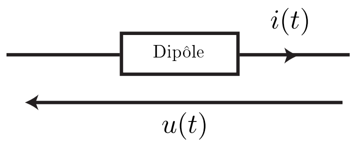
Chapitre 2

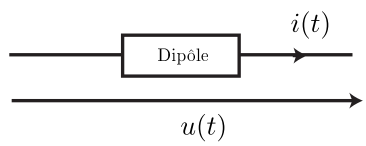
Puissance électrique

2.1 Puissance instantanée - Puissance moyenne

2.1.1 Puissance instantanée

Soit un dipôle soumis à une tension $u(t)$ et parcouru par un courant $i(t)$:





La **puissance instantanée** échangée par ce dipôle est :

$$\boxed{p(t) = u(t)\, i(t)} \tag{2.1}$$

Son unité est le : **Watt (W)**.

En régime sinusoïdal :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \qquad \text{et} \qquad i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

soit :

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2}(\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i))$$

Remarque 2 :
Il ne faut pas confondre entre la convention générateur ou récepteur (*i.e.* flèches utilisées pour faire les calculs) et le vrai comportement d'un dipôle (*i.e.* qui absorbe ou fournit la puissance).

La puissance $p(t)$ (en Watt) est reliée à la variation temporelle de l'énergie $E(t)$ (en Joule) par :

$$\boxed{p(t) = \frac{\Delta E(t)}{\Delta t}} \quad \text{ou} \quad \boxed{p(t) = \frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}} \tag{2.2}$$

Expérience : Mesure d'une puissance par le wattmètre.

2.1.2 Puissance moyenne (active)

La puissance moyenne est :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t$$

En régime sinusoïdal :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi)$$

avec : $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ le déphasage de la tension par rapport au courant.

$$U_m = \sqrt{2}U_{eff} \qquad \text{et} \qquad I_m = \sqrt{2}I_{eff}$$

d'où :

La puissance moyenne reçue par un dipôle est :

$$\mathcal{P} = < p(t) > = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$

- Le facteur, sans dimension, $\cos(\varphi)$ est le *facteur de puissance.*
- Le terme $U_{eff}I_{eff}$ est appelé : *puissance apparente*, il s'exprime en volt-mètre (symbole V.A).

2.1.3 Puissance reçue par quelques dipôles

✓ **Puissance électrique reçue par un résistor :**

La puissance instantanée reçue par un résistor :

$$\boxed{p(t) = u(t)i(t) = R\,i^2(t)}$$

cette puissance est absorbée par le résistor et transformée en énergie thermique par effet Joule (échauffement).

Application : Comment déterminer les grandeurs maximales pour une résistance en carbone ?

Réponse : Suivant la dimension de la résistance en carbone, celle-ci peut dissiper une puissance donnée. Les valeurs usuelles : $P_{\max} = 1/4W$, $P_{\max} = 1/2W$ et $P_{\max} = 1W$.

L'intensité maximale $I_{\max}$ admissible par la résistance R est : $I_{\max} = \sqrt{\frac{P_{\max}}{R}}$.

La tension maximale $U_{\max}$ admissible par la résistance R est : $U_{\max} = \sqrt{P_{\max}R}$.

Exemple : pour une résistance $R = 10$ kΩ ; $P_{\max} = 1/4W \rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{0{,}25}{10000}} = 5$ mA.

✓ **Puissance électrique reçue par L :**

La puissance instantanée reçue par une bobine idéale est :

$$\boxed{p(t) = u(t)i(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}$$

La bobine accumule donc de l'énergie lorsque le courant i augmente, et peut la restituer si celui-ci diminue : la bobine est un élément de stockage d'énergie.

L'énergie emmagasinée (stockée) dans la bobine est :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}Li^2}$$

L'énergie ne peut pas subir de discontinuité car cela correspondrait à une valeur infinie de la puissance ($p(t) = \frac{dE}{dt}$). En conséquence :

Le courant à travers une bobine idéale est une fonction continue du temps, c-à-d : $i(t_0^-) = i(t_0^+)$, $\forall\ t_0$.

