

CENTRE RÉGIONALE DES MÉTIERS
DE L'ÉDUCATION ET DE LA FORMATION
MARRAKECH-SAFI

CPA

Préparation Concours AGP

PROBLÈMES CORRIGÉS

THERMODYNAMIQUE
AGRÉGATION DE PHYSIQUE-CHIMIE
OPTION PHYSIQUE

Par :
ABDELFETTAH HABIB

2014-2021

Table des matières

1	Méthodes pour la thermodynamique	5
1.1	Comment calculer le travail échangé par un gaz?	5
1.1.1	Cas d'une transformation brutale	5
1.1.2	Cas d'une transformation quasi-statique (ou réversible)	5
1.1.3	Cas d'une transformation adiabatique d'un gaz parfait	6
1.1.4	Pour les liquides et les solides	6
1.2	Comment calculer la chaleur échangé par un gaz?	6
1.2.1	Intégrer l'expression de dQ	6
1.2.2	Cas d'un transformation adiabatique	6
1.2.3	Cas d'un transformation brutale	6
1.2.4	Cas d'un transformation réversible	6
1.2.5	Autres cas	6
2	Étude de quelques transformations	7
2.1	Enoncé (d'après CND)	7
2.2	Corrigé	7
3	Principes de la thermodynamique	11
3.1	Enoncé	11
3.2	Corrigé	13
4	Thermodynamique de l'atmosphère	19
4.1	Enoncé (d'après CNC 2004)	19
4.2	Corrigé	21
5	Étude d'un réservoir à gaz	27
5.1	Enoncé (d'après CNC 2006)	27
5.2	Corrigé	29
6	Étude de quelques cycles moteurs	33
6.1	Enoncé (d'après Mines-Ponts 2000)	33
6.2	Corrigé	35
7	Étude des changements d'état de l'eau	39
7.1	Enoncé (d'après SupElec)	39
7.2	Corrigé	41

8 Transferts thermiques	49
8.1 Enoncé (d'après CCP 2003)	49
8.2 Corrigé	51

Chapitre 1

Méthodes pour la thermodynamique

1.1 Comment calculer le travail échangé par un gaz ?

La définition du travail élémentaire est : $\delta W_e = -P_{\text{ext}} dV$.
donc :

$$W_e = - \int_1^2 P_{\text{ext}} dV$$

1.1.1 Cas d'une transformation brutale

- ⊙ Si la transformation est **monobare** (ie. $P_{\text{ext}} = \text{cte}$) alors :

$$W_e = -P_{\text{ext}} (V_2 - V_1)$$

- ⊙ Si la transformation est **isochore** (ie. $V = \text{cte}$) alors :

$$W_e = 0$$

1.1.2 Cas d'une transformation quasi-statique (ou réversible)

On peut remplacer la pression P_{ext} par la pression du gaz $P = P(T, V)$ puis calculer l'intégrale :

$$W_e = - \int_1^2 P dV$$

Exemples :

- ⊙ Transformation **isotherme** ($T = \text{cte}$) d'un gaz parfait : $P = \frac{nRT}{V}$. Donc :

$$W_e = - \int_1^2 nRT \frac{dV}{V} = nRT \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

- ⊙ Transformation **polytropique** d'un gaz parfait (adiabatique + réversible = isentropique) : $PV^\gamma = \text{cte}$.

$$W_e = \int_1^2 -PdV = -P_1 V_1^\gamma \int_1^2 \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1}$$

1.1.3 Cas d'une transformation adiabatique d'un gaz parfait

Lorsque $Q_e = 0$, le premier principe donne pour un gaz parfait :

$$W_e = \Delta U = nC_v(T_2 - T_1)$$

1.1.4 Pour les liquides et les solides

Dans la majorité des cas on néglige la variation du volume des liquides et des solides (ie. $V = \text{cte}$) :

$$W_e = 0$$

1.2 Comment calculer la chaleur échangé par un gaz ?

1.2.1 Intégrer l'expression de dQ

Dans le cas général, on a :

$$dQ = nC_p dT + PdV = nC_v dT + PdV$$

- ⊙ Cas d'une transformation **isobare** ($P = \text{cte}$) :

$$dQ = nC_p dT$$

Si on connaît la capacité thermique $C_p(T)$ on peut calculer l'intégrale.

