Chapitre 4

Théorèmes généraux des circuits linéaires

4.1 Lois de KIRCHHOFF (Rappel)

4.1.1 Loi des nœuds

Un noeud correspond à la borne d'un dipôle à laquelle où au moins deux fils de connexion sont reliés.
La somme des courants entrant à un nœud est égale à la somme des courants sortant de ce nœud.

$$\boxed{\sum_{\text{entrant}} i_j = \sum_{\text{sortant}} i_k} \tag{4.1}$$

Remarque : On appelle branche une portion comprise entre deux noeuds consécutifs.

4.1.2 Loi des mailles

Une maille est un chemin fermé dans un circuit électrique.
Dans une maille orienté (arbitrairement), la somme algébrique des tensions aux bornes des dipôles est *nulle*

$$\boxed{\sum \varepsilon_k U_k = 0}$$

avec :
- $\varepsilon_k = 1$ si U_k a le même sens que l'orientation de la maille.
- $\varepsilon_k = -1$ si U_k a le sens opposé de l'orientation de la maille.

4.2 Théorème de MILLMAN

Considérons un noeud N **qui n'est relié qu'à des résistors** R_k. On note V_k est le potentiel juste après la résistor R_k.

Le théorème de MILLMAN donne le potentiel de ce noeud en fonction des potentiels V_k :

$$V_N = \frac{\sum_k \frac{V_k}{R_k}}{\sum_k \frac{1}{R_k}} \quad \text{soit} \quad : \qquad V_N = \frac{\sum_k G_k V_k}{\sum_k G_k}$$

ou $G_k = \frac{1}{R_k}$.
Démonstration :

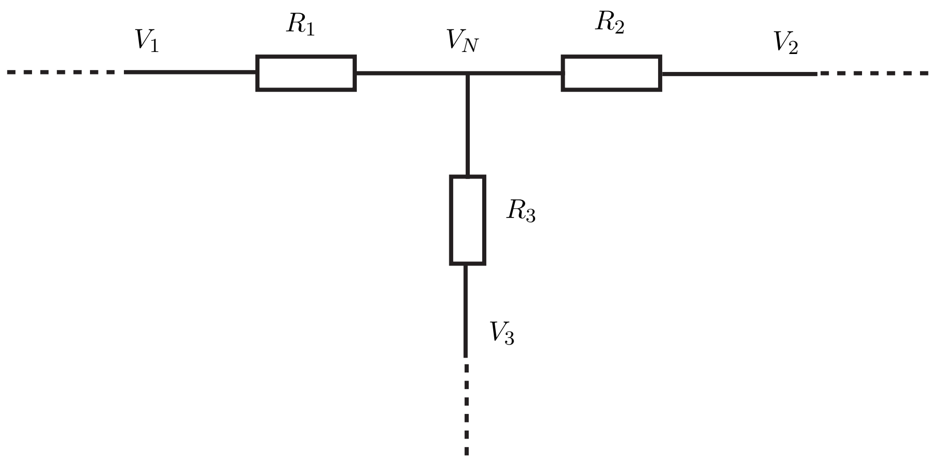

FIGURE 4.1 – Théorème de Millman : $V_N = \frac{G_1V_1+G_2V_2+G_3V_3}{G_1+G_2+G_3}$.

On applique la loi des noeud en N :

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \rightarrow \frac{V_1 - V_N}{R_1} + \frac{V_2 - V_N}{R_2} + \frac{V_3 - V_N}{R_3} = 0$$

c'est la loi des noeuds exprimé en terme de potentiels.
d'où :

$$V_N = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{G_1V_1 + G_2V_2 + G_3V_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Remarque : Si l'une branche j contient une source de courant I_0j, le terme correspondant dans le théorème de Millman est remplacé par $\varepsilon_j I_{0j}$

$$V_N = \frac{\sum\limits_{k\neq j} G_k V_k + \sum_j \varepsilon_j I_{0j}}{\sum\limits_{k\neq j} G_k}$$

ou $\varepsilon_j = +1$ si le courant I_{0j} entre dans le noeud N et $\varepsilon_j = -1$ le courant I_{0j} sort du noeud.