✓ **Puissance électrique reçue par C :**

La puissance instantanée reçue par un condensateur idéal est :

$$\boxed{p(t) = u(t)i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}C\,u^2\right)}$$

Le condensateur accumule donc de l'énergie lorsque la tension u augmente, et peut la restituer si celui-ci diminue : le condensateur est un élément de stockage d'énergie.

L'énergie emmagasinée (stockée) dans le condensateur est :

$$\boxed{E_e = \frac{1}{2}Cu^2}$$

Application : Calculer l'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité $C = 1\mu F$ sous une tension de 10V.
Réponse : $E_e = 5.10^{-5}$ J. C'est une faible énergie !

L'énergie ne peut pas subir de discontinuité car cela correspondrait à une valeur infinie de la puissance ($p(t) = \frac{dE}{dt}$). En conséquence :

La tension aux bornes d'un condensateur idéal (et aussi sa charge) est une fonction continue du temps, c-à-d : $u(t_0^-) = u(t_0^+)$, $\forall\ t_0$.

2.1.4 Puissance apparente et puissance réactive

? ?

2.1.5 Puissance en notation complexe

2.1.5.1 Puissance complexe

En régime sinusoïde, il faut manipuler la notation complexe avec précaution lorsqu'il s'agit des calculs énergétiques. Par exemple :

$$u(t)i(t) \neq \Re(\underline{u}(t)\underline{i}(t))$$

Mais, pour calculer la valeur moyenne de la puissance on peut utiliser la formule mathématique suivante :

$$< ui >= \frac{1}{2}\Re(\underline{u}\,\underline{i}*)$$

où $\underline{i}*$ est le complexe conjugué de $\underline{i}$.

Cette formule est valable lorsque les signaux u et i sont sinusoïdaux.

La puissance moyenne reçue par un dipôle en régime sinusoïdal est :

$$\mathcal{P} =< p(t) >= \frac{1}{2}\Re(\underline{u}\,\underline{i}*)$$

Remarque : La puissance moyenne est appelée aussi : *puissance active.*

Cas d'un dipôle d'impédance $\underline{Z}$

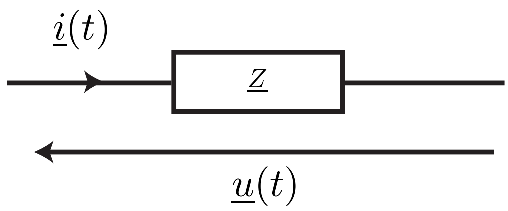


FIGURE 2.1 – Dipôle d'impédance $\underline{Z}$.

avec :

$$\underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t} \qquad \text{et} \qquad \underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t}$$

La puissance moyenne reçue par ce dipôle est :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\Re(\underline{u}\,\underline{i}*) = \frac{1}{2}\Re(\underline{Z}\,\underline{i}\,\underline{i}*) = \frac{1}{2}I_m^2\Re(\underline{Z})$$

soit :

$$\mathcal{P} = I_{eff}^2\,\Re(\underline{Z})$$

Exemples :
- Pour un résistor $\underline{Z} = R$: $\mathcal{P} = RI_{eff}^2$. Une résistance absorbe de l'énergie et n'en restitue jamais. Elle transforme irréversiblement l'énergie qu'elle absorbe : c'est un élément dissipatif.
- Pour une bobine $\underline{Z} = jL\omega$: $\mathcal{P} = 0$;
- Pour un condensateur $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$: $\mathcal{P} = 0$;

Une inductance pure et une capacité idéale ne consomment pas, en moyenne, d'énergie. Ces éléments échangent réversiblement de l'énergie avec le circuit.

Application : Principe du Wattmètre.

2.1.5.2 Théorème de BOCHEROT

? ?