- ⊙ Cas d'une transformation **isochore** ($V = \text{cte}$) :

$$dQ = nC_v dT$$

Si on connaît la capacité thermique $C_v(T)$ on peut calculer l'intégrale.

1.2.2 Cas d'un transformation adiabatique

$$dQ = 0$$

1.2.3 Cas d'un transformation brutale

On suppose (dans 99% des cas) que les échanges thermique n'ont pas eu le temps de se faire. Donc :

$$dQ = 0$$

1.2.4 Cas d'un transformation reversible

Dans ce cas on peut calculer $dQ = dQ_{\text{rev}}$ comme suite :

- ⊙ On calcule la variation d'entropie (voir les méthodes suivantes)
- ⊙ On utilise le seconde principe ($dS = dQ_{\text{rev}}/T$) pour tirer $Q = Q_{\text{rev}}$

1.2.5 Autres cas

Utilisations du premier principe :

$$Q = \Delta U - W$$

Problème- 2

Étude de quelques transformations

2.1 Enoncé (d'après CND)

Un cylindre horizontal est muni d'un piston idéal (sans frottements). Il contient un gaz parfait dans l'état E_0 (Pression P_0 , Volume V_0 , Température T_0). Le gaz est thermiquement isolé : les parois, le cylindre et le piston sont athermanes (adiabatiques) et de capacité thermique négligeable. Soit $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$ le rapport des capacités thermiques molaires du gaz respectivement isobare et isochore. La pression du milieu extérieur (atmosphère) vaut P_0 constante.

Données numériques :

$P_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa ; $V_0 = 4$ l ; $T_0 = 298$ K ; $\gamma = 1,4$; $R = 8,31$ J.K⁻¹.mol⁻¹ (constante des gaz parfaits).

1. Détente adiabatique quasi-statique.

On fait déplacer le piston de manière quasi-statique afin de détendre la gaz. Lorsque le volume du gaz atteint la valeur $V_1 = 5V_0$, le piston est immobilisé. Soit $E_1 (P_1, V_1, T_1)$ l'état d'équilibre du gaz obtenu à la fin de cette transformation.

1.1. Exprimer, en fonction de P_0 et γ , la pression P_1 . Faire l'application numérique.

1.2. Déterminer l'expression littérale du travail W_{g1} mis en jeu par le gaz. Exprimer W_{g1} en fonction de P_0 , V_0 et γ . Faire l'application numérique.

1.3. Calculer la température T_1 .

2. Compression adiabatique brutale

Le gaz est dans l'état E_1 . Le piston est alors libéré, et le gaz est comprimé brutalement sous l'unique action de l'atmosphère (pression constante P_0). Supposons que le piston s'immobilise assez rapidement. Soit $E_2(P_2, V_2, T_2)$ l'état d'équilibre obtenu à la fin de cette transformation.

2.1. Déterminer l'expression littérale du travail W_{g2} mis en jeu par le gaz au cours de cette compression. On déterminera W_{g2} par deux méthodes différentes.

2.2. Exprimer, en fonction de T_1 et γ , la température T_2 . Faire l'application numérique.

3. Diagramme de CLAPEYRON

Décrire à l'aide du diagramme $P = f(V)$, l'évolution du gaz au cours des deux transformations.

2.2 Corrigé

1. Détente adiabatique quasi-statique.

$$\text{État initial : } \begin{cases} P_0 \\ V_0 \\ T_0 \end{cases} \Rightarrow \text{État final : } \begin{cases} P_1 \\ V_1 = 5 V_0 \\ T_1 \end{cases}$$

1.1. La transformation du **gaz parfait** étant :

- Quasi-statique ;
- Adiabatique.

donc, on peut utiliser la loi de LAPLACE : $P V^\gamma = \text{cte}$. Soit :

$$P_0 V_0^\gamma = P_1 V_1^\gamma \quad \text{d'où : } \boxed{P_1 = P_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma = \frac{P_0}{5^\gamma} = 1,05 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$

1.2. Première méthode :

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit : $\Delta U = W_e + Q_e$.

La transformation étant adiabatique donc : $Q_e = 0$, d'où : $\Delta U = W_{g1}$.

