall V_H est proportionnel au champ magnétique B.
- Valeurs de I faible.
- ▶ défauts des capteurs
- V_H dépend de la température T.
- valeurs de V_H faible qui nécessite une amplification.

II Réalisation d'un wattmètre à effet Hall

II.A - Étude de l'appareil

II.A.1) L'expression de B_o

$$\boxed{B_o = \mu_o n i_c}$$

II.A.2) On a $V_H = \dfrac{R_H I B}{b} \Longrightarrow V_H = \dfrac{R_H i_H}{b}\mu_o n i_c$ donc

$$\boxed{V_H = \frac{\mu_o n R_H}{b} i_H i_c}$$

II.A.3)

a/ En notation complexe on a : $U_o = (R + jL\omega)I_o e^{j\varphi}$ ce qui donne

$$\boxed{\tan\varphi = -\frac{L\omega}{R} \qquad A.N \quad \varphi = -81^o}$$

b/ la puissance instantanée $P(t) = u(t)i(t)$ ce qui donne en remplaçant I_o par $I_o = \dfrac{U_o}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$

$$\boxed{P(t) = \frac{U_o^2}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi]}$$

c/ la puissance moyenne P_m

Soit en calculant la valeur moyenne de $P(t)$ soit en utilisant $P_m = \dfrac{1}{2}\Re(\underline{u} * \underline{i}^*)$ on trouve

$$\boxed{P_m = \frac{U_o I_o}{2}\cos\varphi \Longrightarrow P_m = \frac{U_o^2}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\cos\varphi}$$

A.N

$$\boxed{P_m = 22,44\ Watt}$$

II.A.4) `Une imprécision dans l'énoncé:`v `représente la tension hall` V_H `en régime variable .`

- Le fonctionnement du dispositif : On intercale la sonde entre les spires du solénoide supposé infini qui crée un champ magnétique variable en fonction du temps , entre les bornes T_1 et T_2 il apparaît une tension Hall proportionnelle à la puissance consommé par le dipôle (R,L) : donc c'est un wattmètre à effet hall.
- On a $v_H = \dfrac{\mu_o n R_H}{b} i_H i_c$ Or $i_H = \dfrac{u_c}{r + R'}$ ce qui donne

$$\boxed{v_H = \frac{\mu_o n R_H}{b(r + R')} u_c i_c}$$

CPGE BENI MELLAL- CPGE BENI MELLAL

donc

$$\boxed{k = \frac{\mu_o n R_H}{b(r + R')}}$$

II.A.5)

a/ Calcul de v :

On a : $u_c = U_o \cos \omega t$ et $i_c = \sum_{n=1}^{\infty} I_{cn} \cos(n\omega t + \varphi_n)$ donc

$$\boxed{v = \sum_{n=1}^{\infty} k U_o I_{cn} \cos(\omega t) \cos(n\omega t + \varphi_n)}$$

b/ La valeur moyenne $< V_H >$

Sachant que $\cos(\omega t)\cos(n\omega t + \varphi_n) = \frac{1}{2}\Big(\cos[(n+1)\omega t + \varphi_n] + \cos[(n-1)\omega t + \varphi_n]\Big)$

et puisque

$$< \cos(p\omega t + \varphi) >= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p \neq 0 \\ \cos\varphi & \text{si} \quad p = 0 \end{cases}$$

Donc dans la valeur précédente la valeur non nulle correspond à $n - 1 = 0 \Longrightarrow n = 1$ ce qui donne que la valeur moyenne de V_H ne fait intervenir que le fondamental du courant.

c/ • La valeur moyenne :

$$\boxed{< V_H >= \frac{k U_o I_{c1}}{2} \cos \varphi_1}$$

• Puisque le spectre est $\{0, \omega; 2\omega, 3\omega \cdots\}$ alors un filtre passe bas est utile à condition que sa pulsation de coupure

$$\boxed{\omega_c < \omega \Longrightarrow f_c < f}$$

II.B - Obtention du $< V_H >$:étude du filtre

II.B.1) le théorème de Millman :

▶ Au point A :

$$\boxed{\underline{V}_A = \frac{\underline{V}_1 + \underline{V}_2}{3 + jRC_2\omega}}$$

▶ Au point B :

$$\boxed{\underline{V}_B = 0 = \frac{\underline{V}_A}{R} + jC_1\omega\underline{V}_2 \Longrightarrow \underline{V}_A = -jRC_1\omega\underline{V}_2}$$

▶ La fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{-1}{1 + j3RC_1\omega - R^2C_1C_2\omega^2}}$$

II.B.2) Il en résulte que :

• $H_o = -1$ • $\omega_o = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$ • $\varepsilon = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$

