

CENTRE RÉGIONALE DES MÉTIERS  
DE L'ÉDUCATION ET DE LA FORMATION  
MARRAKECH-SAFI

CPA

\*\*\*\*\*

Préparation Concours AGP

PROBLÈMES CORRIGÉS

---

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES  
AGRÉGATION DE PHYSIQUE-CHIMIE  
OPTION PHYSIQUE

---

Par :  
ABDELFETTAH HABIB

*2014-2021*



# Table des matières

<b>1 Ondes électromagnétiques dans un plasma</b>	<b>5</b>
1.1 Énoncé (d'après SupElec)	5
1.2 Corrigé	7
<b>2 Réflexion d'une onde sur un conducteur</b>	<b>13</b>
2.1 Corrigé	14
<b>3 Guide d'ondes rectangulaire</b>	<b>21</b>
3.1 Énoncé	21
3.2 Corrigé	23
<b>4 Étude d'un câble coaxial</b>	<b>29</b>
4.1 Énoncé	29
4.2 Corrigé	31
<b>5 Propagation dans une ligne électrique</b>	<b>37</b>
5.1 Énoncé	37
5.2 Propagation dans une ligne électrique	41
<b>6 Rayonnement dipolaire électrique</b>	<b>49</b>
6.1 Énoncé	49
6.2 Corrigé	52
<b>7 Antennes linéaires demi-onde</b>	<b>57</b>
7.1 Énoncé	57
7.2 Corrigé	58



## Problème - 1

# Ondes électromagnétiques dans un plasma

### 1.1 Énoncé (d'après SupElec)

Dans ce problème, On s'intéresse à la propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma, avec application à l'ionosphère terrestre (en vue de communiquer à l'aide de satellites artificiels).

Dans tout le problème,  $\langle f(M, t) \rangle$  désigne la valeur moyenne dans le temps de la grandeur  $f(M, t)$  et l'espace est muni d'un trièdre orthonormé direct  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

#### 1. Préambule

**1.1.** Rappeler les équations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges et de courants. En déduire les équations de propagation des champs  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$ .

**1.2.** On considère une onde du type  $\vec{E}(M, t) = E_0 \exp j(\omega t - kx)\vec{u}_y$ , où  $E_0 \in R$ ,  $k \in R^+$ , et  $\omega \in R^+$ . Caractériser cette onde, en définissant chaque terme cité. Caractériser également sa polarisation en justifiant la réponse.

**1.3.** À quelle condition sur  $k$  et  $\omega$  cette onde est-elle une solution de l'équation de propagation ? Comment appelle-t-on cette relation ? Le vide est-il un milieu dispersif (à justifier) ?

**1.4.** Déterminer le champ  $\vec{B}(M, t)$ .

**1.5.** L'onde considérée précédemment est-elle réalisable expérimentalement ? On justifiera soigneusement la réponse.

#### 2. Propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma

L'ionosphère, couche de l'atmosphère située à plus de 50 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma : c'est un milieu ionisé, caractérisé par une densité volumique d'électrons libres  $n_o = 10^{10} m^{-3}$  et une densité volumique de cations, de charge  $+e$  et de masse  $M = 1,67.10^{-27} kg$ , égale elle aussi à  $n_o$ . L'ensemble est donc globalement neutre. On se propose d'étudier dans ce milieu la propagation d'ondes du type  $\vec{E}(M, t) = E_0 \exp j(\omega t - kx)\vec{u}_y$ .

##### 2.1. Position du problème

**2.1.1.** Exprimer et calculer la densité volumique d'électrons libres dans un métal conducteur comme le cuivre en supposant que chaque atome libère un électron libre de conduction. Comparer cette valeur à la densité volumique d'électrons libres  $n_0$  dans l'ionosphère. Quelle force, exercée sur les électrons libres, et dont on tient compte dans un conducteur métallique, peut-on négliger dans l'ionosphère ? Justifier la réponse.

**2.1.2.** Faire un bilan de toutes les forces appliquées à un électron libre et préciser lesquelles sont négligeables. On supposera les électrons non relativistes.

**2.1.3.** Pour un fluide, rappeler l'expression du champ des vecteurs accélération  $\vec{a}(M, t)$  en fonction du champ des vitesses  $\vec{v}(M, t)$ , à l'aide de la dérivée particulaire. Mettre en évidence deux termes dont on donnera les noms. En considérant ici l'ensemble des électrons comme un fluide, comment se simplifie  $\vec{a}(M, t)$  compte tenu de  $\vec{E} = E_0 \exp j(\omega t - \underline{k}x) \vec{u}_y$  ?

## 2.2. Mouvement des électrons libres et conductivité

**2.2.1.** En utilisant 2.1., déterminer le champ des vecteurs vitesse  $\vec{v}(x, t)$  des électrons libres.

**2.2.2.** On désire calculer la conductivité du milieu. Déterminer le vecteur densité de courant  $\vec{j}(x, t)$  en expliquant quels sont les porteurs de charge dont on peut négliger le mouvement. En déduire la conductivité complexe  $\underline{\sigma}$  définie par la relation  $\vec{j}(x, t) = \underline{\sigma} \vec{E}(x, t)$ . Quelle est la principale différence avec la conductivité d'un métal lorsqu'on se place à basse fréquence ?

**2.2.3.** Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Ce résultat est-il cohérent avec la conclusion du 2.1.1. ?

## 2.3 Propagation du champ électromagnétique

**2.3.1.** Établir l'équation de propagation du champ  $\vec{E}(x, t)$  dans le plasma. En déduire la relation entre  $\underline{k}^2$  et  $\omega^2$ . Mettre en évidence une pulsation caractéristique dite pulsation plasma  $\omega_p$  ; donner son expression et calculer sa valeur numérique pour l'ionosphère. Dans deux questions qui suivent (2.3.2 et 2.3.3.), on suppose que le plasma occupe le demi-espace  $x \geq 0$  et que l'onde est émise à partir de  $x = 0$ .

**2.3.2. Étude du cas  $\omega < \omega_p$  :**

a- Donner la relation  $\underline{k}(\omega)$ .

b- En déduire les champs  $\vec{E}(x, t)$  et  $\vec{B}(x, t)$  en notation réelle.

c- Caractériser l'onde obtenue en définissant chaque terme cité.

d- Calculer  $\langle \vec{\pi}(x, t) \rangle$ , valeur moyenne dans le temps du vecteur réel de POYNTING. Décrire alors qualitativement ce que devient une onde électromagnétique envoyée depuis le sol en direction de l'ionosphère.

**2.3.3. Étude du cas  $\omega > \omega_p$  :**

a- Donner la relation  $k(\omega)$ .

b- En déduire les champs  $\vec{E}(x, t)$  et  $\vec{B}(x, t)$  en notation réelle.

c- Caractériser l'onde obtenue.

d- Définir et calculer la vitesse de phase  $v_\varphi(\omega)$  de cette onde. Le milieu est-il dispersif ? (justifier la réponse).

e- Définir et calculer la vitesse de groupe  $v_g(\omega)$  de cette onde. En donner la signification physique.

f- Tracer  $k(\omega)$ ,  $v_\varphi(\omega)$  et  $v_g(\omega)$  en faisant apparaître les valeurs particulières et les branches asymptotiques, comparer  $v_\varphi(\omega)$  et  $v_g(\omega)$  à  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ . Conclure.

Au sol un émetteur envoie verticalement une onde hertzienne de fréquence réglable. Expliquer les phénomènes observés en fonction de la fréquence (ou de la longueur d'onde). En-dessus de quelle valeur de la longueur d'onde  $\lambda$  un récepteur situé au sol enregistre-t-il un signal ? Calculer l'altitude de l'ionosphère, sachant que le signal est reçu à 0,6 ms après l'émission.

## 2.4. Application à la transmission de l'information

**2.4.1.** La première liaison radio transatlantique fut réalisée par MARCONI en 1901 ; il fut alors possible de recevoir des ondes de fréquences de quelques centaines de  $kHz$ . Expliquer le phénomène.

**2.4.2.** Les communications sol-sol tendent à être remplacées par des communications sol-satellite-sol utilisant des fréquences de quelques centaines de  $MHz$ . Expliquer pourquoi cela est possible ?

## 1.2 Corrigé

### 1. Préambule

1.1. Les équations de MAXWELL dans le vide :

$$\begin{aligned} (MG) : \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \quad ; \quad (MF) : \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (M\Phi) : \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \quad ; \quad (MA) : \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

On en déduit les équations de propagation du champ  $\vec{E}$  et du champ  $\vec{B}$  :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

1.2. Il s'agit d'une onde plane progressive monochromatique de pulsation  $\omega$  et se propageant dans le sens des  $x$  croissants. Sa polarisation est rectiligne de direction  $\vec{u}_y$ .

1.3. En introduisant l'expression de  $\vec{E}$  dans l'équation de propagation du champ électrique obtenue ci-dessus, on obtient la relation de dispersion :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Le vide n'est pas un milieu dispersif car la vitesse de phase  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$  est indépendante de  $\omega$ .

1.4. L'équation de MAXWELL-FARADAY donne :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

Donc :

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

1.5. On ne peut pas réaliser une telle onde expérimentalement, car une onde plane est illimitée dans le temps et l'espace.

## 2. Propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma

### 2.1.

2.1.1. La densité particulière des électrons est :

$$n = \frac{\rho_{Cu} N_A}{M_{Cu} m_e} \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

$$n_0 \approx 10^{10} \text{ m}^{-3} \ll n \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}, \text{ on peut donc négliger la force de type frottement visqueux } -\frac{m}{\tau} \vec{v}$$

2.1.2. Bilan des forces :

- Force de type frottement visqueux.
- Force de LORENTZ :  $-e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B}$ .

Les forces à négligées sont :

- la force de type frottement visqueux car le plasma est diluée.
- la force magnétique devant la force électrique car on travail dans le cadre non relativiste.

2.1.3. L'accélération d'un électron s'écrit :

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

Le premier terme est l'accélération local et le deuxième terme est l'accélération convective.

En régime forcé, on cherche le vecteur vitesse sous forme d'une onde plane ayant la même forme que le champ électrique :

$$\vec{v} = \underline{v}_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

D'où :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = (v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}) = 0$$

car  $v_x = v_z = 0$  et  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = 0$ .

Donc :

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

## 2.2. Mouvement des électrons libres et conductivité

2.2.1. Le PFD appliqué à un électron donne :

$$m\vec{a}(M, t) \simeq m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E} = -eE_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

soit :

$$\vec{v} = -\frac{eE_0}{jm\omega} \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

2.2.2. Le vecteur densité de courant :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= q_i n_i \vec{v}_i + q_e n_e \vec{v}_e \\ &= \frac{n_0 e^2}{j\omega} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) E_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_y \end{aligned}$$

Or  $\frac{1}{M} \ll \frac{1}{m}$ , d'où :

$$\vec{j} \simeq \frac{n_0 e^2}{jm\omega} E_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

Comme  $\vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E}$  alors :

$$\underline{\sigma} \simeq \frac{n_0 e^2}{jm\omega}$$



Or, la conductivité d'un métal à basse fréquence est :

$$\sigma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{m}$$

Donc  $\sigma_0$  est réel, ce qui implique que  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  sont en phase. Cependant, la conductivité dans l'ionosphère  $\underline{\sigma} \simeq \frac{n_0 e^2}{j m \omega}$  est imaginaire pur :  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  sont en quadrature de phase.

**2.2.3.** La puissance moyenne est :

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \Re(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = 0$$

Ce résultat est cohérent avec 2.1.1. car on a négligé les interactions entre les charges.

### 2.3 Propagation du champ électromagnétique

**2.3.1.** Les équations de MAXWELL dans l'ionosphère nous donne l'équation de propagation du champ électrique :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \underline{\sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En remplaçant dans l'équation de propagation,  $\Delta$  par  $-\underline{k}^2$ ,  $\frac{\partial}{\partial t}$  par  $j\omega$  et  $\underline{\sigma}$  par  $\frac{n_0 e^2}{j m \omega}$  on trouve la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

avec  $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}} \simeq 5,6.10^6 \text{ rad.s}^{-1}$  pour l'ionosphère.

**2.3.2. Étude du cas  $\omega < \omega_p$  :**

a- Il y a deux solutions imaginaires :

$$\underline{k} = -\frac{j}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} = -\frac{j}{\delta}$$

et

$$\underline{k} = +\frac{j}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} = +\frac{j}{\delta}$$

avec :  $\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$ .

b- Pour avoir une amplitude qui diminue dans le sens des  $x$  croissants, on ne retiendra que la première expression de  $\underline{k}$ . On trouve alors :

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp(j\omega t) \vec{u}_y$$

et d'après l'équation de MAXWELL-FARADAY, on a :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \\ &= -j \frac{E_0}{\delta \omega} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp(j\omega t) \vec{u}_z \end{aligned}$$

D'où, en notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

et

$$\vec{B} = \frac{E_0}{\delta\omega} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

$\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$  est la profondeur de pénétration de l'onde dans le plasma.

c- Il s'agit d'une onde stationnaire oscillant "sur place" avec une pulsation  $\omega$  et une amplitude qui décroît exponentiellement selon  $Ox$ , on dit que c'est une onde évanescente.

d- La moyenne du vecteur de POYNTING :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\pi}(x,t) \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{R}e(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

L'onde électromagnétique est totalement réfléchiée sur l'ionosphère.

### 2.3.3. Étude du cas $\omega > \omega_p$ :

a- Il y a deux solutions réelles. celle qui est physiquement acceptable est :

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

b- Les expressions des champs :

$$\vec{E} = E_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

et

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

En notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

et

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

c- Il s'agit d'une onde plane progressive et monochromatique se propageant dans le sens des  $x$  croissants.

d- On définit la vitesse de phase comme suit :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Dans notre cas :

$$v_\varphi = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

Le milieu est dispersif car  $v_\varphi$  dépend de  $\omega$  : le milieu de propagation sépare progressivement des ondes monochromatiques ayant des vitesses de phase différentes, on parle du phénomène de dispersion.

e- La vitesse de groupe est définie comme suit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

On a :

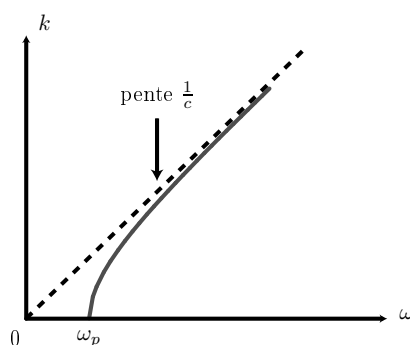
$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \Rightarrow 2kdk = 2\frac{\omega d\omega}{c^2}$$

d'où :

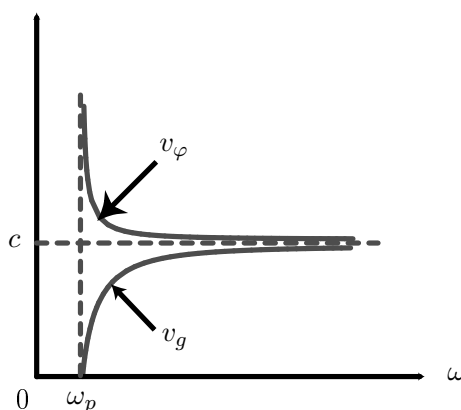
$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} \\ &= c^2 \frac{k}{\omega} \\ &= c \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega} \end{aligned}$$

Sa signification physique : la vitesse de groupe est la vitesse du "sommet" de l'enveloppe d'un paquet d'onde. Elle n'a de signification physique réelle que lorsque le milieu de propagation est peu dispersif et donc le paquet d'onde qui s'y propage, est moins déformé.

**f- Tracé de  $k$  en fonction de  $\omega$  :**



**Tracé de  $v_g$  et  $v_\varphi$  en fonction de  $\omega$  :**



On remarque que  $v_\varphi > c$  : célérité de la lumière dans le vide. C'est pas étonnant, puisque la vitesse de phase est la vitesse des plans équiphases (plans immatériels).

$$v_g < c.$$

Si  $\omega > \omega_p$ ,  $\Rightarrow \lambda < \lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} = 2\pi c \sqrt{\frac{m\varepsilon_0}{n_0 e^2}} \simeq 334,2$  m, l'onde traverse l'ionosphère.