Or, pour un gaz parfait on a : $\Delta U = n C_v \Delta T$. D'où :

$$\Delta U = n C_v (T_1 - T_0)$$

avec : $C_v = \frac{R}{\gamma-1}$; $T_0 = \frac{P_0 V_0}{nR}$; $T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{P_0 5V_0}{5^\gamma nR}$ car $V_1 = 5 V_0$
d'où :

$$W_{g1} = \Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} \frac{P_0 V_0}{nR} (5^{1-\gamma} - 1)$$

soit :

$$\boxed{W_{g1} = \frac{P_0 V_0}{\gamma-1} (5^{\gamma-1} - 1) = -475 \text{ J}}$$

Deuxième méthode :

$$W_{g1} = \int -P dV = -P_0 V_0^\gamma \int \frac{dV}{V^\gamma} \quad \text{puisque } P_0 V_0^\gamma = \text{cte} = P V^\gamma$$

soit

$$W_{g1} = -\frac{P_0 V_0^\gamma}{1-\gamma} [V^{1-\gamma}]_{V_0}^{5V_0}$$

d'où

$$\boxed{W_{g1} = \frac{P_0 V_0}{\gamma-1} (5^{\gamma-1} - 1) = -475 \text{ J}}$$

2. Détente adiabatique brutale.

$$\text{État initial : } \begin{cases} P_1 = P_0/5^\gamma \\ V_1 = 5 V_0 \\ T_1 \end{cases} \Rightarrow \text{État final : } \begin{cases} P_2 = P_0 \\ V_2 \\ T_2 \end{cases}$$

2.1. Calcul du travail W_{g2} :

Le travail W_{g2} est échangé entre le gaz parfait et l'extérieur qui est à la pression constante $P_{\text{ext}} = P_0$.

La transformation n'est pas quasi-statique donc il faut utiliser la formule : $\delta W_e = -P_{\text{ext}} dV$.

$$W_{g2} = - \int P_0 dV - P_0 (V_2 - V_1) = -P_0 \left(\frac{n R T_2}{P_0} - \frac{n R T_1}{P_1} \right) = n R T_2 - n R T_1 \frac{P_0}{P_1}$$

soit :

$$W_{g2} = nR (T_1 5^\gamma - T_2)$$

D'autre part, le travail W_{g2} peut être calculé par une deuxième méthode :

$$\Delta U = W_{g1} \quad \text{avec : } Q_e = 0 \quad \text{car la transformation est adiabatique}$$

soit :

$$W_{g2} = \Delta U = nC_v (T_2 - T_1) = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$$

2.2. Calcul de la température T_2 :

d'après la question précédente on a :

$$W_{g2} = nR (T_1 5^\gamma - T_2) = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$$

donc, on déduit :

$$T_2 = \frac{T_1}{\gamma} [1 + 5^\gamma (\gamma - 1)] = 537K$$

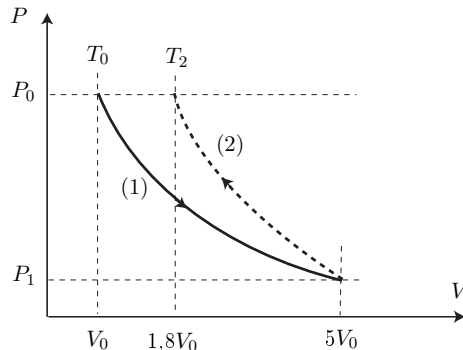
3. Diagramme de CLAPEYRON

Pour tracer le diagramme de CLAPEYRON, il faut définir complètement l'état final de la transformation brutal. Il faut calculer alors le volume V_2 :

On a :

$$V_2 = \frac{nRT_2}{P_0} \quad \text{avec} \quad n = \frac{P_0 V_0}{RT_0} = 0,16 \quad \text{soit :} \quad V_2 = 1,8V_0$$

d'où le diagramme des deux transformations (1) quasi-statique et (2) brutale (donc irréversible)



Problème- 3

Principes de la thermodynamique

3.1 Enoncé

Etude des systèmes fermés

3.1.0.1 Principes et définitions

3.1.0.1.1 Rappeler l'énoncé du premier principe de la thermodynamique, pour un système fermé évoluant entre deux états d'équilibre thermodynamique : on notera E l'énergie mécanique (d'origine cinétique et/ou potentielle) du système.