2.2 Adaptation des impédances

Question : À quelles conditions un générateur sinusoïdal de f.e.m. $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ et d'impédance interne $\underline{Z}_g = R_g + jX_g$ fournit le **maximum de puissance** à un réseau d'utilisation d'impédance $\underline{Z}_u = R_u + jX_u$?

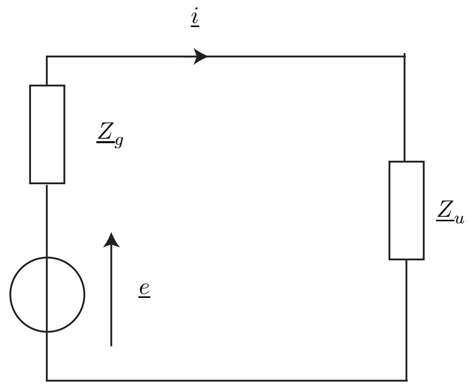


FIGURE 2.2 – La puissance transmise est maximale si $\underline{Z}_u = \underline{Z}_g^*$.

L'amplitude complexe du courant est :

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{e}_m}{\underline{Z}_u + \underline{Z}_g} = \frac{e_m}{R_g + R_u + j(X_g + X_u)}$$

La puissance moyenne reçue par l'utilisation est :

$$\mathcal{P} = I_{eff}^2 \,\Re(\underline{Z}) = \frac{1}{2} I_m^2 \,\Re(\underline{Z}) = \frac{R_u}{(R_g + R_u)^2 + (X_g + X_u)^2} \frac{e_m^2}{2}$$

Pour avoir une puissance maximale, on procède en deux étapes :

— condition 1 : on choisit $X_g = -X_u$. Par exemple $X_g = -\frac{1}{C\omega}$ et $X_u = L\omega$ où $L\omega = \frac{1}{C\omega}$. Dans ces conditions, la puissance devient :

$$\mathcal{P} = \frac{R_u}{(R_g + R_u)^2} \frac{e_m^2}{2}$$

— Condition 2 : Cette puissance transmise peut encore être augmentée en déterminant la valeur de la résistance R_u qui rend le facteur $y = \frac{R_u}{(R_g+R_u)^2}$ maximal :

$$\frac{dy}{dR_u} = 0 \quad \rightarrow \quad R_u = R_g$$

Les deux conditions peuvent être rassemblées en une seule :

$$\underline{Z}_u = \underline{Z}_g^*$$

et la puissance maximale est alors :

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{e_m^2}{8R_g}$$

Dans ces conditions on dit qu'il y a adaptation d'impédance.

Lorsque les caractéristiques du générateur sinusoïdal et celle de l'utilisation sont imposées, on adapte en intercalant un quadripôle entre le générateur et l'utilisation.

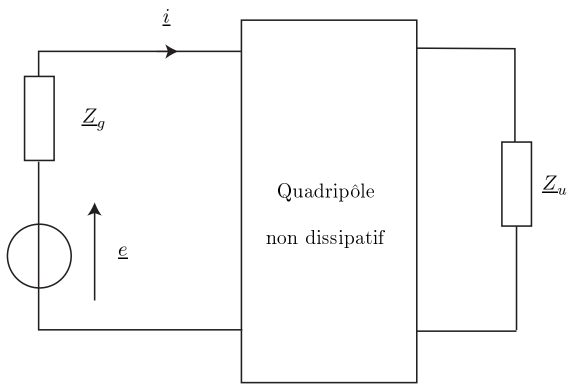


FIGURE 2.3 – Adaptation de puissance.

Le quadripôle, fermé sur l'impédance d'utilisation, doit présenter en entrée une impédance conjuguée de celle du générateur m

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_g^*$$

L'impédance de sortie du quaripôle doit être telle que :

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_u^*$$

2.3 Applications (TD + TP)

- Installation domestique
- Facteur de puissance
- Puissance active et réactive
- Adaptation d'impédance
- puissance consommée par un circuit RLC (bilan de puissance dans un circuit)
- Amélioration du facteur de puissance