Si  $\omega < \omega_p \Rightarrow \lambda > 334,2$  m, l'onde est réfléchiée vers le sol, et donc un récepteur situé au sol peut enregistrer le signal.

L'altitude de l'ionosphère est :

$$h = \frac{ct}{2} = \frac{3.10^8 \cdot 0,6.10^{-3}}{2} = 90 \text{ km}$$

## 2.4. Application à la transmission de l'information

**2.4.1.** L'ordre de grandeur de la longueur d'onde correspondant à quelques centaines de  $kHz$  est :

$$\lambda \approx \frac{c}{\nu} = \frac{3.10^8}{10^5} = 3 \text{ km}$$

Cette longueur d'onde est  $> 334,2$  m, d'où la possibilité de recevoir ces ondes.

**2.4.2.** L'ordre de grandeur de la longueur d'onde correspondant à quelques centaines de  $MHz$  est :

$$\lambda \approx \frac{c}{\nu} = \frac{3.10^8}{10^8} = 3 \text{ m}$$

Cette longueur d'onde est  $< 334,2$  m. ces ondes peuvent donc traverser l'ionosphère, arriver jusqu'au satellite qui les renvoie vers le sol.

## Problème - 2

# Réflexion d'une onde sur un conducteur

### 1. Propagation métallique

Une onde électromagnétique plane transverse monochromatique de pulsation  $\omega$ , se propage dans le sens des  $z$  croissants, à l'intérieur d'un milieu métallique de permittivité et perméabilité assimilables à celles du vide. Le champ électrique correspondant s'écrit en notation complexe :

$$\vec{E} = \underline{E}_0 \exp i(\underline{k}'' z - \omega t) \vec{e}_x$$

La conductivité du métal en régime statique est notée  $\gamma_0$ .

Pour les applications numériques, on prendra  $\gamma_0 = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$  et une fréquence  $f = 1 \text{ GHz}$  pour l'onde hyperfréquence.

**1.1.** Montrer que la conductivité du métal est assimilée à sa conductivité en régime statique.

**1.2.** Écrire les équations de MAXWELL simplifiées dans le métal. En déduire la propagation du champ électrique.

**1.3.** Définir et calculer l'épaisseur de peau caractérisant la pénétration de l'onde dans le métal. Préciser le déphasage entre le champ électrique et le champ magnétique de l'onde.

### 2. Réflexion métallique

Le milieu conducteur précédent occupe le demi-espace  $z > 0$ , tandis que l'air, assimilé au vide, occupe le demi-espace  $z < 0$ . Une onde électromagnétique plane monochromatique de pulsation  $\omega$  se propage dans la direction de l'axe  $Oz$  dans l'air. Le champ électrique de cette onde s'écrit :

$$\vec{E}_1 = \underline{E}_{01} \exp i(kz - \omega t) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

À l'interface air-conducteur, elle donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise dont les champs électriques s'écrivent respectivement :

$$\vec{E}'_1 = \underline{E}'_{01} \exp i(\underline{k}'z - \omega t) \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = \underline{E}_{02} \exp i(\underline{k}''z - \omega t)$$

**2.1.** Donner l'expression de  $\underline{k}'$  et  $\underline{k}''$ .

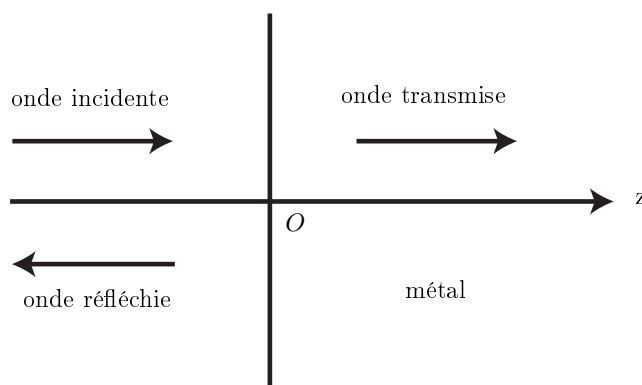
**2.2.** Quels sont les champs magnétiques des trois ondes considérées ?

**2.3.** Quelles sont les conditions imposées aux champs électrique et magnétique en  $z = 0$  ? En déduire les coefficients de réflexion  $\underline{r}$  et de transmission  $\underline{t}$  du champ électrique en fonction de  $c$ ,  $\delta$  et  $\omega$ .

### 3. Aspect énergétique

**3.1.** Calculer les moyennes temporelles du vecteur de POYNTING des trois ondes.

**3.2.** Déterminer le coefficient de réflexion en puissance  $R$  et celui de transmission  $T$  en fonction de  $c$ ,  $\delta$  et  $\omega$ .



**3.3.** Vérifier qu'il y a bien conservation de l'énergie.

**3.4.** Calculer la puissance moyenne  $\langle \mathcal{P}_j \rangle$  dissipée par effet joule dans un cylindre de section  $S$ , entre les abscisses  $z = 0$  et  $z = \infty$ . Comparer cette puissance au flux moyen du vecteur de POYNTING de l'onde transmise à travers la surface  $S$  en  $z = 0$ .

#### 4. Pression de radiation

**4.1.** Justifier que sur le milieu conducteur s'exerce une force volumique moyenne :

$$\langle \vec{f}_v \rangle = \frac{\gamma_0}{2} \text{Re}(\vec{E}_2 \wedge \vec{B}_2^*)$$

L'exprimer en introduisant la densité volumique moyenne d'énergie de l'onde incidente notée  $\langle e_i \rangle$ .

**4.2.** En déduire qu'une force pressante s'exerce sur le métal, dans la direction de l'onde incidente et définir une pression moyenne  $\langle P \rangle$  appelée pression de radiation. Exprimer  $\langle P \rangle$  en fonction de  $\langle e_i \rangle$  et des constantes caractéristiques du problème.

#### 5. Limite du conducteur parfait

**5.1.** En tenant compte des ordres de grandeur envisagés, commenter les valeurs de  $k\delta$ ,  $\underline{r}$ ,  $R$  et  $T$ .

**5.2.** Le conducteur est "parfait" si l'épaisseur de peau est nulle :  $\delta = 0$ . Commenter.

**5.3.** Quels sont les valeurs des champs électrique et magnétique de l'onde transmise dans le cas réel  $\delta > 0$  et dans le cas idéal  $\delta = 0$ .

**5.4.** Quelle est l'expression du vecteur densité de courant au sein du métal? Commenter son comportement à la limite  $\delta \rightarrow 0$ . Indiquer la valeur du courant surfacique permettant de modéliser ce cas limite.

**5.5.** Que deviennent les conditions aux limites dans le cas d'un métal "parfait"? En déduire le coefficient de réflexion en amplitude  $\underline{r}$  en  $z = 0$ .

## 2.1 Corrigé

### 1. Propagation métallique

**1.1.** Appliquons le théorème de la résultante cinétique à un électron du métal :

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

d'où, en notation complexe :

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m(1 - i\omega\tau)} \vec{E}$$

et :

$$\begin{aligned}\underline{\vec{j}} &\simeq -ne\underline{\vec{v}} \\ &= \frac{ne^2\tau}{m(1-i\omega\tau)}\underline{\vec{E}}\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$$

La conductivité complexe est donc :

$$\underline{\gamma} = \frac{ne^2\tau}{m(1-i\omega\tau)}$$

Or pour un bon conducteur :

$$\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$$

et comme :

$$\omega = 2\pi f \simeq 2,28.10^9 \text{ rad.s}^{-1}$$

alors :

$$\omega\tau \ll 1$$

d'où :

$$\underline{\gamma} = \gamma_0$$

**1.2.** On a :

$$\begin{aligned}\underline{\vec{\nabla}}\underline{\vec{E}} &= \frac{\underline{\rho}}{\varepsilon_0} \\ ik''\underline{\vec{e}}_z.\underline{\vec{E}} &= \frac{\underline{\rho}}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

et puisque, d'après l'énoncé, le champ électrique est transverse, alors  $\underline{\rho} = 0$ .

Comparons, d'autre part, le vecteur densité de courant de conduction et celui de déplacement :

$$\frac{\|\gamma_0\underline{\vec{E}}\|}{\|\varepsilon_0\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}\|} = \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0\omega} \gg 1$$

D'où les équations de MAXWELL simplifiées :

$$\begin{aligned}\underline{\vec{\nabla}}.\underline{\vec{E}} &= 0 \\ \underline{\vec{\nabla}} \wedge \underline{\vec{E}} &= -\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t} \\ \underline{\vec{\nabla}}.\underline{\vec{B}} &= 0 \\ \underline{\vec{\nabla}} \wedge \underline{\vec{B}} &= \mu_0\gamma_0\underline{\vec{E}}\end{aligned}$$

D'où l'équation de propagation de  $\underline{\vec{E}}$  :

$$\Delta\underline{\vec{E}} = \mu_0\gamma_0\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

**1.3.** En remplaçant  $\Delta$  et  $\frac{\partial}{\partial t}$  respectivement par  $-k''^2$  et  $-i\omega$ , dans l'équation de propagation de  $\underline{\vec{E}}$ , on trouve la relation de dispersion :

$$\underline{k}''^2 = i\mu_0\gamma_0\omega$$

Ce qui donne pour une propagation à  $z$  croissants :

$$\underline{k}'' = \frac{1+i}{\delta}$$

avec  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$  épaisseur de peau.

$\delta$  caractérise la distance caractéristique de la décroissance du champ électromagnétique, puisque :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} &= \underline{\vec{E}}_0 \exp\left(\frac{-z}{\delta}\right) \exp i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) \\ \underline{\vec{B}} &= \frac{\underline{\vec{k}}'' \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} \\ &= \frac{1+i}{\delta \omega} \underline{\vec{e}}_z \wedge \underline{\vec{E}} \end{aligned}$$

Or :

$$1+i = \sqrt{2} \exp i\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

alors :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\sqrt{2}}{\delta \omega} \underline{\vec{e}}_z \wedge \underline{\vec{E}} \exp i\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Donc le déphasage entre  $\underline{\vec{E}}$  et  $\underline{\vec{B}}$  est :

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

## 2. Réflexion métallique

### 2.1.

$$k' = -\frac{\omega}{c} \quad \text{et} \quad \underline{k}'' = \frac{1+i}{\delta}$$

### 2.2.

$$\underline{\vec{B}}_1 = \underline{\vec{B}}_{01} \exp i(kz - \omega t) \quad , \quad \underline{\vec{B}}'_1 = \underline{\vec{B}}'_{01} \exp i(k'z - \omega t) \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_2 = \underline{\vec{B}}_{02} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)$$

avec

$$\underline{\vec{B}}_{01} = \frac{\underline{\vec{e}}_z \wedge \underline{\vec{E}}_{01}}{c} \quad , \quad \underline{\vec{B}}'_{01} = -\frac{\underline{\vec{e}}_z \wedge \underline{\vec{E}}'_{01}}{c} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_{02} = (1+i) \frac{\underline{\vec{e}}_z \wedge \underline{\vec{E}}_{02}}{\delta \omega}$$

**2.3.** Comme il s'agit d'une distribution **volumique** de charges et de courants, il y a continuité de  $\underline{\vec{E}}$  et  $\underline{\vec{B}}$  en  $z=0$  :

$$\underline{\vec{E}}_1 + \underline{\vec{E}}'_1 = \underline{\vec{E}}_2 \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_1 + \underline{\vec{B}}'_1 = \underline{\vec{B}}_2$$

Donc :

$$\underline{\vec{E}}_{01} + \underline{\vec{E}}'_{01} = \underline{\vec{E}}_{02} \tag{2.1}$$

$$\frac{\underline{\vec{e}}_z \wedge \underline{\vec{E}}_{01}}{c} - \frac{\underline{\vec{e}}_z \wedge \underline{\vec{E}}'_{01}}{c} = (1+i) \frac{\underline{\vec{e}}_z \wedge \underline{\vec{E}}_{02}}{\delta \omega} \tag{2.2}$$

En multipliant vectoriellement la relation (2) ci-dessus par  $\underline{\vec{e}}_z$  et en tenant compte du fait que les champs sont transverses, on trouve :

$$\underline{\vec{E}}_{01} - \underline{\vec{E}}'_{01} = (1+i) \frac{c}{\delta \omega} \underline{\vec{E}}_{02} \tag{2.3}$$



Les relations (1) et (3) donnent en  $z = 0$ , puisque  $\vec{E}'_{01} = r \vec{E}_{01}$  et  $\vec{E}_{02} = t \vec{E}_{01}$  :

$$r = \frac{\omega\delta - c - ic}{\omega\delta + c + ic} \quad \text{et} \quad t = \frac{2\delta\omega}{\omega\delta + c + ic}$$

### 3. Aspect énergétique

3.1. Le vecteur de POYNTING moyen d'une onde électromagnétique est défini par :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{R}e(\vec{E} \wedge \vec{B}^*)$$

Donc :

$$\langle \vec{\pi}_1 \rangle = \frac{\|\vec{E}_{01}\|^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z, \quad \langle \vec{\pi}'_1 \rangle = -\frac{\|\vec{E}'_{01}\|^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \langle \vec{\pi}_2 \rangle = \frac{\|\vec{E}_{02}\|^2}{2\mu_0 \delta\omega} \vec{e}_z$$

3.2. Puisque :

$$\vec{E}'_{01} = r \vec{E}_{01} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{02} = t \vec{E}_{01}$$

Donc :

$$R = \frac{\langle \|\vec{\pi}'_1\| \rangle}{\langle \|\vec{\pi}_1\| \rangle} = \|r\|^2 = \frac{(\omega\delta - c)^2 + c^2}{(\omega\delta + c)^2 + c^2} \quad \text{et} \quad T = \frac{\langle \|\vec{\pi}_2\| \rangle}{\langle \|\vec{\pi}_1\| \rangle} = \frac{c}{\delta\omega} \|t\|^2 = \frac{4c\delta\omega}{[(\omega\delta + c)^2 + c^2]}$$

3.3. On a bien :

$$R + T = 1$$

3.4. On a :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_j \rangle &= \frac{S}{2} \int_0^\infty \mathcal{R}e(\vec{j}_2 \cdot \vec{E}_2^*) dz \\ &= \frac{S\gamma_0}{2} \int_0^\infty \|\vec{E}_{02}\|^2 \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) dz \\ &= \frac{S\gamma_0\delta}{4} \|\vec{E}_{02}\|^2 \end{aligned}$$

Or :

$$\gamma_0 = \frac{2}{\mu_0\omega\delta^2}$$

Donc :

$$\langle \mathcal{P}_j \rangle = S \frac{\|\vec{E}_{02}\|^2}{2\mu_0\delta\omega}$$

Le flux du vecteur de POYNTING moyen transmis en  $z = 0$  à travers  $S$  est :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} \rangle &= S \frac{\|\vec{E}_{02}\|^2}{2\mu_0\delta\omega} \\ &= \langle \mathcal{P}_j \rangle \end{aligned}$$

ce qui traduit que toute l'énergie électromagnétique transmise dans le métal y est dissipée par effet JOULE.

### 4. Pression de radiation

4.1.

$$\begin{aligned} \langle \vec{f}_v \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \left( \vec{\mathcal{I}}_2 \wedge \vec{B}_2^* \right) \\ &= \frac{\gamma_0}{2} \text{Re} \left( \vec{E}_2 \wedge \vec{B}_2^* \right) \end{aligned}$$

Or :

$$\vec{B}_2 = \frac{k'' \vec{e}_z \wedge \vec{E}_2}{\omega}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \langle \vec{f}_v \rangle &= \frac{\gamma_0}{2\delta\omega} \|\vec{E}_{02}\|^2 \vec{e}_z \\ &= \frac{\gamma_0}{2\delta\omega} \|\mathcal{I}\|^2 \|\vec{E}_{01}\|^2 \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

D'autre part, la densité volumique moyenne d'énergie de l'onde incidente est :

$$\langle e_i \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \|\vec{E}_{01}\|^2 + \frac{\|\vec{B}_{01}\|^2}{4\mu_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \|\vec{E}_{01}\|^2$$

Donc :

$$\langle \vec{f}_v \rangle = \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0 \delta \omega} \|\mathcal{I}\|^2 \langle e_i \rangle \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) \vec{e}_z$$

4.2. La force pressante est :

$$\begin{aligned} \langle \vec{F} \rangle &= \frac{S\gamma_0}{\varepsilon_0 \delta \omega} \|\mathcal{I}\|^2 \langle e_i \rangle \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) dz \vec{e}_z \\ &= \frac{S\gamma_0}{2\varepsilon_0 \omega} \|\mathcal{I}\|^2 \langle e_i \rangle \vec{e}_z \end{aligned}$$

La pression moyenne est :

$$\langle P \rangle = \frac{\langle |\vec{F}| \rangle}{S} = \frac{\gamma_0}{2\varepsilon_0 \omega} \|\mathcal{I}\|^2 \langle e_i \rangle$$

5.