4.2.1 Applications

4.3 Théorème de superposition

4.3.1 Extinction d'une source libre

Une source **libre** (autonome) de tension est éteinte si sa f.e.m. est nulle. Elle peut être remplacée par un court-circuit (fil).

Une source **libre** (autonome) de courant est éteinte si son c.e.m. est nul. Elle peut être remplacée par un circuit ouvert.

Remarque : Attention on ne peut pas éteindre une source liée (c'est un modèle)

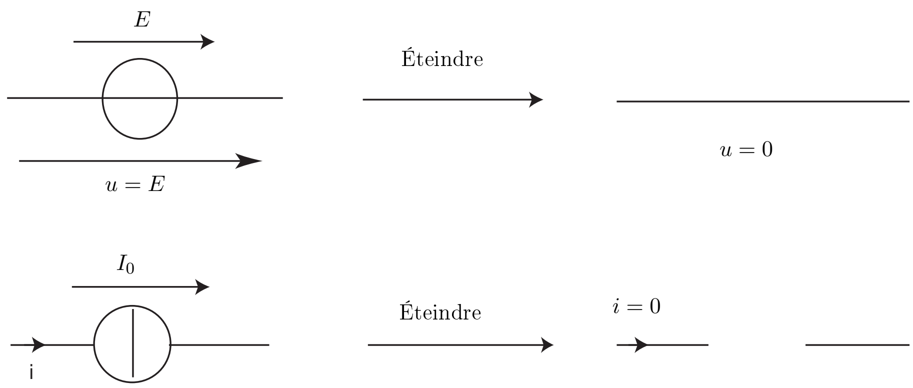

FIGURE 4.2 – Éteindre les sources autonomes.

4.3.2 Théorème de superposition

4.3.2.1 Énoncé

En régime permanent, l'intensité qui parcourt les dipôles constituant un réseau linéaire et la différence de potentiel à leurs bornes sont les sommes de ces grandeurs obtenues dans les différents états du réseau où toutes les sources libres, sauf une, sont éteintes.

Par exemple, si le circuit comporte 3 sources autonome alors le courant i dans une branche quelconque est :

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

ou : i_k $(k = 1, 2, 3)$ est le courant dans cette branche lorsque la source k est **seule** (les autres sont éteintes).

4.3.2.2 Applications

4.3.3 Équivalence entre les modèles de THÉVENIN et de NORTON

4.3.3.1 Modèle de THÉVENIN

Un circuit **linéaire** vue entre deux point A et B est équivalent à un générateur de de tension réel (E_{th}, R_{th}).

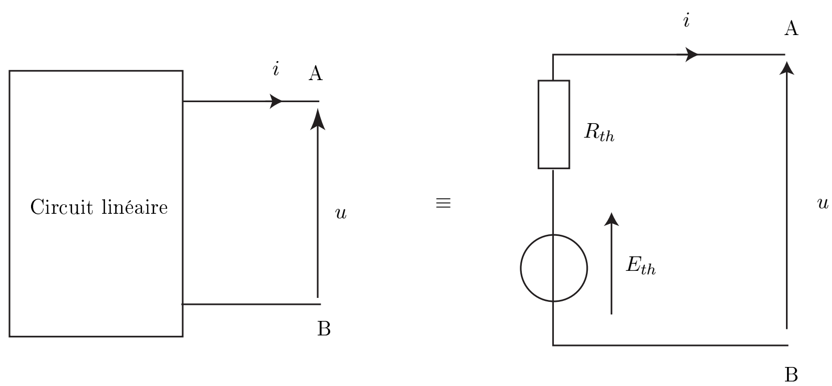

FIGURE 4.3 – Modèle de THÉVENIN d'un circuit linéaire.

avec :
- E_{th} : la f.e.m du générateur de THEVENIN
- R_{th} : sa résistance interne

On a :

$$u = E_{th} - R_{th}i$$

Calcul de E_{th} :

La f.e.m du générateur de THEVENIN est calculé en imposant $i = 0$ puis on calcule $u = E_{th}$:

$$E_{th} = u \quad \text{lorsque} \qquad i = 0.$$

Calcul de R_{th} :

La résistance interne du générateur de THEVENIN est calculé en imposant que $E_{th} = 0$. pour cela on **doit éteindre toutes les sources autonomes**.

$$R_{th} = -\frac{u}{i} \quad \text{lorsque les source autonomes sont éteintes.}$$

En d'autre terme, R_{th} est la résistance équivalente du dipôle AB lorsque les source autonomes sont éteintes.