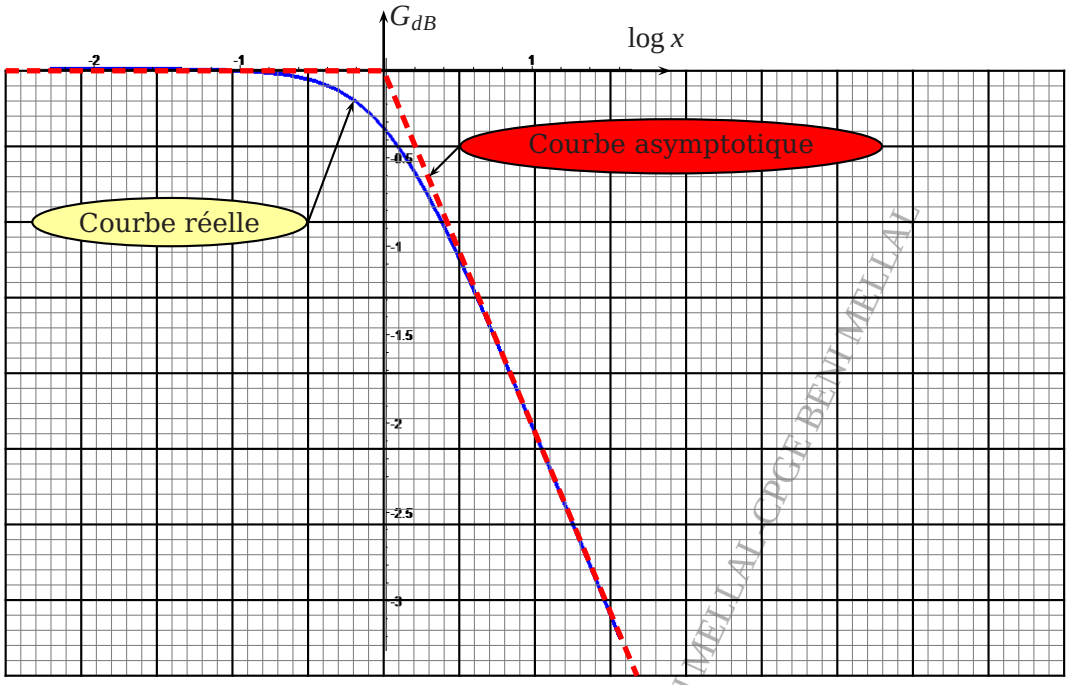
CPGE BENI MELLAL-CPGE BENI MELLAL

II.B.3) Calcul de C_1 et C_2 :

$$\boxed{C_1 = 123\,\mu F \quad ; \quad C_2 = 552\,\mu F}$$

II.B.4) Diagramme de Bode :

Il s'agit d'un filtre passe-bas actif du second ordre avec un facteur de qualité $Q = \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc la courbe du gain ne présente pas du maximum



II.B.5) Puisque le filtre est un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_o = 10 < 50$Hz alors il convient pour déterminer $< V_H >$.

III Tube métallique dans un solénoide

III.A -

III.A.1) L'expression de $\vec{B}_o$(solénoide infini)

$$\boxed{\vec{B}_o = \mu_o n i \vec{e_z} = \mu_o \frac{N}{\ell} I_o \cos \omega t \vec{e_z}}$$

III.A.2) L'inductance du solénoide :

$$\boxed{L = \frac{\mu_o N^2 \ell}{S}}$$

III.B -

III.B.1) La symétrie donne : $\vec{\mathbf{j}} = j\vec{e_\theta}$ et $\vec{B}_1 = B_1\vec{e_z}$

III.B.2)

CPGE BENI MELLAL CPGE BENI MELLAL CPGE BENI MELLAL CPGE BENI MELLAL

a/ Pour un solénoide infini on a $B = \mu\frac{N}{\ell}I$ avec NI c'est le courant enlacé, donc pour le cylindre le courant enlacé est $jS = j\ell b$ donc après simplification par ℓ on obtient le résultat

$$\boxed{B_1 = \mu_o jb}$$

Par contre à l'extérieur $B_1 = 0$

b/ La loi d'Ohm locale donne

$$\boxed{\vec{\mathbf{j}} = \sigma\vec{E}}$$

III.C -

III.C.1) l'équation de Maxwell-Faraday

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

III.C.2) La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\boxed{e = \oint \vec{E}.\vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_S \vec{B}.\vec{dS}}$$

On a : $e = \oint \vec{E}.\vec{dl} = \frac{j}{\sigma}2\pi a$

Ainsi en notation complexe : $\frac{d\Phi}{dt} = i\omega\underline{B}\pi a^2$

ce qui donne : $\underline{j} = \frac{\underline{B}}{\mu_o b} = -\frac{ia\sigma\omega}{2}(\underline{B}_o + \underline{B}_1)$

Ce qui donne puisque $\vec{\underline{B}}_1$ et $\vec{\underline{B}}_o$ ont même direction et sens alors

$$\boxed{\vec{\underline{B}}_1 = \frac{1}{-1 + \frac{2i}{\mu_o\omega a\sigma b}}\vec{\underline{B}}_o}$$

III.C.3) Le flux du champ total :

On pose $\Phi = \Phi_i + \Phi_e$ avec Φ_i le flux à travers la surface (πa^2) et Φ_e le flux à travers la surface $(S - \pi a^2)$

Sachant que pour :

- $0 \leqslant r \leqslant a \longrightarrow \vec{\underline{B}} = \vec{\underline{B}}_1 + \vec{\underline{B}}_o \Longrightarrow \Phi_i = \pi a^2(\underline{B}_1 + \underline{B}_o)$
- $a \leqslant r \leqslant R_s \longrightarrow \vec{\underline{B}} = \vec{\underline{B}}_o \Longrightarrow \Phi_e = (S - \pi a^2)\underline{B}_o)$ Ce qui donne

$$\boxed{\Phi = \pi a^2(\underline{B}_1 + \underline{B}_o) + (S - \pi a^2)\underline{B}_o}$$

CPGE BENI MELLAL-CPGE BENI MELLAL-CPGE BENI MELLAL