5.1. Application numérique :

$$\delta \simeq 5 \mu m \quad , \quad k\delta = \frac{\omega}{c} \delta \simeq 10^{-4} \ll 1 \quad , \quad \underline{r} \simeq -1 \quad , \quad R \simeq 1 \quad \text{et} \quad T \simeq 0$$

L'onde est quasiment totalement réfléchie.

5.2.  $\delta = 0$  implique :

$$\underline{r} = -1 \quad , \quad R = 1 \quad \text{et} \quad T = 0$$

L'onde incidente est totalement réfléchie sur un métal parfait.

5.2. Cas réel :

$$\vec{E}_2 = \underline{\mathcal{I}} \vec{E}_{01} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 = \underline{\mathcal{I}} \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}_{01}}{\delta\omega} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)$$

Cas idéal :

$$\underline{\vec{E}}_2 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_2 = 0$$

5.4.

$$\begin{aligned} \underline{\vec{j}}_2 &= \gamma_0 \underline{\vec{E}}_2 \\ &= \gamma_0 \underline{\vec{E}}_{01} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) \end{aligned}$$

Pour  $z > 0$  et  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\underline{\vec{j}}_2 = \vec{0}$ . Par contre, si  $\delta \rightarrow 0$  et  $z = 0$ ,  $\underline{\vec{j}}_2$  tend vers  $\infty$ . Ce qui nous permet d'envisager une distribution surfacique de courant :

$$\underline{\vec{j}}_S = \int_0^\infty \underline{\vec{j}}_2 dz = \frac{2}{\mu_0 c} \underline{\vec{E}}_{01} \exp(-i\omega t)$$

5.5. Conditions aux limites du champ électrique, dans le cas d'un métal parfait, en  $z = 0$  :

$$\underline{\vec{E}}_1 + \underline{\vec{E}}'_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

Or :

$$\underline{\vec{E}}_1 \cdot \vec{e}_z = \underline{\vec{E}}'_1 \cdot \vec{e}_z = 0$$

Donc :

$$\sigma = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}}_{01} + \underline{\vec{E}}'_{01} = 0$$

D'où le coefficient de réflexion en amplitude est :

$$r = -1$$

Conditions aux limites du champ magnétique, dans le cas d'un métal parfait, en  $z = 0$  :

$$\underline{\vec{B}}_1 + \underline{\vec{B}}'_1 = -\mu_0 \underline{\vec{j}}_S \wedge \vec{e}_z \neq \vec{0}$$

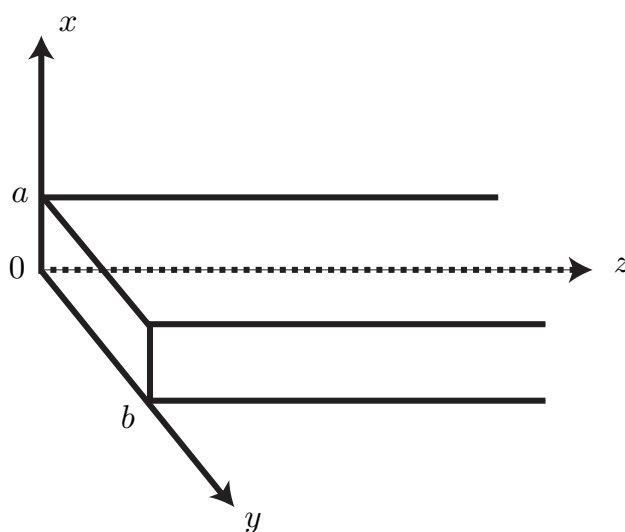


## Problème - 3

# Guide d'ondes rectangulaire

### 3.1 Énoncé

Quatre plans métalliques parfaitement conducteurs en  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  et  $y = b$ , délimitent un "guide d'ondes" de longueur infinie suivant  $Oz$ , de section droite rectangulaire et dont lequel règne le vide ;  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  désignent les vecteurs unitaires des axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ .



On se propose d'étudier la propagation, dans ce guide suivant la direction  $Oz$ , d'une onde électromagnétique monochromatique de pulsation  $\omega$ , dont le champ s'écrit :

$$\vec{E} = f(y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{e}_x$$

où  $f(y)$  désigne une fonction réelle de la variable  $y$ ,  $k_g$  est une constante positive.

On pose  $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$  ( $\lambda_g$  est la "longueur d'onde guidée") et  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$ .

#### 1. Structure de l'onde

1.1. Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction  $f(y)$ .

1.2. En utilisant les conditions que doit vérifier le champ  $\vec{E}$  sur les plans conducteurs  $y = 0$  et  $y = b$ , expliciter la fonction  $f(y)$  en montrant qu'il intervient un nombre entier  $n$  non nul (supposé positif). A chaque valeur de  $n$  correspond un mode de propagation. Décrire le type d'onde auquel on aboutit.

1.3. Calculer la densité surfacique de charges en  $x = 0$  et  $x = a$ .

- 1.4. Écrire les composantes du champ magnétique  $\vec{B}$ . Quelle est sa polarisation ?
- 1.5. Calculer les densités surfaciques de courants en  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  et  $y = b$ .
- 1.6. Exprimer  $k_g$  en fonction de  $\omega$ ,  $c$ ,  $n$  et  $b$ . En déduire  $\lambda_g$  en fonction de  $\lambda_0$ ,  $b$  et  $n$ . Montrer qu'il existe une fréquence de coupure  $f_c$  en dessous de laquelle il n'y a plus propagation.
- Application numérique :** Sachant que  $f_c = 2.5$  GHz pour  $n = 1$ , calculer  $b$ .
- 1.7. Exprimer les vitesses de phase  $v_\varphi$  et de groupe de l'onde en fonction de  $c$ ,  $n$  et du rapport  $\frac{f}{f_c}$  ( $f$  étant la fréquence de l'onde).
- Application numérique :** Calculer  $v_\varphi$  et  $v_g$  pour  $f = 2f_c$ .

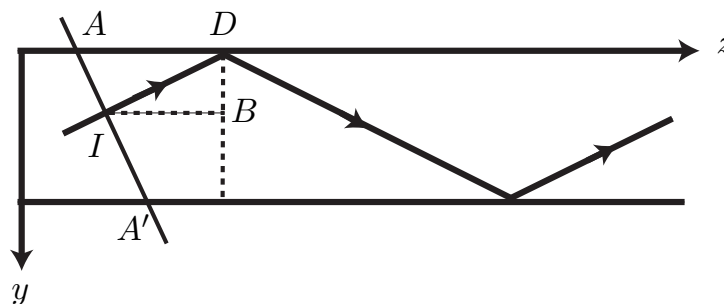
## 2. Transmission de l'énergie

- 2.1. Donner l'expression du vecteur de POYNTING  $\vec{\pi}$ .  
Quelle est la valeur moyenne temporelle  $\langle \vec{\pi} \rangle$  de ce vecteur ? Pouvait-on prévoir son sens vue la structure de l'onde ?  
En déduire la puissance moyenne  $P_m$  transmise par une section droite du guide d'ondes.
- 2.2. Calculer la valeur moyenne  $\langle u \rangle$  de la densité volumique de l'énergie électromagnétique.
- 2.3. A l'aide des résultats précédents, déduire la vitesse de propagation  $v_e$  de l'énergie. La comparer à  $v_\varphi$  et  $v_g$ .
- 2.4. Si les parois du guide d'ondes avaient une conductivité finie, quelle en serait la conséquence la plus importante ?

## 3. Réflexions internes

On se propose d'interpréter certains résultats démontrés ci-dessus en considérant que, dans le guide d'ondes, une onde électromagnétique, monochromatique, plane à polarisation rectiligne ( $\vec{E}$  parallèle à  $Ox$ ) se réfléchit tour à tour sur les parois métalliques parallèles au plan  $Oxz$ . Dans ces conditions l'onde définie à la question 1. résulte de la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchi dont les champs électriques s'écrivent :

$$\vec{E}_i = E_i^0 \sin(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{E}_r = E_r^0 \sin(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \vec{e}_x$$



- 3.1. Écrire les composantes des vecteurs d'ondes incidents  $\vec{k}_i$  et réfléchi  $\vec{k}_r$  en fonction de  $k_0$  et  $\alpha$ , angle d'incidence.  
Déterminer l'amplitude  $E_r^0$  en fonction de  $E_i^0$ .
- 3.2. Écrire le champ électrique  $\vec{E}$  de l'onde résultante de la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchi, en un point  $I$  donné. En identifiant l'expression obtenue et celle donnée en début d'énoncé, exprimer  $k_g$  en fonction de  $k_0$  et  $\alpha$  puis  $\lambda_g$  en fonction de  $\lambda_0$  et  $\alpha$ , puis donner la relation entre  $k_0$ ,  $\alpha$ ,  $n$  et  $b$ . Conclure.
- 3.3. Considérons sur la figure ci-dessus le tronçon d'onde oblique  $ID$  où  $I$  est un point quelconque et  $D$  est le point de l'axe où cette onde se réfléchit. A quelle vitesse ce trajet est-il parcouru par l'onde ?  
 $A$  est l'intersection du plan d'onde passant par  $I$  et de l'axe  $Oz$  et  $B$  est dans la même section droite du

guide que  $D$ . A quelles vitesses sont balayées les distances  $AD$  et  $IB$ ? Proposer une interprétation de  $v_\varphi$  et  $v_e$ .

### 3.2 Corrigé

1.

1.1. Dans le vide, l'équation de propagation du champ électrique s'écrit :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dy^2} + (k_0^2 - k_g^2) f = 0}$$

1.2. La relation caractéristique de l'équation ci-dessus est :

$$r^2 = k_g^2 - k_0^2$$

si  $k_g > k_0$ , on obtient la solution :

$$f(y) = A \exp\left(\sqrt{k_g^2 - k_0^2} y\right) + C \exp\left(-\sqrt{k_g^2 - k_0^2} y\right)$$

avec  $A$  et  $C$  sont deux constantes.

Le métal du guide étant parfait, la continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  s'écrit :

$$f(y=0) = 0 \quad \text{et} \quad f(y=b) = 0$$

d'où :

$$A + C = 0 \quad \text{et} \quad A \exp\left(\sqrt{k_g^2 - k_0^2} b\right) + C \exp\left(-\sqrt{k_g^2 - k_0^2} b\right) = 0$$

soit :

$$A = C = 0 \quad \Rightarrow \quad f(y) = 0$$

Donc, on aura un champ électrique nul, ce qui est en contradiction avec l'existence d'une onde électromagnétique dans le guide.

Si  $k_g < k_0$  on obtient :

$$f(y) = A' \cos\left(\sqrt{k_0^2 - k_g^2} y\right) + C' \sin\left(\sqrt{k_0^2 - k_g^2} y\right)$$

or  $f(0) = 0$  et  $f(b) = 0$ , donc :

$$A' = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{k_0^2 - k_g^2} b = n\pi$$

avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

En posant  $C' = E_n$ , il vient :

$$f(y) = E_n \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = E_n \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos(\omega t - k_g z) \vec{e}_x}$$

À  $z = \text{cte}$ , l'onde est stationnaire et "vibre sur place" avec une pulsation  $\omega$  et une amplitude  $E_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$ .

À  $y = \text{cte}$ , l'onde est monochromatique et progressive dans le sens des  $z$  croissants.

1.3. La relation de passage de  $\vec{E}$  donne, respectivement, en  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$\boxed{\sigma(x = 0) = \varepsilon_0 E_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - k_g z)} \quad \text{et} \quad \boxed{\sigma(x = a) = -\sigma(x = 0)}$$

1.4. L'équation de MAXWELL-FARADAY est :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

D'où :

$$\vec{B} = \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y(y, z) = \frac{k_g}{\omega} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - k_g z) \\ B_z(y, z) = \frac{n\pi}{b\omega} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(\omega t - k_g z) \end{cases}$$

Dans un plan  $x = \text{cte}$ , Le champ magnétique  $\vec{B}$  est polarisé elliptiquement.

1.5. La relation de passage en  $x = 0$  s'écrit :

$$B_y(y, z) \vec{e}_y + B_z(y, z) \vec{e}_z = \mu_0 \vec{j}_s(x = 0) \wedge \vec{e}_x$$

soit :

$$\boxed{\vec{j}_s(x = 0) = \left[ \frac{k_g}{\omega\mu_0} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - k_g z) \right] \vec{e}_z - \left[ \frac{n\pi}{b\omega\mu_0} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(\omega t - k_g z) \right] \vec{e}_y}$$

En  $x = a$  on a :

$$B_y(y, z) \vec{e}_y + B_z(y, z) \vec{e}_z = -\mu_0 \vec{j}_s(x = a) \wedge \vec{e}_x$$

$$\boxed{\vec{j}_s(x = a) = -\vec{j}_s(x = 0)}$$

En  $y = 0$  on a :

$$B_y(0, z) \vec{e}_y + B_z(0, z) \vec{e}_z = \mu_0 \vec{j}_s(y = 0) \wedge \vec{e}_y$$

$$\boxed{\vec{j}_s(y = 0) = \left[ \frac{n\pi}{b\omega\mu_0} E_n \sin(\omega t - k_g z) \right] \vec{e}_x}$$

En  $y = b$  on a :

$$B_y(b, z) \vec{e}_y + B_z(b, z) \vec{e}_z = -\mu_0 \vec{j}_s(y = b) \wedge \vec{e}_y$$

$$\boxed{\vec{j}_s(y = b) = -\left[ \frac{n\pi}{b\omega\mu_0} (-1)^n E_n \sin(\omega t - k_g z) \right] \vec{e}_x}$$

1.6. D'après 1.2., on a :

$$k_g = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$



Or :

$$k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad \text{et} \quad k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

D'où :

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2b}\right)^2}}$$

Comme  $k_g$  est réel :

$$\omega > \frac{n\pi c}{b} \Rightarrow \boxed{f > \frac{nc}{2b} = f_c}$$

AN :

$$b = 6 \text{ cm}$$

1.7.

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k_g} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} > c}$$

et

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk_g} = c\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} < c}$$

AN :

$$v_\varphi \simeq 3,5 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_g \simeq 2,6 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

2.

2.1.