Exemple :

4.3.3.2 Modèle de NORTON

Un circuit **linéaire** vue entre deux point A et B est équivalent à un générateur de courant réel (I_N, R_N).

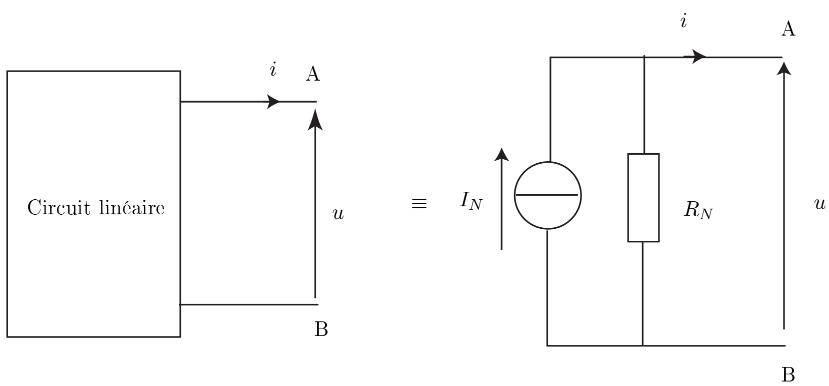

FIGURE 4.4 – Modèle de NORTON d'un circuit linéaire.

avec :
- I_N : le c.e.m du générateur de NORTON
- R_N : sa résistance interne

On a :

$$i = I_N - \frac{u}{R_N}$$

Calcul de I_N :

Le c.e.m du générateur de NORTON est calculé en imposant $u = 0$ puis on calcule $i = I_N$:

$$I_N = i \quad \text{lorsque} \qquad u = 0 \quad \text{(on met un court-circuit entre A et B).}$$

Calcul de R_N :

La résistance interne du générateur de NORTON est calculée de la même manière que celle de THEVENIN :

$$R_N = R_{th} = -\frac{u}{i} \quad \text{lorsque les } \textbf{source autonomes sont éteintes}.$$

En d'autre terme, R_N est la résistance équivalente du dipôle AB lorsque les source autonomes sont éteintes.

Exemple :

4.3.3.3 Équivalence THEVENIN-NORTON

Les deux modèles précédents sont équivalents :

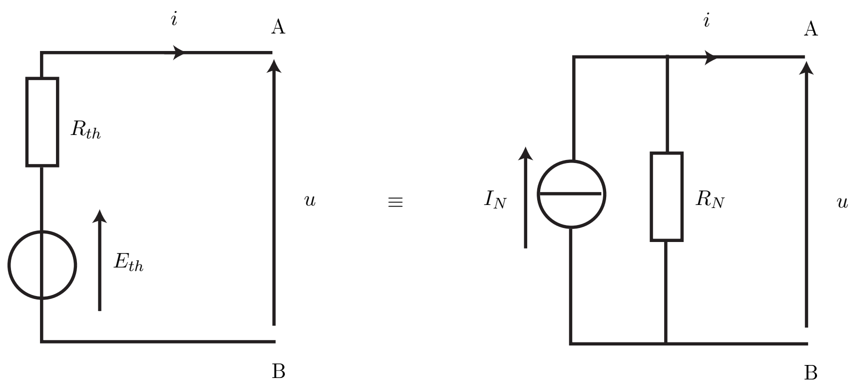

FIGURE 4.5 – Équivalence THEVENIN-NORTON.

On a :

$$u = E_{th} - R_{th}i \quad \text{et} \quad i = I_N - \frac{u}{R_N} \quad \text{quelles que soient les valeurs de } u \text{ et de } i$$

on déduit alors que :

$$E_{th} = R_N I_N \qquad \text{et} \qquad R_{th} = R_N$$

Remarque : il faut faire attention au sens de I_N et E_{th}, elles sont dans le même sens que i.