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E}{\mu_0} (-B_z \vec{e}_y + B_y \vec{e}_z)$$

$$\vec{\pi} = \begin{cases} 0 \\ -\frac{n\pi}{\mu_0 b \omega} E_n^2 \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \sin(\omega t - k_g z) \\ \frac{k_g}{\mu_0 \omega} E_n^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \cos^2(\omega t - k_g z) \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{k_g}{2\mu_0 \omega} E_n^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \vec{e}_z}$$

La puissance moyenne :

$$P_m = \iiint \langle \vec{\pi} \rangle dx dy \vec{e}_z = \frac{ak_g}{2\mu_0 \omega} E_n^2 \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dy$$

$$\boxed{P_m = \frac{abk_g}{4\mu_0 \omega} E_n^2}$$

2.2. Densité volumique d'énergie :

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} (B_y^2 + B_z^2) \\
 &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left[ \frac{k_g^2}{\omega^2} E_n^2 \sin^2 \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \cos^2(\omega t - k_g z) + \frac{n^2 \pi^2}{b^2 \omega^2} E_n^2 \cos^2 \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \sin^2(\omega t - k_g z) \right]
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_n^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} + \frac{E_n^2}{4\mu_0 \omega^2} \left[ k_g^2 \sin^2 \left( \frac{n\pi}{b} y \right) + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cos^2 \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \right]$$

or :

$$\frac{1}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0$$

d'où :

$$\boxed{\langle u \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_n^2 \left[ \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \left( 1 + \frac{c^2}{\omega^2} k_g^2 \right) + \frac{c^2}{\omega^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cos^2 \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \right]}$$

2.3. Calculons, de deux manières différentes, l'énergie moyenne  $dW_{em}$  traversant une section droite du guide, entre l'instant  $t$  et  $t + dt$  :

i- D'une part, on a :

$$dW_{em} = P_m dt$$

$$dW_{em} = \frac{abk_g}{4\mu_0 \omega} E_n^2 dt \quad (1)$$

ii- D'autre part, cette énergie est égale aussi à l'énergie localisée dans le volume dont la base est la section droite du guide et de longueur  $dz = v_e dt$  :

$$\begin{aligned}
 dW_{em} &= \int_0^a \int_0^b \langle u \rangle dx dy v_e dt \\
 &= \int_0^a \int_0^b \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_n^2 \left[ \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \left( 1 + \frac{c^2}{\omega^2} k_g^2 \right) + \frac{c^2}{\omega^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cos^2 \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \right] dx dy v_e dt \\
 &= \frac{ab}{8}\varepsilon_0 E_n^2 \left[ 1 + \frac{c^2}{\omega^2} \left( k_g^2 + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \right] v_e dt
 \end{aligned}$$

or :

$$\left( k_g^2 + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) = \frac{\omega^2}{c^2}$$

d'où :

$$dW_{em} = \frac{ab}{4}\varepsilon_0 E_n^2 v_e dt \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent la vitesse de propagation de l'énergie :

$$\boxed{v_e = c^2 \frac{k_g}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} = v_g}$$

**2.4.** Dans ce cas il y aura, à l'intérieur du métal réel, un courant volumique non nul engendrant une dissipation d'énergie et donc une atténuation de l'onde électromagnétique le long du guide.

**3.**

**3.1.** L'angle d'incidence  $\alpha$  étant égal à l'angle réfléchi, d'où :

$$\vec{k}_i = -k_0 \cos \alpha \vec{e}_y + k_0 \sin \alpha \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{k}_r = k_0 \cos \alpha \vec{e}_y + k_0 \sin \alpha \vec{e}_z$$

La continuité de la composante tangentielle du champ électrique en  $y = 0$ , donne :

$$(E_i^0 + E_r^0) \sin(\omega t - k_0 z \sin \alpha) = 0, \quad \forall t \text{ et } z$$

D'où :

$$\boxed{E_r^0 = -E_i^0}$$

**3.2.** Le champ total est :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_i + \vec{E}_r \\ &= E_i^0 [\sin(\omega t + k_0 y \cos \alpha - k_0 z \sin \alpha) - \sin(\omega t - k_0 y \cos \alpha - k_0 z \sin \alpha)] \vec{e}_x \\ &= 2E_i^0 \sin(k_0 y \cos \alpha) \cos(\omega t - k_0 z \sin \alpha) \vec{e}_x \end{aligned}$$

Or l'expression de  $\vec{E}$  trouvé dans au début de l'énoncé (1.2) était :

$$\vec{E} = E_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - k_g z) \vec{e}_x$$

Par identification des deux expressions de  $\vec{E}$  ci-dessus, on trouve :

$$k_g = k_0 \sin \alpha \quad \text{et} \quad k_0 \cos \alpha = \frac{n\pi}{b}$$

donc :

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sin \alpha}$$

D'après ce qui précède :

$$k_g^2 = k_0^2 \sin^2 \alpha = k_0^2 (1 - \cos^2 \alpha) = k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

On retrouve donc la relation demandée à la question **1.6.** entre  $k_g$ ,  $k_0$ ,  $n$  et  $b$ .

**3.3.** Le trajet  $ID$  est parcouru, dans le vide, à la vitesse  $c$  :

Soit  $\tau$  la durée mise par l'onde pour aller, dans le vide, du point  $I$  au point  $D$  :

$$ID = c\tau$$

D'autre part :

$$AD = \frac{ID}{\sin \alpha} = \frac{c\tau}{\sin \alpha}$$

or :

$$\sin \alpha = \frac{k_g}{k_0} = \frac{k_g \omega}{\omega k_0} = \frac{c}{v_\varphi}$$

D'où :

$$AD = \varphi\tau$$

$AD$  est donc parcouru à la vitesse de phase.

$$IB = ID \sin \alpha = v_g \tau$$

$IB$  est parcouru à la vitesse de groupe.

**Interprétation de  $v_\varphi$  et  $v_e$  :**

$v_\varphi$  : la vitesse de "déplacement" des plans de phase.

$v_e$  : la vitesse de "déplacement" selon la direction moyenne de propagation (ie, celui du vecteur de POYNTING).

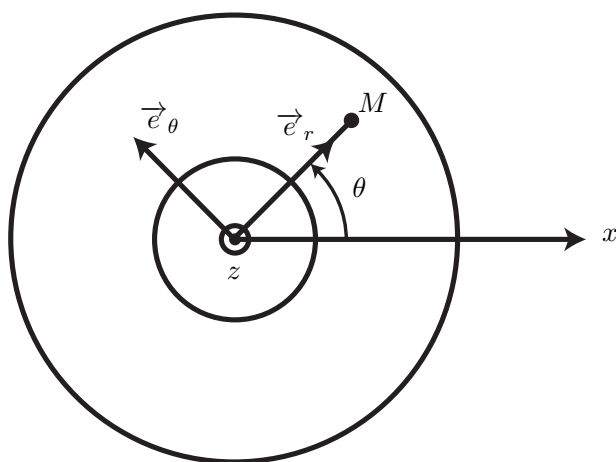
## Problème - 4

# Étude d'un câble coaxial

### 4.1 Enoncé

Un câble coaxial est constitué par deux conducteurs cylindriques supposés parfaits ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ), de même axe  $Oz$ , de rayons  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ) et de longueur infiniment grande. De l'air, assimilé au vide quant à ses propriétés électromagnétiques, règne dans l'espace entre les conducteurs.

Un point  $M$  de l'espace considéré est repéré par ses coordonnées cylindriques dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . Le problème aborde l'étude de la propagation guidée d'ondes électromagnétiques le long de l'axe  $Oz$  entre les deux conducteurs.



Ces ondes sont progressives monochromatiques de pulsation  $\omega$  :

$$\vec{E} = \vec{E}_0(r, \theta) \exp i(\omega t - \beta z) \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_0(r, \theta) \exp i(\omega t - \beta z)$$

et leur recherche se limite aux modes TEM (Transverse Electro-Magnétique) pour lesquels  $E_{0z} = 0$  et  $B_{0z} = 0$ .

$\vec{E}_0$  et  $\vec{B}_0$  sont réels.

1. Montrer que :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 &= \vec{0} & \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0 &= \vec{0} \\ \vec{e}_z \wedge \beta \vec{E}_0 &= \omega \vec{B}_0 & \vec{e}_z \wedge \beta \vec{B}_0 &= -\omega \frac{\vec{E}_0}{c^2} \end{aligned} \quad \text{et}$$

On donne :

$$\vec{\nabla} \wedge (f \vec{A}) = f \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{\nabla} f \wedge \vec{A}$$

- 2.1. Déterminer la constante de propagation  $\beta$  et en déduire une relation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$ . Commenter.
- 2.2. Déterminer les vitesses de phase  $v_\varphi$  et de groupe  $v_g$ .
- 2.3. Montrer qu'il existe un potentiel  $V(r, \theta)$  tel que  $\vec{E}_0 = -\vec{\nabla}V$  et en déduire l'équation vérifiée par  $V$  dans l'espace interconducteur.
- 2.4. Soient  $V_1$  et  $V_2$  ( $V_1 > V_2$ ) les potentiels des deux conducteurs ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) dans un plan de section droite. Justifier la recherche d'un potentiel indépendant de  $\theta$  et calculer  $V(r)$ .
- 2.5. Déterminer dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , les expressions des composantes  $\vec{E}_0$  et  $\vec{B}_0$ , et en déduire celles des champs  $\vec{E}(r, z, t)$  et  $\vec{B}(r, z, t)$ .
- 3.1. Donner l'expression de la valeur moyenne temporelle du vecteur de POYNTING  $\langle \vec{\pi} \rangle$  et son orientation ; en déduire la moyenne temporelle de la puissance  $\langle P \rangle$  transmise par une section droite du câble.
- 3.2. Si  $a, b$  et la valeur maximale  $E_M$  de la norme du champ électrique sont imposés, déterminer la puissance moyenne  $\langle P \rangle$  pouvant être transmise.

**Application numérique :** Calculer  $P_M$  si  $a = 2,4$  mm ;  $b = 8,8$  mm ;  $E_M = 3$  kV.cm<sup>-1</sup>.

- 4.1. Montrer qu'en tout point de la surface du conducteur ( $C_1$ ), existe une densité de courant surfacique :

$$\vec{j}_{S1} = \vec{J}_1 \exp i(\omega t - \beta z)$$

dont l'amplitude est donnée par :

$$\vec{J}_1 = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{B}_0(r = a)}{\mu_0}$$

Calculer l'intensité du courant sur le conducteur ( $C_1$ ), on exprimera son amplitude  $I_1$  en fonction de  $V_1, V_2, a$  et  $b$ .

- 4.2. Reprendre la question précédente pour l'appliquer au conducteur ( $C_2$ ). Comparer  $i_2$  et  $i_1$  et commenter.
- 4.3. Déterminer les densités surfaciques  $\underline{\sigma}_1(z, t)$  et  $\underline{\sigma}_2(z, t)$  sur les conducteurs ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) en fonction de l'onde de tension :

$$v(z, t) = (V_1 - V_2) \exp i(\omega t - \beta z)$$

En déduire leurs charges linéiques  $\underline{\lambda}_1$  et  $\underline{\lambda}_2$  en fonction de  $v(z, t)$  et  $\frac{q}{b}$ . Commentaire.

- 5.1. En considérant que l'approximation des régimes quasi-stationnaires est réalisée dans un tronçon élémentaire de câble, déterminer l'énergie magnétique contenue dans une longueur  $dz$  de ce câble, et en déduire son inductance propre linéique  $L$ .

- 5.2. Déterminer l'énergie électrique contenue dans une longueur  $dz$  de ce câble, et en déduire son capacité linéique  $\Gamma$  ?

Quelle relation simple lie  $L$  et  $\Gamma$  ?

**Application numérique :** Calculer  $L$  et  $\Gamma$  si  $a = 2,4$  mm et  $b = 8,8$  mm.

- 6.1. Quelle est l'expression de l'impédance caractéristique :

$$Z_c = \frac{v(z, t)}{i_1(z, t)}$$

**Application numérique :** Calculer  $Z_c$  avec les valeurs de  $a$  et  $b$  précédentes.

Donner l'expression simple de  $Z_c$  en fonction de  $L$  et  $\Gamma$ .

- 6.2. Calculer par les méthodes de l'électrocinétique la puissance moyenne  $\langle P' \rangle$  transportée par le câble et la comparer à  $\langle P \rangle$ , puissance moyenne électromagnétique déterminée à la question 3.1.

7. Que peut-on prévoir qualitativement sur la propagation dans un câble réel dont les conducteurs ne sont pas tout à fait parfaits et dont l'espace interconducteur n'est évidemment pas du vide ?

## 4.2 Corrigé

1. L'équation de MAXWELL-FARADAY s'écrit :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 - i\beta \vec{e}_z \wedge \vec{E}_0 = -i\omega \vec{B}_0$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{e}_z \wedge \beta \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$$

De même, l'équation de MAXWELL-AMPÈRE donne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0 = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{e}_z \wedge \beta \vec{B}_0 = -\omega \frac{\vec{E}_0}{c^2}$$

2.1. On a :

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{e}_z \wedge \beta \vec{E}_0}{\omega} \quad \text{et} \quad \vec{e}_z \wedge \beta \vec{B}_0 = -\omega \frac{\vec{E}_0}{c^2}$$

D'où :

$$\vec{e}_z \wedge \beta \frac{\vec{e}_z \wedge \beta \vec{E}_0}{\omega} = -\omega \frac{\vec{E}_0}{c^2}$$

Or

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad \text{et} \quad E_{0z} = \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_z = 0$$

ce qui donne, pour une propagation selon  $z$  croissant :

$$\beta = \frac{\omega}{c}$$

Comme :

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{e}_z \wedge \beta \vec{E}_0}{\omega}$$

alors :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c}$$

L'onde TEM a la structure d'une onde localement plane se propageant dans le vide.

2.2. Vitesse de phase et vitesse de groupe :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = c \quad \text{et} \quad v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = c$$

2.3. Puisque

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 = \vec{0},$$

il existe un potentiel  $V(r, \theta)$  tel que :

$$\vec{E}_0 = -\vec{\nabla} V$$

L'équation de MAXWELL-GAUSS donne :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot [\vec{E}_0 \exp i(\omega t - \beta z)] = 0$$

Or :

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{a}) = f \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{\nabla} f \cdot \vec{a}$$

d'où :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 - i\beta \vec{e}_z \cdot \vec{E}_0 = 0$$

et puisque  $E_{0z} = 0$  :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = -\Delta V = 0$$

Donc :

$$\Delta V = 0$$

**2.4.** Le câble est invariant par rotation autour de  $Oz$  puisque  $V(r = a, \theta) = V_1$  et  $V(r = b, \theta) = V_2$  quelque soit  $\theta$ , d'où  $V$  ne dépend que de  $r$ .

On a donc :

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

ce qui donne :

$$V = A \ln r + B$$

$A$  et  $B$  sont deux constantes d'intégration.

d'où :

$$V_1 = A \ln a + B \quad \text{et} \quad V_2 = A \ln b + B$$

soit :

$$V = \frac{V_2 - V_1}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{r}{a} + V_1$$

**2.5.** Expressions de  $\vec{E}_0$  et  $\vec{B}_0$  :

$$\vec{E}_0 = -\vec{\nabla} V = \frac{V_1 - V_2}{r \ln \frac{b}{a}} \vec{e}_r$$

et :

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}_0}{c} = \frac{V_1 - V_2}{c r \ln \frac{b}{a}} \vec{e}_\theta$$

d'où :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} &= \frac{V_1 - V_2}{r \ln \frac{b}{a}} \exp i(\omega t - \beta z) \vec{e}_r \\ \underline{\vec{B}} &= \frac{V_1 - V_2}{c r \ln \frac{b}{a}} \exp i(\omega t - \beta z) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

**3.1.** Valeur moyenne du vecteur de POYNTING :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\pi} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c r^2} \left( \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}} \right)^2 \vec{e}_z \end{aligned}$$

$\langle \vec{\pi} \rangle$  est dirigé dans le sens de la propagation de l'onde.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} \rangle &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \langle \vec{\pi} \rangle r dr d\theta \vec{e}_z \\ &= \frac{\pi}{\mu_0 c} \frac{(V_1 - V_2)^2}{\ln \frac{b}{a}} \end{aligned}$$



En absence de dissipation  $\langle \mathcal{P} \rangle$  est indépendante de  $z$ .

**3.2.** La norme du champ électrique est :

$$E = \frac{V_1 - V_2}{r \ln \frac{b}{a}}$$

$E$  est maximal pour  $r = a$  :

$$E_M = \frac{V_1 - V_2}{a \ln \frac{b}{a}}$$

et on a :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\pi a^2}{\mu_0 c} \ln \frac{b}{a} E_M^2$$

Application numérique :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = 5,6 \text{ kW}$$

**4.1.** Conditions aux limites ( $C_1$  étant un conducteur parfait) :

$$\begin{aligned} \vec{B}(r = a) &= \mu_0 \vec{j}_{S_1} \wedge \vec{e}_r \\ \vec{e}_r \wedge \vec{B}(r = a) &= \mu_0 \vec{e}_r \wedge (\vec{j}_{S_1} \wedge \vec{e}_r) \end{aligned}$$

Or :

$$\vec{j}_{S_1} \cdot \vec{e}_r = 0$$

d'où :

$$\vec{j}_{S_1} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{B}(r = a)}{\mu_0}$$

Donc :

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{B}_0(r = a)}{\mu_0} \\ &= \frac{V_1 - V_2}{\mu_0 c a \ln \frac{b}{a}} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{i}_1 &= \int_0^{2\pi} \vec{j}_{S_1} a d\theta \vec{e}_z \\ &= \frac{2\pi}{\mu_0 c} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}} \exp i(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

D'où :

$$I_1 = \|\dot{i}_1\| = \frac{2\pi}{\mu_0 c} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}}$$

$\dot{i}_1$  est une fonction de  $z$  et  $t$ , on peut donc parler d'une onde de courant.

**4.2.** De même que la question 4.1. :

$$\begin{aligned} \vec{j}_{S_2} &= -\frac{V_1 - V_2}{\mu_0 c b \ln \frac{b}{a}} \exp i(\omega t - \beta z) \vec{e}_z \\ \vec{J}_2 &= -\frac{V_1 - V_2}{\mu_0 c b \ln \frac{b}{a}} \vec{e}_z \\ I_2 &= -I_1 \end{aligned}$$

$i_1$  et  $i_2$  sont en opposition de phase, ce qui assure le "retour" du courant.

**4.3.** Conditions aux limites :

En  $r = a$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}(r = a) &= \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \vec{e}_r \\ \sigma_1 &= \frac{\epsilon_0}{a} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}} \exp i(\omega t - \beta z) \\ \underline{\sigma}_1 &= \frac{\epsilon_0}{a \ln \frac{b}{a}} v(z, t) \end{aligned}$$

En  $r = b$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}(r = b) &= \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \vec{e}_r \\ \sigma_2 &= -\frac{\epsilon_0}{b} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}} \exp i(\omega t - \beta z) \\ \underline{\sigma}_2 &= -\frac{\epsilon_0}{b \ln \frac{b}{a}} v(z, t) \end{aligned}$$

Calcul des densité linéiques  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  :

Un anneau du conducteur ( $C_1$ ) d'épaisseur  $dz$ , porte la charge :

$$\begin{aligned} dq_1 &= \int_0^{2\pi} \sigma_1 a d\theta dz \\ &= \sigma_1 2\pi a dz \end{aligned}$$

La densité linéique de ( $C_1$ ) est :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{dq_1}{dz} = 2\pi a \sigma_1 \\ \lambda_1 &= \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} v \end{aligned}$$

De même :

$$\lambda_2 = -\frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} v$$

Puisque  $\lambda_1 = -\lambda_2$ , les deux conducteurs se comportent, sur un élément  $dz$ , comme un condensateur en régime variable.

**5.1.** En notation réelle :

$$\vec{B} = \frac{V_1 - V_2}{rc \ln \frac{b}{a}} \cos(\omega t - \beta z) \vec{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} d^3u_m &= \frac{B^2}{2\mu_0} r dr d\theta dz \\ du_m &= \frac{\pi}{\mu_0 c^2} \frac{(V_1 - V_2)^2}{\ln \frac{b}{a}} \cos^2(\omega t - \beta z) dz \end{aligned}$$

or :

$$du_m = \frac{1}{2}L dz i_1^2$$

et puisque l'A.R.Q.S est valable dans un tronçon de longueur  $dz$ , alors  $i_1$  a même valeur entre  $z$  et  $z + dz$  :

$$i_1 = \frac{2\pi}{\mu_0 c} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}} \cos(\omega t - \beta z)$$

donc :

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

**5.2.** L'énergie électrique contenue dans une longueur  $dz$  du câble est :

$$\begin{aligned} du_e &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 r dr d\theta dz \\ &= \pi \varepsilon_0 \frac{(V_1 - V_2)^2}{\ln \frac{b}{a}} \cos^2(\omega t - \beta z) dz \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} du_e &= \frac{1}{2} \Gamma dz v^2 \\ &= \frac{1}{2} \Gamma dz (V_1 - V_2)^2 \cos^2(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

D'où :

$$\Gamma = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

On remarque que :

$$L\Gamma = \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

Application numérique :  $L \simeq 0,26 \mu\text{H.m}^{-1}$  et  $\Gamma \simeq 42,8 \text{ pF.m}^{-1}$ .

**6.1.** On a :

$$\begin{aligned} \underline{v} &= (V_1 - V_2) \exp i(\omega t - \beta z) \\ \dot{i}_1 &= \frac{2\pi}{\mu_0 c} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}} \exp i(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

donc :

$$Z_c = \frac{v}{\dot{i}_1} = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Application numérique :  $Z_c = 78 \Omega$ .

On a :

$$Z_c = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

donc :

$$Z_c = cL$$

or :

$$c = \frac{1}{\sqrt{L\Gamma}}$$

d'où :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

6.2.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}' \rangle &= \frac{1}{2} \mathcal{R}e(\underline{v} \cdot \underline{i}_1^*) \\ &= \frac{1}{2} (V_1 - V_2) I_1 \end{aligned}$$

or :

$$I_1 = \frac{2\pi}{\mu_0 c} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}}$$

d'où :

$$\langle \mathcal{P}' \rangle = \frac{\pi}{\mu_0 c \ln \frac{b}{a}} (V_1 - V_2)^2$$

Soit donc :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \mathcal{P}' \rangle$$

7. Il y aura dissipation d'énergie, donc atténuation de l'onde le long du câble coaxial.

## Problème - 5

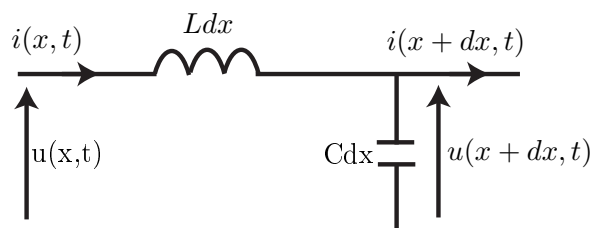
# Propagation dans une ligne électrique

### 5.1 Énoncé

#### Partie 1 : Onde de courant dans une ligne électrique

Une ligne électrique sans pertes est caractérisée par son coefficient d'inductance propre linéique et sa capacité linéique, notées respectivement  $L$  et  $\Gamma$ .

À l'abscisse  $x$  et à l'instant  $t$ , on désigne par  $i(x, t)$  l'intensité du courant dans la ligne.



1.1. Établir les deux équations différentielles liant  $u(x, t)$  et  $i(x, t)$ .

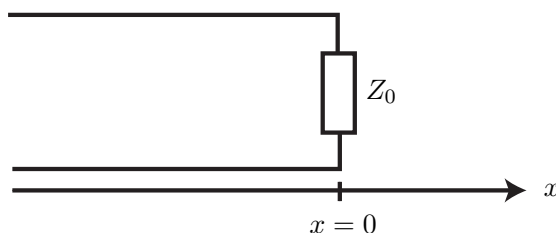
1.2. On cherche des solutions de ces équations représentant une onde de courant de la forme :

$$\underline{i}(x, t) = I_0(x) \exp(j\omega t)$$

1.2.1. Déterminer, dans ce cas, la forme la plus générale de  $\underline{i}(x, t)$  et  $\underline{u}(x, t)$ .

1.2.2. Exprimer en fonction des caractéristiques de la ligne la vitesse de phase  $v_\varphi$  de cette onde.

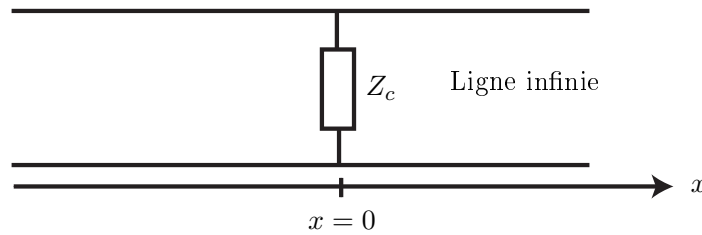
1.3. Une ligne, située dans l'espace  $x < 0$ , s'étend jusqu'en  $x = 0$ , où elle est fermée sur une impédance  $Z_0$ .



1.3.1. Montrer qu'il existe une valeur  $Z_c$  de  $Z_0$ , caractéristique de la ligne, pour laquelle le rapport  $u/i$  devienne indépendante de  $x$ . On exprimera  $Z_c$  en fonction de  $L$  et  $\Gamma$ .

1.3.2. Exprimer, dans ce cas, la puissance moyenne transportée par l'onde à l'abscisse  $x$ . Que se passe-t-il physiquement en  $x = 0$  ?

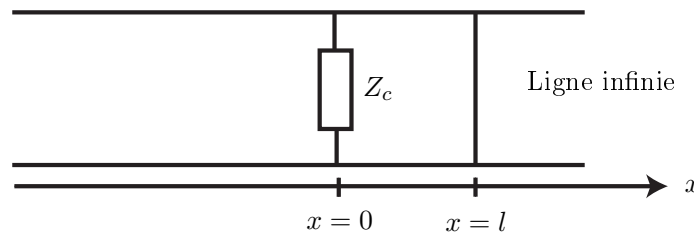
1.4. La ligne s'étend maintenant jusqu'à  $x = \infty$  mais on branche encore l'impédance  $Z_0 = Z_c$  en parallèle sur la ligne à l'abscisse  $x = 0$ . On s'intéresse à l'onde de courant dans la partie  $x < 0$ .



1.4.1. Montrer que cette onde "voit", en  $x = 0$ , une impédance  $Z_1$  qui s'exprime très simplement en fonction de  $Z_c$ .

1.4.2. Définir et calculer le coefficient de réflexion en courant et en tension de l'onde en  $x = 0$ .

On place enfin sur la ligne précédente, un court-circuit en parallèle à l'abscisse  $x = l$ .



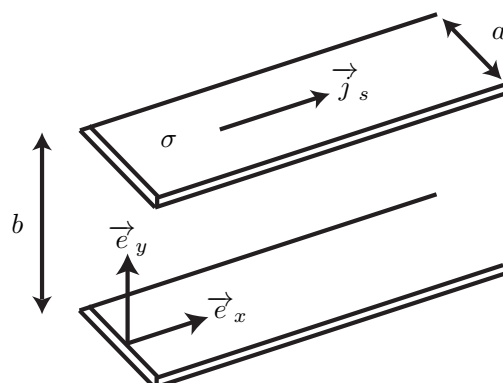
1.5.1. Quelle est la forme de l'onde de courant entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = l$  ?

1.5.2. Montrer qu'il existe une valeur minimale  $l_0$  de  $l$  telle que le courant dans la partie positive de la ligne s'annule en  $x = 0$ . On exprimera  $l_0$  en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  dans la ligne.

1.5.3. En déduire alors le coefficient de réflexion de courant et de tension, et la forme de l'onde dans la partie négative de la ligne.

### Partie 2 : Champ électromagnétique dans la ligne

La ligne précédente est constituée de deux rubans conducteurs parfaits, de faible épaisseur, de largeur  $a$ , distants de  $b$ , l'espace entre les rubans étant vide. Les rubans sont parcourus par des courants de densités surfaciques  $\vec{j}_s = j_s(x, t) \vec{e}_x$  et  $-\vec{j}_s$ , et présentent sur leur faces en regard des densités surfaciques de charges  $\sigma(x, t)$  et  $-\sigma(x, t)$ .



On étudie les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  uniquement dans l'espace situé entre les rubans et on suppose que ces champs en un point ne dépendent que de l'abscisse  $x$  du point considéré et de l'instant  $t$  (on néglige donc tout effet de bord).

2.1. Exprimer en fonction des constantes électromagnétiques du vide  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  et des densités  $j_s$  et  $\sigma$ , les champs  $\vec{E}(x, t)$  et  $\vec{B}(x, t)$  dans l'espace vide entre les rubans.

On considère à nouveau, dans toute la suite de cette partie 2, une onde de courant dans la ligne, d'intensité de la forme  $\underline{i}(x, t) = I_0 \exp j(\omega t - kx)$  en notation complexe, où  $k$  est une constante positive et  $I_0$  une constante réelle.

**2.2.** À partir des équations de MAXWELL, exprimer deux relations liant  $\underline{\sigma}(x, t)$  et  $\underline{i}(x, t)$ . En déduire la vitesse de phase de l'onde et montrer que la structure de l'onde est celle d'une onde plane dans le vide illimité.

**2.3.** Déterminer l'énergie magnétique  $d\varepsilon_B$  d'une tranche d'épaisseur  $dx$  de la ligne. En déduire le coefficient d'inductance propre linéique  $L$  de la ligne.

**2.4.** Déterminer l'énergie électrique  $d\varepsilon_E$  de la même tranche d'épaisseur  $dx$ . En déduire la capacité linéique  $\Gamma$  de la ligne.

**2.5.** Déduire des résultats précédents l'accord entre les questions **1.2.2.** et **2.2** quant à la vitesse de phase  $v_\varphi$ .

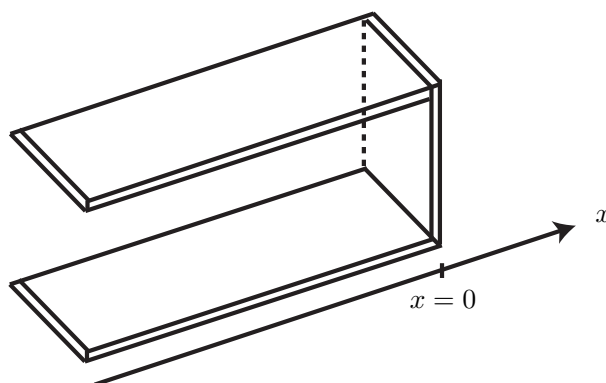
**2.6.** On cherche un potentiel vecteur entre les rubans sous forme :

$$\vec{A} = A(y, z) \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_x$$

**2.6.1** Justifier la direction du potentiel vecteur.

**2.6.2** Expliciter  $A(y, z)$  en fonction de  $a, \mu_0, y$  et  $I_0$ . En déduire le potentiel scalaire entre les rubans.

**2.6.3.** Exprimer le champ  $\vec{E}$  en fonction des dimensions de la ligne et de la tension  $\underline{u}(x, t)$  entre les rubans. On désire fermer la ligne sur son impédance itérative  $Z_c$  en introduisant entre les rubans, à l'abscisse  $x = 0$ , une plaque conductrice de résistivité  $\rho$ , d'épaisseur  $e$ , de largeur  $a$  et de longueur  $b$ .



On supposera, dans cette question, que l'épaisseur  $e$  est suffisamment faible pour qu'on puisse admettre que le courant traversant la plaque soit réparti de manière uniforme.

**2.7.1.** Déterminer  $Z_c$  en fonction de  $\rho, e, a$  et  $b$ . En déduire la résistance  $R_c$  d'un carré de la plaque, de côté quelconque.

**2.7.2.** Exprimer  $R_c$  en fonction des seules constantes  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  du vide. On appellera impédance adaptée au vide, cette grandeur  $R_c$  dont on donnera la valeur numérique.

**2.7.3.** On veut réaliser cette plaque avec :

- du cuivre de résistivité  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$
- du carbone de résistivité  $\rho = 3,5 \cdot 10^{-3} \Omega \cdot m$

Quel devrait être, dans ce cas, l'épaisseur  $e$  de la plaque? Commenter.

**2.8.** Déterminer le vecteur de POYNTING associé à l'onde électromagnétique entre les rubans. Quelle est la puissance moyenne transportée par l'onde? la ligne étant fermée par la plaque d'impédance  $Z_c$ , Que se passe-t-il quand l'onde arrive en  $x = 0$ ?

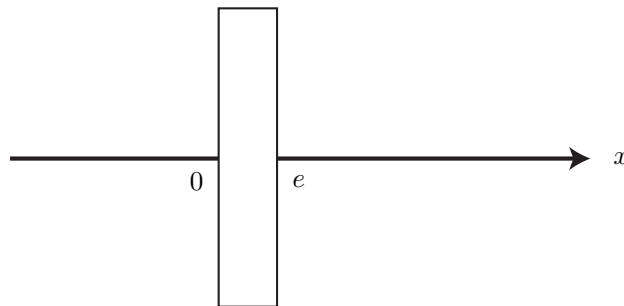
### Partie 3 : Réflexion d'une onde électromagnétique sur une plaque conductrice.

On considère à présent une onde électromagnétique plane dans le vide illimité, de pulsation  $\omega$ , qui a des caractéristiques identiques à celles étudiées à la partie 2. On écrira donc les champs de cette onde :

$$\vec{E}_i = E_0 \exp j\omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \exp j\omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \vec{e}_z$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

À l'abscisse  $x = 0$ , on place une plaque conductrice plane infinie, orthogonale à  $\vec{e}_x$ , de constantes électromagnétiques égales à celles du vide  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$ , d'épaisseur  $e$  et de résistivité  $\rho$  identiques à celles calculées dans la partie précédente : un carré de côté quelconque de la plaque a donc la résistance  $R_c$  "adaptée au vide".



**3.1.** Expliquer qualitativement pourquoi il existera pourtant une onde réfléchie sur la plaque. En s'inspirant du résultat de la question **1.4.2.**, pouvez-vous indiquer sans calculs quel sera le coefficient de réflexion du champ électrique et celui du champ magnétique sur la plaque ?

On se propose de retrouver ce résultat directement à partir de l'étude des ondes dans le vide et la plaque. Pour ce faire, on rappelle que, moyennant l'approximation  $\rho\epsilon_0\omega \ll 1$  supposée ici vérifiée, le champ électrique dans la plaque conductrice est de la forme :

$$\vec{E}_p = \left[ A_1 \exp \left( -\frac{x}{\delta} \right) \exp j \left( \omega t - \frac{x}{\delta} \right) + A_2 \exp \left( \frac{x}{\delta} \right) \exp j \left( \omega t + \frac{x}{\delta} \right) \right] \vec{e}_y$$

où  $A_1$  et  $A_2$  sont des constantes déterminées par les conditions aux limites de la plaque et  $\delta$  une distance caractéristique du conducteur et de l'onde, appelée profondeur de peau et qui vaut :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0\omega}}$$

**3.2.** Expliquer d'où provient l'approximation indiquée et préciser le champ magnétique  $\vec{B}_p$  associée dans la plaque. Justifier l'expression de  $\delta$ .

On désigne par  $(\vec{E}_r, \vec{B}_r)$  l'onde réfléchie par la plaque et  $(\vec{E}_t, \vec{B}_t)$  l'onde transmise dans l'espace  $x > e$ .

On écrira  $\vec{E}_r$  et  $\vec{E}_t$  sous la forme :

$$\vec{E}_r = \alpha E_0 \exp j\omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{E}_t = \tau E_0 \exp j\omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \vec{e}_y$$

**3.3.** En utilisant les relations de passage en  $x = 0$  et  $x = e$ , déterminer quatre relations liant  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $A_1$  et  $A_2$ .

**3.4.** Montrer que l'approximation précédente implique également qu'on ait  $e \ll \delta$ . En déduire, après simplification des relations de passage, la valeur de  $\alpha$ .

**3.5.** Par analogie avec la question **1.5.2.**, que faudrait-il placer, et à quel endroit, pour annuler l'onde réfléchie ?



## 5.2 Propagation dans une ligne électrique

### Partie 1 : Onde de courant dans une ligne électrique

#### 1.1. Loi des mailles :

$$u(x, t) - u(x + dx, t) = Ldx \frac{\partial i}{\partial t}$$

d'où :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (5.1)$$

Loi des noeuds :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + Cdx \frac{\partial u}{\partial t}$$

d'où :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.2)$$

Les équations de D'ALEMBERT sont déduites de (1) et (2) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - L\Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

#### 1.2.

1.2.1. En remplaçant  $i(x, t)$  par son expression dans l'équation de D'ALEMBERT de l'onde de courant, on trouve :

$$\frac{d^2 I_0}{dx^2} - L\Gamma \omega^2 I_0 = 0$$

d'où :

$$I_0(x) = I_1 \exp -i(kx) + I_2 \exp i(kx)$$

avec :

$$k = \omega \sqrt{L\Gamma} \quad , \quad I_1 \quad \text{et} \quad I_2 \quad \text{sont deux constantes.}$$

Donc :

$$\underline{i}(x, t) = I_1 \exp i(\omega t - kx) + I_2 \exp i(\omega t + kx) \quad (5.3)$$

(2) et (3) donne :

$$\underline{u}(x, t) = \frac{k}{\omega\Gamma} [I_1 \exp i(\omega t - kx) - I_2 \exp i(\omega t + kx)]$$

1.2.2. La vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{L\Gamma}}$$

#### 1.3.

1.3.1 Le rapport  $u/i$  se met en général sous la forme :

$$\frac{\underline{u}(x, t)}{\underline{i}(x, t)} = \frac{\frac{k}{\omega\Gamma} I_1 \exp i(\omega t - kx) - \frac{k}{\omega\Gamma} I_2 \exp i(\omega t + kx)}{I_1 \exp i(\omega t - kx) + I_2 \exp i(\omega t + kx)}$$

Ce rapport sera indépendant de  $x$  si  $I_2 = 0$  ( $I_1$  ne peut pas être nul, puisque la source se trouve à gauche), donc :

$$\frac{\underline{u}(x, t)}{\underline{i}(x, t)} = \frac{\underline{u}(0, t)}{\underline{i}(0, t)} = Z_c = \frac{k}{\omega\Gamma}$$

or :

$$\frac{k}{\omega} = \frac{1}{v_\varphi} = \sqrt{L\Gamma}$$

donc :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{\Gamma}}$$

### 1.3.2.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}[\underline{i}(x, t) \cdot \underline{u}^*(x, t)] \\ &= \frac{1}{2} Z_c I_1^2 \end{aligned}$$

On remarque que la puissance moyenne transportée par l'onde est totalement dissipée par effet joule dans l'impédance  $Z_c$ . Ce qui confirme l'absence d'une onde se propageant dans le sens des  $x$  décroissants.

### 1.4.

1.4.1. Pour  $x > 0$ , la ligne est infinie. Il s'y propage donc une onde dans le sens des  $x$  croissants telle que

$$\frac{\underline{u}(x, t)}{\underline{i}(x, t)} = \frac{\underline{u}(0^+, t)}{\underline{i}(0^+, t)} = Z_c$$

d'où :

$$Z_1 = \frac{Z_c}{2}$$

1.4.2. Pour  $x < 0$  :

$$\underline{i}(x, t) = I_1 \exp i(\omega t - kx) + I_2 \exp i(\omega t + kx) \quad \text{et} \quad \underline{u}(x, t) = Z_c [I_1 \exp i(\omega t - kx) - I_2 \exp i(\omega t + kx)]$$

d'où, par définition du coefficient de réflexion de courant et de tension, en  $x = 0^-$  :

$$r_I = \frac{I_2}{I_1} \quad \text{et} \quad r_u = \frac{-Z_c I_2}{Z_c I_1} = -\frac{I_2}{I_1} = -r_I$$

donc :

$$\underline{i}(x, t) = I_1 [\exp i(\omega t - kx) + r_I \exp i(\omega t + kx)] \quad \text{et} \quad \underline{u}(x, t) = Z_c I_1 [\exp i(\omega t - kx) - r_I \exp i(\omega t + kx)]$$

or :

$$\frac{\underline{u}(0^-, t)}{\underline{i}(0^-, t)} = \frac{Z_c}{2} = Z_c \frac{1 - r_I}{1 + r_I}$$

ce qui donne :

$$r_I = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad r_u = -\frac{1}{3}$$

1.5.1. La forme générale de l'onde entre  $x = 0$  et  $x = l$  est :

$$\underline{i}(x, t) = I'_1 \exp i(\omega t - kx) + I'_2 \exp i(\omega t + kx) \quad \text{et} \quad \underline{u}(x, t) = Z_c [I'_1 \exp i(\omega t - kx) - I'_2 \exp i(\omega t + kx)]$$

or en  $x = l$  :

$$\underline{u}(x, t) = 0$$

d'où :

$$I'_2 = I'_1 \exp(-2ikl)$$

donc :

$$\underline{i}(x, t) = 2I'_1 \exp i(\omega t - kl) \cos[k(x - l)] \quad \text{et} \quad \underline{u}(x, t) = 2Z_c I'_1 \exp i(\omega t - kl) \sin[k(x - l)]$$

L'onde est donc stationnaire entre  $x = 0$  et  $x = l$ .

**1.5.2.** En  $x = 0^+$  :

$$\underline{i}(0^+, t) = 2I'_1 \exp i(\omega t - kl) \cos(kl) = 0$$

d'où :

$$l_0 = \frac{\lambda}{4}$$

**1.5.3.** La loi des noeuds en  $x = 0$  :

$$\underline{i}(0^-, t) = \underline{i}(0^+, t) + \underline{i}_{Z_c} = \underline{i}_{Z_c}$$

avec  $\underline{i}_{Z_c}$  courant traversant  $Z_c$ .

d'où :

$$Z_c = \frac{\underline{u}(0^-, t)}{\underline{i}_{Z_c}} = \frac{\underline{u}(0^-, t)}{\underline{i}(0^-, t)} = Z_c \frac{1 - r_I}{1 + r_I}$$

donc :

$$r_I = 0$$

or :

$$r_u = -r_I$$

d'où :

$$r_I = r_u = 0$$

## Partie 2 : Champ électromagnétique dans la ligne

**2.1.** Puisque le champ électromagnétique est indépendant de  $x$ , on le calcule au voisinage des conducteurs parfaits. Pour cela, on utilisera les relations de passage :

$$\vec{E}(x, t) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_y \quad (5.4)$$

et

$$\vec{B}(x, t) = -\mu_0 j_s \vec{e}_z \quad (5.5)$$

**2.2.** Puisque :

$$\underline{i}(x, t) = I_0 \exp j(\omega t - kx)$$

donc :

$$\vec{\nabla} \equiv -jk \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

En remplaçant les expressions de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans les équations de MAXWELL-AMPÈRE et MAXWELL-FARADAY, dans le vide, il vient :

$$kj_s = \omega \underline{\sigma} \quad \text{et} \quad k\underline{\sigma} = \frac{\omega}{c^2} j_s$$

avec  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  célérité de la lumière dans le vide.

D'autre part :

$$\underline{i} = \underline{j}_s a$$

donc :

$$k\underline{i} = \omega\underline{\sigma}a \quad \text{et} \quad k\underline{\sigma}a = \frac{\omega}{c^2}\underline{i}$$

ces deux relations ne sont compatibles que si :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

La vitesse de phase est donc :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} &= -\frac{\underline{\sigma}}{\epsilon_0} \underline{\vec{e}}_y = -\frac{k}{\epsilon_0 \omega a} \underline{i} \underline{\vec{e}}_y \\ &= -\frac{I_0}{\epsilon_0 c a} \exp j(\omega t - kx) \underline{\vec{e}}_y \end{aligned}$$

et aussi :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{B}}(x, t) &= -\mu_0 \underline{j}_s \underline{\vec{e}}_z = -\frac{\mu_0}{a} \underline{i} \underline{\vec{e}}_z \\ &= -\frac{\mu_0 I_0}{a} \exp j(\omega t - kx) \underline{\vec{e}}_z \\ &= -\frac{I_0}{\epsilon_0 c^2 a} \exp j(\omega t - kx) \underline{\vec{e}}_z \end{aligned}$$

Donc :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{e}}_x \wedge \underline{\vec{E}}}{c}$$

C'est la structure d'ondes planes dans le vide illimité.

**2.3.** L'énergie magnétique est :

$$d\varepsilon_m = \frac{B^2}{2\mu_0} abdx = \frac{\mu_0 b}{2a} i^2 dx$$

Remarque : Il faut utiliser la notation réelle.

or :

$$d\varepsilon_m = \frac{1}{2} L i^2 dx$$

donc :

$$L = \mu_0 \frac{b}{a}$$

**2.4.** L'énergie électrique est :

$$d\varepsilon_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} abdx = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} ab dx$$

Remarque : Il faut utiliser la notation réelle.

or :

$$\sigma = \frac{dq}{a dx} \quad \text{et} \quad d\varepsilon_e = \frac{dq^2}{2\Gamma dx}$$

donc :

$$\Gamma = \varepsilon_0 \frac{a}{b}$$

**2.5.** D'après **1.2.2.**, la vitesse de phase est :

$$v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{L\Gamma}}$$

or d'après les questions 2.3. et 2.4. on a :

$$L\Gamma = \varepsilon_0 \mu_0$$

d'où :

$$v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$$

ce qui est en accord avec la question 2.2.

## 2.6.

**2.6.1.** Le plan  $yOz$  est un plan d'antisymétrie de la distribution surfacique de courant, donc  $\vec{A}$  est perpendiculaire à ce plan c'est à dire porté par  $\vec{e}_x$ .

**2.6.2.** Expression de  $A(y, z)$  :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{I_0}{\varepsilon_0 c^2 a} \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_z \\ &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ &= \vec{\nabla} \wedge [A(y, z) \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_x] \\ &= \left( \frac{\partial A}{\partial z} \vec{e}_y - \frac{\partial A}{\partial y} \vec{e}_z \right) \exp j(\omega t - kx) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y} &= \frac{I_0}{\varepsilon_0 c^2 a} \\ A &= \frac{I_0}{\varepsilon_0 c^2 a} y \quad (\text{onde}) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\vec{A} = \frac{I_0}{\varepsilon_0 c^2 a} y \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_x$$

Pour calculer  $\underline{V}$ , on utilise la jauge de LORENTZ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

d'où :

$$\underline{V} = -\frac{\mu_0 \omega I_0}{ka} y \exp j(\omega t - kx)$$

**2.6.3.** Expression de  $\vec{E}$  :

$$\begin{aligned} \underline{u}(x, t) &= \underline{V}(x, 0, z, t) - \underline{V}(x, b, z, t) \\ &= \frac{I_0 b}{\varepsilon_0 c a} \exp j(\omega t - kx) \end{aligned}$$

or :

$$\vec{E} = -\frac{I_0}{\varepsilon_0 c a} \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

donc :

$$\vec{E} = -\frac{u(x,t)}{b} \vec{e}_y$$

**2.7.1.** L'impédance d'une telle plaque est simplement :  $Z_c = \rho \frac{b}{ea}$ . Pour avoir une adaptation d'impédance  $Z_c$ , il ne faut pas qu'il y ait d'onde réfléchie.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{I_0 b}{\varepsilon_0 c a} \exp j(\omega t - kx) \\ &= \frac{b}{\varepsilon_0 c a} i(x,t) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} Z_c &= \frac{u(0,t)}{i(0,t)} \\ &= \frac{b}{\varepsilon_0 a c} \end{aligned}$$

donc :

$$R_c = Z_c(a = b) = \frac{1}{\varepsilon_0 c} = \mu_0 c$$

Application numérique :

$$R_c = 377 \Omega$$

**2.7.3.** D'après la question **2.7.1.** :

$$e = \frac{\rho}{R_c}$$

Application numérique :

$$e_{Cu} \simeq 4,5.10^{-11} \text{ m} \quad \text{et} \quad e_C \simeq 9,3.10^{-6} \text{ m}$$

La réalisation est impossible avec du cuivre puisque l'épaisseur de la couche est inférieure au rayon atomique qui est de l'ordre de 0,1 nm. Par contre, il est possible avec du graphite (au moyen d'un dépôt d'une couche de graphite sur un support isolant).

**2.8.** Le vecteur de POYNTING :

$$\begin{aligned} \vec{\pi} &= \frac{(\Re(\vec{E})) \wedge (\Re(\vec{B}))}{\mu_0} \\ &= \frac{I_0^2}{\varepsilon_0 c a^2} \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x \end{aligned}$$

La puissance moyenne :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} \rangle &= \iint \langle \vec{\pi} \rangle \cdot dydz \vec{e}_x \\ &= \frac{b}{2\varepsilon_0 c a} I_0^2 \\ &= \frac{1}{2} Z_c I_0^2 \end{aligned}$$

Puisqu'en  $x = 0$ , il n'y a pas d'onde réfléchie, on retrouve à nouveau que l'énergie transportée par l'onde entre les rubans est totalement dissipée par effet JOULE dans la plaque d'impédance  $Z_c$ .

### Partie 3 : Réflexion sur une plaque métallique

**3.1.** Puisqu'on a inséré en  $x = 0$ , l'impédance  $Z_c$  et que l'onde électromagnétique peut se propager aussi bien en  $x < 0$  qu'en  $x > 0$ , on se trouve dans la même situation qu'à la question **1.4.2.**, d'où par analogie, on aura une onde réfléchie en  $x < 0$  avec :

$$r_E = r_u = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad r_B = r_I = \frac{1}{3}$$

En effet,  $\vec{E}$  est lié à la tension par :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

et  $\vec{B}$  est lié au courant par l'équation de MAXWELL-AMPÈRE.

**3.2.** L'approximation provient du fait qu'on a négligé la densité volumique de courant de déplacement  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_p}{\partial t}$  devant celui de conduction  $\vec{j} = \frac{\vec{E}_p}{\rho}$  (dans ce cas  $\rho$  est réelle) :

$$\frac{\|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_p}{\partial t}\|}{\|\frac{\vec{E}_p}{\rho}\|} = \varepsilon_0 \rho \omega \ll 1$$

L'équation de MAXWELL-FARADAY dans la plaque :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_p = -\frac{\partial \vec{B}_p}{\partial t}$$

après calcul :

$$\vec{B}_p = \frac{j-1}{\delta \omega} \left[ A_1 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) - A_2 \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) \exp j\left(\omega t + \frac{x}{\delta}\right) \right]$$

L'équation de MAXWELL-AMPÈRE dans la plaque :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_p = \mu_0 \frac{\vec{E}_p}{\rho}$$

donne :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \omega}}$$

**3.3.** Pour des distributions volumiques, il y a continuité des champs électrique et magnétique. Soit en  $x = 0$  :

$$E_0(1 + \alpha) = A_1 + A_2 \quad \text{et} \quad \frac{E_0}{c}(1 - \alpha) = \frac{j-1}{\omega \delta}(A_1 - A_2)$$

et en  $x = e$  :

$$\tau E_0 \exp\left(-j\frac{\omega e}{c}\right) = A_1 \exp\left(-\frac{1+j}{\delta}e\right) + A_2 \exp\left(\frac{1+j}{\delta}e\right)$$

et

$$\tau \frac{E_0}{c} \exp\left(-j\frac{\omega e}{c}\right) = \frac{j-1}{\omega \delta} \left[ A_1 \exp\left(-\frac{1+j}{\delta}e\right) - A_2 \exp\left(\frac{1+j}{\delta}e\right) \right]$$

3.4. L'approximation précédente implique :

$$e^2 = \frac{\rho^2}{R_c^2} = \frac{\rho^2}{\mu_0^2 c^2} \ll \frac{\rho}{\mu_0^2 c^2} \frac{1}{\varepsilon_0 \omega} = \frac{\rho}{\mu_0 \omega} = \frac{\delta^2}{2}$$

d'où :

$$e \ll \delta$$

3.4. Comme  $e \ll \delta$  :

$$\exp \frac{1+j}{\delta} e \simeq 1 + \frac{1+j}{\delta} e \quad \text{et} \quad \exp -\frac{1+j}{\delta} e \simeq 1 - \frac{1+j}{\delta} e$$

D'où les relations de passage donnent, après calcul :

$$\alpha = -\frac{1}{3}$$

3.5. Il faut placer une plaque métallique parfaitement conductrice à l'abscisse  $x = e + \frac{\lambda}{4}$ .



## Problème - 6

# Rayonnement dipolaire électrique

### 6.1 Énoncé

#### 1. Étude du dipôle oscillant

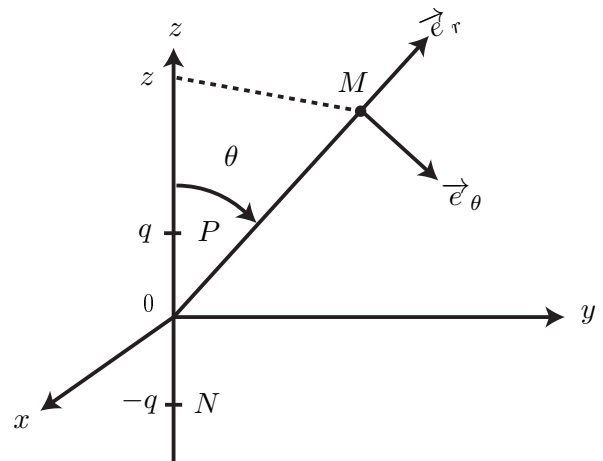
Considérons un dipôle formé d'une charge  $-q$  fixe, située en  $N$  et d'une charge  $+q$ , située en  $P$  et animée d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation  $\omega$  tel que :

$$NP = 2a \cos \omega t$$

ou en notation complexe :

$$\underline{NP} = 2a \exp j\omega t$$

Ce modèle permet de rendre compte, en première approximation, du comportement et de l'allure du champ électromagnétique rayonné par un atome ou une molécule excitée par un champ électrique harmonique, ou encore par une antenne. On se placera en coordonnées sphériques.



**1.1.** On suppose que la distance d'observation  $r = |\overrightarrow{OM}|$  est grande devant  $a$ . Quelle est l'expression du moment dipolaire  $\overrightarrow{p}$  de cette distribution de charge. On pose  $p_0 = 2aq$ .

**1.2.** Sachant que la charge  $+q$  est animée d'un mouvement non relativiste, c'est à dire  $v_{max}(q) \ll c$  ( $c$  célérité de la lumière dans le vide).

**1.2.1.** Quelle est l'inégalité satisfaite par la longueur d'onde de l'onde électromagnétique créée par le dipôle oscillant ?

**1.2.2.** Quel est l'intervalle des longueurs d'ondes du domaine visible ?

**1.3.** Le potentiel vecteur retardé crée, dans le vide, par le dipôle oscillant au point  $M$ , est donné par la relation (1) :

$$\underline{\vec{A}}(M, t) = \frac{j\omega\mu_0 p_0}{4\pi r} \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_z \quad (6.1)$$

avec  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_r$ .

Le potentiel scalaire  $\underline{V}(M, t)$  créé par une telle distribution est donné, à l'ordre le plus bas en  $\frac{a}{r}$ , par la

relation (2) :

$$\underline{V}(M, t) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 + jkr) \tag{6.2}$$

avec  $\underline{p} = p_0 \exp j(\omega t - kr)$ .

**1.3.1** Déduire de la relation (2), l'expression du potentiel scalaire  $V(M)$  crée par un dipôle électrostatique.

**1.3.2.** Le potentiel  $\underline{V}(M, t)$  est écrit sous la forme d'une somme de deux termes ; donner pour chacun d'eux l'échelle spatiale associée à  $r$ .

**1.4.** Le calcul du champ magnétique crée par la distribution conduit à :

$$\underline{\vec{B}}(M, t) = j\omega \frac{\mu_0 p \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + jkr) \underline{\vec{e}}_\varphi$$

Que devient cette expression pour des champs lointains, c'est à dire pour  $r \gg \lambda$  ?

**1.5.** Le calcul du champ électrique  $\underline{\vec{E}}(M, t)$  conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \underline{E}_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 + jk.r) \\ \underline{E}_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 + jk.r - k^2 r^2) \\ \underline{E}_\varphi = 0 \end{cases}$$

**1.5.1.** En déduire le champ électrostatique crée par un dipôle électrostatique.

**1.5.2.** Donner l'expression des composantes de  $\underline{\vec{E}}(M, t)$  pour des champs lointains.

**1.5.3.**   quelle condition sur l'angle  $\theta$  peut-on écrire que  $\|\underline{E}_\theta\| \gg \|\underline{E}_r\|$  ? On se placera toujours dans la zone de rayonnement  $r \gg \lambda$ .

## 2.  tude du rayonnement en champ lointain

Dans la suite du problème, on se situe dans l'approximation des champs lointains ou zone de rayonnement ( $r \gg \lambda$ ). Dans toute cette partie l'étude sera faite **en notation réelle**.

**2.1.**  crire les expressions de  $\underline{\vec{E}}(M, t)$ , de  $\underline{\vec{B}}(M, t)$  et de  $k$  dans le cas d'un champ lointain. En déduire la structure locale en  $M$  de l'onde rayonnée par le dipôle oscillant.

**2.2.** Donner l'expression du vecteur de POYNTING  $\underline{\vec{\pi}}(M, t)$  de  $E$ ,  $c$ ,  $\mu_0$  et d'un vecteur unitaire de la base sphérique ( $\underline{\vec{e}}_r, \underline{\vec{e}}_\theta, \underline{\vec{e}}_\varphi$ ).

**2.3.** Dans quelle direction l'énergie électromagnétique se propage-t-elle ?

**2.4.** En optique géométrique, comment appelle-t-on les lignes de champ du vecteur de POYNTING ?

**2.5.** Déterminer l'expression de l'intensité électromagnétique de l'onde  $I = \langle |\underline{\vec{\pi}}| \rangle$ , c'est à dire la moyenne temporelle (sur une période) de la norme du vecteur de POYNTING, en fonction de  $\omega$ ,  $p_0$ ,  $\epsilon_0$ ,  $c$ ,  $r$  et  $\theta$ . Quelle est l'unité de l'intensité  $I$  ?

**2.6.** Pour quelle valeur de  $\theta$ , la fonction  $I = \langle |\underline{\vec{\pi}}| \rangle$  est-elle maximale ? On note  $I_{max}$  l'expression obtenue. dans quelle direction l'intensité rayonnée est-elle nulle ?

**2.7.** Déterminer le rapport  $\frac{I}{I_{max}}$  et tracer le diagramme polaire  $\frac{I(\theta)}{I_{max}}$  correspondant.

**2.8.** Montrer que la puissance électromagnétique moyenne rayonnée dans tout l'espace par le dipôle s'écrit sous la forme suivante :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \alpha \frac{p_0^2 \omega^4}{\epsilon_0 c^3}$$

avec  $\alpha$  coefficient à identifier.

**2.9.** Justifier rapidement pourquoi la puissance ne dépend pas de  $r$ .

**2.10.** Dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié, ce dernier oscille, sous l'effet d'un champ électrique  $E = E_0 \cos \omega t$ . Le moment dipolaire de la molécule décrite par ce modèle est donnée par la relation suivante :

$$p_0 = \frac{q^2 E_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}$$

avec  $q = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg et  $\omega_0 = 2,3 \cdot 10^{16}$  rad.s<sup>-1</sup>.

**a.** Tracer l'allure de  $p_0$  en fonction de  $\omega$ .

**b.** Le comportement du modèle retenu vous paraît-il acceptable pour  $\omega = \omega_0$  ? Préciser le phénomène physique qui n'est pas pris en compte.

**c.** Proposer une simplification de l'expression de  $p_0$  lorsque le champ électromagnétique qui excite la molécule appartient au domaine visible.

**d.** Établir, dans ce cas, l'expression de la puissance moyenne rayonnée  $\langle \mathcal{P} \rangle$  en fonction de  $q$ ,  $E_0$ ,  $m$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\varepsilon_0$  et  $c$ .

**e.** Justifier alors pourquoi la couleur du ciel en plein jour et par temps clair est bleue.

**f.** En fin de journée, lorsque le soleil se couche, il nous apparaît rouge ; expliquer qualitativement ce phénomène.

### 3. Amortissement de l'intensité électromagnétique

Dans cette partie, l'espace est repéré par les coordonnées cartésiennes. On considère une onde électromagnétique harmonique plane se propageant dans le vide dans le sens des  $z$  croissants. Les expressions des champs sont données par la relation suivante :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

**3.1.** Donner l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique  $u_{em}(M, t)$ . En déduire sa valeur moyenne temporelle.

**3.2.** Exprimer la norme du vecteur de POYNTING  $|\vec{\pi}|$  en fonction de la densité volumique magnétique  $u(M, t)$  et de la célérité de la lumière  $c$ .

**3.3.** Dans quelle direction l'énergie électromagnétique se propage-t-elle ?

**3.4.** Quelles sont les puissances instantanée et moyenne (temporelle) qui traverse une surface  $S$  perpendiculaire à l'axe  $Oz$  ?

**3.5.** En déduire l'expression de l'intensité électromagnétique  $I$  de l'onde (puissance moyenne par unité de surface transportée par cette onde électromagnétique).

**3.6.** En admettant que l'énergie électromagnétique se conserve, établir l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont  $u$  et  $\vec{\pi}$ . Montrer que :

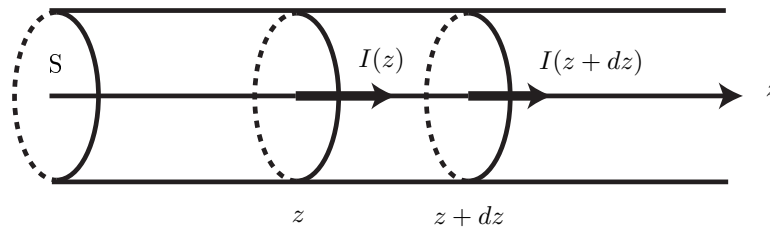
$$\text{div} \langle \vec{\pi} \rangle = 0$$

**3.7.** Considérons maintenant un cylindre de volume  $d\tau$  de l'atmosphère, de section  $S$ , de longueur  $dz$  et de densité particulière  $N_v$  (nombre de particules par unité de volume).

L'onde électromagnétique précédente se propage dans ce milieu selon  $Oz$  à la célérité  $c$ . L'intensité électromagnétique de l'onde à la cote  $z$  est notée  $I(z)$ . L'énergie électromagnétique est diffusée par les molécules contenues dans le volume  $d\tau$ . La puissance volumique électromagnétique diffusée sera notée  $p_d$ . On admettra que l'énergie électromagnétique est soit transmise, soit diffusée par les molécules contenues dans le volume  $d\tau$ .

**a.** Effectuer un bilan énergétique sur le volume  $d\tau$ . En déduire une relation entre  $P_d$  et  $I(z)$  ou l'une de ses dérivées partielles.

**b.** La puissance volumique électromagnétique diffusée est donnée par la relation suivante :



$$P_d(z) = \frac{I(z)}{h(\omega)}$$

avec :

$$h(\omega) = 6\pi\epsilon_0 m^2 c^4 \frac{\omega_0^4}{N_v q^4 \omega^4}$$

Données numériques :  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-12}$ ,  $q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  et  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

En déduire une équation aux dérivées partielles satisfaite par  $I(z)$ .

c. Intégrer cette équation. On notera  $I(0) = I_0$ .

d. Préciser l'unité de  $h(\omega)$  et sa signification physique.

e. En considérant que l'atmosphère se comporte comme un gaz parfait à la température  $T_0 = 290 \text{ K}$ , sous la pression  $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ , calculer la densité particulaire  $N_v$  de l'atmosphère.

Données :  $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $N_a = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

f. Évaluer l'épaisseur  $z_B$  telle que l'intensité lumineuse correspondant à la couleur bleue soit divisée par deux. En déduire l'épaisseur comparable  $z_R$  pour la couleur rouge. Analyser les résultats obtenus.

## 6.2 Corrigé

1. le moment dipolaire :

1.1.

$$\vec{p} = p_0 \cos \omega t \vec{e}_z$$

1.2.

1.2.1. Approximation non relativiste :

$$v_{\max} = 2a\omega = 2a \frac{2\pi}{\lambda} c \ll c \Rightarrow a \ll \lambda$$

1.2.2. Le domaine visible :

$$[0,4 \mu\text{m} ; 0,8 \mu\text{m}]$$

1.3.

1.3.1. Le potentiel scalaire :

En régime statique, on a :  $\omega = 0$  et  $k = \frac{\omega}{c} = 0$  donc :

$$V(M) = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

1.3.2. Le 1<sup>er</sup> terme varie en  $\frac{1}{r^2}$  et le 2<sup>ème</sup> terme varie en  $\frac{1}{r}$ .

1.4. On a  $kr \gg 1$  donc :

$$\vec{B} = \frac{-k^2 p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c} \vec{e}_\varphi$$

1.5.

1.5.1.

$$E_r = \frac{2p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \text{ et } E_\theta = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

1.5.2.

$$\underline{E}_r = \frac{2jk\underline{p} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ et } \underline{E}_\theta = \frac{-k^2 \underline{p} \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r}$$

1.5.3.  $|E_\theta| \gg |E_r|$  pour  $\theta \neq 0$  et  $\theta \neq \pi$ .

2.

2.1.

$$\vec{E} = \frac{-k^2 p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\theta, \quad \vec{B} = \frac{-k^2 p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c} \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi \text{ et } \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_r$$

Donc :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

2.2.

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c} \vec{e}_r$$

2.3. ..Suivant  $\vec{e}_r$ .

2.4. ..Des rayons lumineux.

2.5.

$$I = \frac{p_0^2 k^4 c \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 r^2}$$

I en watt par mètre carré.

2.6. I est max pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$  :

$$I_{max} = \frac{p_0^2 k^4 c}{32\pi^2 \epsilon_0 r^2}$$

$I = 0$  pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ .

2.7.

$$\frac{I}{I_{max}} = \sin^2 \theta$$

2.8.

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \iint_S \langle \vec{\pi} \rangle \cdot \vec{e}_r r^2 d\theta \sin^2 \theta d\varphi = \alpha \frac{p_0^2 \omega^4}{\epsilon_0 c^3}$$

avec :

$$\alpha = \frac{1}{12\pi}$$

2.9. On a négligé tout phénomène dissipatif.

2.10.

a.

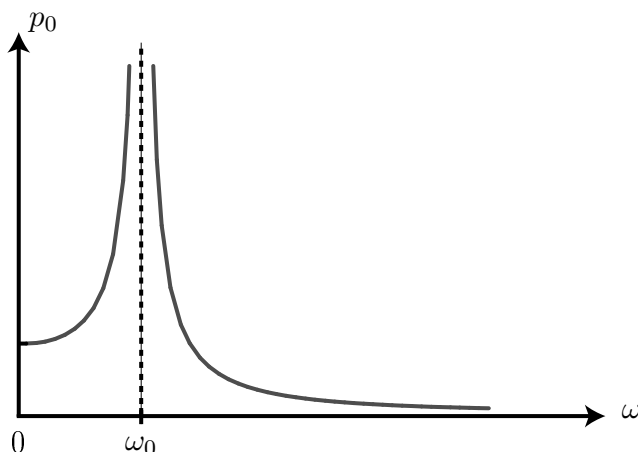
b. non. On a pas tenu compte de la perte d'énergie dû au rayonnement de l'atome.

c. Dans ce cas :

$$\omega^2 \ll \omega_0^2 \simeq 5,3.10^{32} \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } p_0 = \frac{q^2 E_0}{m\omega_0^2}$$

d.

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{q^4 E_0^2}{12\pi m^2 \omega_0^4 \epsilon_0 c^3} \omega^4$$



e. Lorsqu'on observe le ciel, on voit la lumière diffusée par les molécules de l'atmosphère. Cette lumière est riche en bleu puisque  $\langle \mathcal{P} \rangle_{bleu}$  est supérieur  $\langle \mathcal{P} \rangle_{rouge}$  car  $\omega_{bleu} > \omega_{rouge}$ .

f. Au coucher du soleil, l'épaisseur traversée par la lumière issue du soleil est plus importante qu'à midi par exemple, donc la lumière **transmise** s'appauvrit en bleu et s'enrichit en rouge. Le soleil apparaît donc rouge.

3.

3.1.

$$u_{em} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$$

Or :

$$B = \frac{E}{c}$$

donc :

$$u_{em} = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \text{ et } \langle u_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$$

3.2.

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z = c u_{em} \vec{e}_z$$

3.3. Suivant  $\vec{e}_z$ .

3.4.

$$\mathcal{P}(t) = \pi S = c S \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

et

$$\mathcal{P}_{moy} = \frac{c S \epsilon_0 E_0^2}{2}$$

3.5.

$$I = \langle |\vec{\pi}| \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$$

3.6.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = 0$$

D'où :

$$div \langle \vec{\pi} \rangle = 0$$

## 3.7.

a. Bilan d'énergie :

$$I(z)S = I(z + dz)S + P_d S dz$$

$$\frac{dI}{dz} + P_d = 0$$

b.

$$\frac{dI}{dz} + \frac{I}{h} = 0$$

c.

$$I(z) = I_0 \exp\left(\frac{-z}{h}\right)$$

d.  $h$  en  $m$ .  $h$  est la distance caractéristique de la décroissance de l'intensité  $I$  dans le milieu : au bout de quelques  $h$ ,  $I$  est quasiment nulle.

e.

$$N_v = \frac{P_0 N_a}{RT_0} \simeq 2,5 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

f. On a :

$$I = I_0 \exp\left(\frac{-z_B}{h(\omega_B)}\right) = \frac{I_0}{2}$$

D'où :

$$z_B = h(\omega_B) \ln 2$$

AN :  $\omega_B \simeq 2\pi f = 2\pi \frac{c}{\lambda_B} \simeq 2\pi \frac{3 \cdot 10^8}{0,4 \cdot 10^{-6}} \simeq 4,7 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ , d'où :

$$z_B \simeq 2,4 \cdot 10^5 \text{ m}$$

De même  $\lambda_R \simeq 0,8 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $\omega_R \simeq 2,4 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ , d'où :

$$z_R \simeq 3,8 \cdot 10^6 \text{ m}$$

On retrouve que la lumière **transmise** à travers l'atmosphère, est plus riche en rouge qu'en bleu.





## Problème - 7

# Antennes linéaires demi-onde

### 7.1 Énoncé

Un dipôle élémentaire de moment dipolaire variable  $d\vec{p}(t)$  placé en  $O$  selon  $Oz$  rayonne à grande distance en un point  $M$  ( $OM=r$ ), un champ électrique :

$$d\vec{E}_O(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{dp''(t - \frac{r}{c})}{r} \sin\theta \vec{e}_\theta$$

On se propose d'étudier l'association de dipôles élémentaires pour constituer des antennes, utilisées dans les télécommunications. Un élément de circuit porté par  $Oz$ , de résistance ohmique négligeable, est parcouru par un courant sinusoïdal :

$$I(z, t) = I_0 f(z) \cos \omega t$$

$I_0$  est un courant constant et  $f(z)$  caractérise la distribution spatiale du courant dans l'antenne assimilable à un segment  $[-L, L]$  de petite dimension vis à vis de  $r$  (on se place toujours dans l'hypothèse des champs lointains).

**1.1.** Donner l'expression du champ  $d\vec{E}_p(M, t)$  créé par un dipôle élémentaire placé en  $P$  ( $OP = z \in [-L, L]$ ).

**1.2.** En déduire l'expression intégrale donnant le champ  $\vec{E}$  créé par la distribution totale de courant et montrer que si  $f(z) = f(-z)$ , alors  $\vec{E}$  varie en  $\sin(\omega t - kr)$ , où  $k = \frac{\omega}{c}$ .

**2.** Le courant est stationnaire de mode fondamental tel que :

$$f(z) = \cos\left(\pi \frac{z}{2L}\right)$$

**2.1.** Calculer explicitement  $\vec{E}$  si  $L \ll \lambda$ , et montrer que la puissance moyenne rayonnée par le circuit s'écrit sous la forme :

$$P_{moy} = \frac{1}{2} \mathcal{R} I_0^2$$

On donnera l'expression de la résistance de rayonnement  $\mathcal{R}$ , en introduisant  $\frac{L}{\lambda}$ .

**2.2.** Considérons à présent une antenne demi-onde de longueur  $2L = \frac{\lambda}{2}$ . Répondre aux mêmes questions que précédemment. On admet dans le calcul que  $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \simeq 0,95 \sin^2\theta$ .

**2.3. AN :** Comparer les deux résistances lorsque dans le premier cas  $L = \frac{\lambda}{40}$ . Conclusion.

Dans le cas où  $L = \frac{\lambda}{4}$ , calculer numériquement  $P_{moy}$  pour  $I_0 = 10$  A. Puis donner l'amplitude maximale du champ  $E$  à une distance de 30 km d'une antenne parcourue par un courant de fréquence 100 MHz.

**3.** Deux antennes identiques sont disposées selon  $Oz$  et leurs centres sont situés en  $(0, 0, \pm \frac{d}{2})$ . Elles sont alimentées par des courants égaux.

Montrer, en utilisant les calculs précédents, que si les courants sont en phase et  $d = 4\lambda$ , alors :

$$\frac{I}{I_{max}} = \sin^2 \theta \cos^2(4\pi \cos \theta)$$

$I$  étant l'intensité de l'onde résultante au point  $M$ .

## 7.2 Corrigé

1.1.

$$d\vec{E}_p(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{dp''(t - \frac{PM}{c})}{PM} \sin \theta \vec{e}_\theta$$

or  $PM = OM - z \cos \theta = r - z \cos \theta$  et  $z \ll r$ , alors un développement limité à l'ordre 0 donne :

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}$$

Par contre, on a pas le droit a priori de faire un développement à l'ordre 0 de la fonction :

$$dp'' \left( t - \frac{PM}{c} \right) = dp'' \left( t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos \theta}{c} \right)$$

d'où :

$$d\vec{E}_p(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{dp'' \left( t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos \theta}{c} \right)}{r} \sin \theta \vec{e}_\theta$$

1.2. On décompose l'antenne en éléments de longueur  $dz$  fixes aux bornes duquel il y a, à l'instant  $t$ , une charge  $q$  et  $-q$ , ce qui implique que le moment dipolaire élémentaire est :

$$\vec{dp}(t) = qdz \vec{e}_z \implies dp(t) = qdz$$

donc :

$$\frac{d[dp(t)]}{dt} = \frac{dq}{dt} dz = I(z, t) dz \quad \text{et} \quad dp''(t) = \frac{d^2[dp(t)]}{dt^2} = \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} dz$$

d'où :

$$\begin{aligned} dp'' \left( t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos \theta}{c} \right) &= \frac{\partial I(z, t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos \theta}{c})}{\partial t} dz \\ &= I_0 f(z) \frac{d \cos[\omega(t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos \theta}{c})]}{dt} \\ &= -I_0 \omega f(z) \sin(\omega t - kr + kz \cos \theta) \\ &= -I_0 \omega f(z) [\sin(\omega t - kr) \cos(kz \cos \theta) + \cos(\omega t - kr) \sin(kz \cos \theta)] \end{aligned}$$

d'où l'expression de  $\vec{E}$  :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int d\vec{E}_p \\ &= \frac{-I_0 \omega \sin \theta \sin(\omega t - kr)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta \int_{-L}^{+L} f(z) \cos(kz \cos \theta) dz - \frac{I_0 \omega \sin \theta \cos(\omega t - kr)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta \int_{-L}^{+L} f(z) \sin(kz \cos \theta) dz \end{aligned}$$

or  $f(z)$  est une fonction paire et  $\sin(kz \cos \theta)$  est une fonction impaire, donc  $f(z) \sin(kz \cos \theta)$  est une fonction impaire, d'où :

$$\int_{-L}^{+L} f(z) \sin(kz \cos \theta) dz = 0$$

donc :

$$\vec{E} = -\frac{I_0 \omega \sin \theta \sin(\omega t - kr)}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta \int_{-L}^{+L} f(z) \cos(kz \cos \theta) dz$$

$f(z) \cos(kz \cos \theta)$  est une fonction paire, donc :

$$\int_{-L}^{+L} f(z) \cos(kz \cos \theta) dz = 2 \int_0^{+L} f(z) \cos(kz \cos \theta) dz$$

d'où :

$$\vec{E} = -\frac{2I_0 \omega \sin \theta \sin(\omega t - kr)}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta \int_0^{+L} f(z) \cos(kz \cos \theta) dz$$

**2.**

**2.1.** On a

$$L \ll \lambda \implies kz \cos \theta = \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta \ll 1$$

ce qui permet de faire un développement limité à l'ordre 0, de la fonction suivante :

$$\cos(kz \cos \theta) \simeq 1$$

d'où :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{2I_0 \omega \sin \theta \sin(\omega t - kr)}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta \int_0^{+L} \cos\left(\pi \frac{z}{2L}\right) dz \\ &= -\frac{I_0 \omega \sin \theta \sin(\omega t - kr)}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \frac{4L}{\pi} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

le vecteur de POYNTING moyen est :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \rangle$$

or dans la zone de rayonnement, l'onde est localement plane, donc :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

d'où :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \langle E^2 \rangle \vec{e}_r = \frac{1}{2\mu_0 c} \frac{I_0^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{(4\pi \epsilon_0 c^2 r)^2} \frac{16L^2}{\pi^2} \vec{e}_r$$

La puissance moyenne rayonnée dans l'espace c'est à dire à travers une sphère de rayon  $r$ , est donc :

$$\mathcal{P}_{moy} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\mu_0 c} \frac{I_0^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{(4\pi \epsilon_0 c^2 r)^2} \frac{16L^2}{\pi^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

or :

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{moy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{8L^2 \omega^2}{3\pi^3 \epsilon_0 c^3} \right) I_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{R} I_0^2 \end{aligned}$$

avec :

$$\mathcal{R} = \frac{8L^2\omega^2}{3\pi^3\varepsilon_0c^3} = \frac{32}{3\pi\varepsilon_0c} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$$

**2.2.** Si  $L = \frac{\lambda}{4}$ ,  $\cos(kz \cos \theta) = \cos\left(\pi\frac{z}{2L} \cos \theta\right)$ , d'où :

$$\vec{E} = -\frac{2I_0\omega \sin \theta \sin(\omega t - kr)}{4\pi\varepsilon_0c^2r} \vec{e}_\theta \int_0^{+L} \cos\left(\pi\frac{z}{2L}\right) \cos\left(\pi\frac{z}{2L} \cos \theta\right) dz$$

or :

$$\cos\left(\pi\frac{z}{2L}\right) \cos\left(\pi\frac{z}{2L} \cos \theta\right) = \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\pi\frac{z}{2L}(1 + \cos \theta)\right) + \cos\left(\pi\frac{z}{2L}(1 - \cos \theta)\right) \right]$$

d'où, tout calcul fait :

$$\vec{E} = -\frac{I_0\omega \sin \theta \sin(\omega t - kr)}{4\pi\varepsilon_0c^2r} \frac{4L.0,95}{\pi} \vec{e}_\theta$$

De même que la question **2.1.**, on trouve :

$$\mathcal{R} = \frac{32}{3\pi\varepsilon_0c} \left(\frac{0,95L}{\lambda}\right)^2$$

or  $\frac{L}{\lambda} = \frac{1}{4}$ , donc :

$$\mathcal{R} = 72\Omega$$

**2.3. AN :** Si  $L = \frac{\lambda}{40}$  :

$$\mathcal{R} = 0,8\Omega$$

Si  $L = \frac{\lambda}{4}$  :

$$\mathcal{R} = 72\Omega$$

Conclusion : les "petites" antennes ( $L \ll \lambda$ ) rayonnent mal par rapport aux antennes ayant des longueurs de l'ordre de la longueur d'onde émise  $\lambda$ .

**3.** D'après la question **2.2.** et en tenant compte des positions des centres des deux antennes, le champ électrique résultant en un point  $M$  à l'instant  $t$ , est :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tot} &= -\frac{I_0\omega \sin \theta}{4\pi\varepsilon_0c^2r} \frac{4L.0,95}{\pi} \left[ \sin\left(\omega t - kr + \frac{dk}{2} \cos \theta\right) + \sin\left(\omega t - kr - \frac{dk}{2} \cos \theta\right) \right] \vec{e}_\theta \\ &= -\frac{2I_0\omega \sin \theta}{4\pi\varepsilon_0c^2r} \frac{4L.0,95}{\pi} \sin(\omega t - kr) \cos\left(\frac{d\pi}{\lambda} \cos \theta\right) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

or :

$$d = 4\lambda$$

$$\vec{E}_{tot} = -\frac{2I_0\omega \sin \theta}{4\pi\varepsilon_0c^2r} \frac{4L.0,95}{\pi} \sin(\omega t - kr) \cos(4\pi \cos \theta) \vec{e}_\theta$$

d'où :

$$I = \langle |\vec{E}|^2 \rangle = \frac{1}{2\mu_0c} \langle E_{tot}^2 \rangle = \frac{1}{\mu_0c} \frac{2I_0^2\omega^2}{(4\pi\varepsilon_0c^2r)^2} \frac{(4L.0,95)^2}{\pi^2} \sin^2 \theta \cos^2(4\pi \cos \theta)$$

d'où l'intensité est maximale pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$  :

$$I_{max} = \frac{1}{\mu_0c} \frac{2I_0^2\omega^2}{(4\pi\varepsilon_0c^2r)^2} \frac{(4L.0,95)^2}{\pi^2}$$

donc :

$$\frac{I}{I_{max}} = \sin^2 \theta \cos^2(4\pi \cos \theta)$$