3.1.0.1.2 Rappeler l'énoncé du deuxième principe de la thermodynamique, pour un système fermé évoluant entre deux états d'équilibre thermodynamique.

3.1.0.1.3 Rappeler la définition d'un gaz parfait. Donner l'expression des fonctions d'état énergie interne U , enthalpie H , entropie $S(T,V)$ et $S(T,p)$ de ce gaz ; T : température thermodynamique, V volume molaire, p pression. On introduira pour cela les capacités thermiques appropriées, qui seront supposées constantes dans le domaine de température considéré.

3.1.0.2 Application : transformation isotherme d'un gaz parfait

On considère une mole de gaz parfait placé dans un cylindre vertical de section S et de grande hauteur, fermé par un piston horizontal mobile sans frottement. Le cylindre, aux parois diathermes, est plongé dans un thermostat de température uniforme et constante T_0 . A l'état initial le gaz est en équilibre thermodynamique avec le milieu extérieur, sa pression est notée p_0 .

3.1.0.3

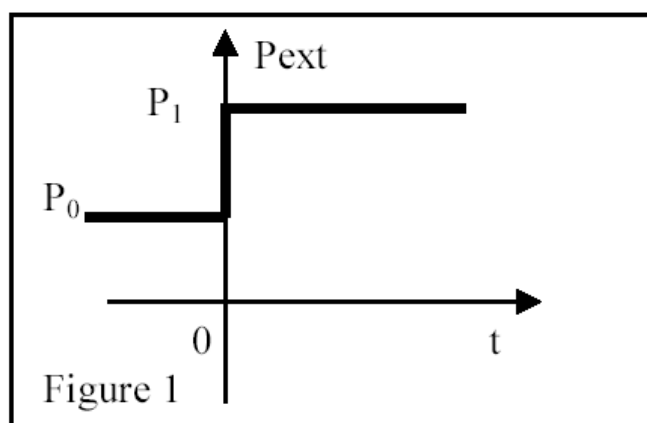
On ajoute alors très progressivement des masselottes sur le piston, jusqu'à ce que la masse finale déposée soit égale à M ; on fait alors l'hypothèse que la transformation subie par le gaz est réversible.

3.1.0.3.1 Exprimer la pression P_1 du gaz dans son état d'équilibre final

3.1.0.3.2 Exprimer la variation d'énergie interne, le travail W et le flux thermique Q reçus par le gaz lors de cette transformation, en fonction de T_0 , P_0 et P_1 .

3.1.0.3.3 Exprimer la variation d'entropie du gaz, l'entropie échangée puis l'entropie créée lors de cette transformation. Commenter.

3.1.0.3.4 A partir du même état initial, on ajoute brutalement l'intégralité de la masse M ; on fait alors l'hypothèse que la pression extérieure exercée sur le piston varie suivant une fonction échelon (figure).



3.1.0.3.5 Exprimer la variation d'énergie interne, le travail W et le flux thermique Q reçus par le gaz lors de cette transformation, en fonction de T_0 , P_0 et P_1 .

3.1.0.3.6 Exprimer la variation d'entropie du gaz, l'entropie échangée puis l'entropie créée lors de cette transformation. Commenter.

On pourra s'aider d'une représentation graphique faisant intervenir les fonctions $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x - 1$.

3.1.0.4 Application : étude théorique d'une machine thermique

3.1.0.4.1 Montrer l'impossibilité du moteur cyclique monotherme, c'est-à-dire d'une machine thermique décrivant une évolution cyclique, et en contact avec une seule source de chaleur, décrite ici comme un thermostat idéal de température T_0 .

3.1.0.4.2 Soit une machine thermique ditherme cyclique, en contact avec une source chaude idéale (température T_C) et une source froide idéale (température T_F)

3.1.0.4.3 Démontrer l'inégalité de Clausius, liant les transferts thermiques Q_C et Q_F reçus par le système pendant la durée d'un cycle en provenance respectivement de la source chaude et froide, et les températures T_F et T_C .

3.1.0.4.4 Dans le cas du moteur ditherme, dans quels sens se font effectivement les transferts thermiques.

3.1.0.4.5 Etablir le théorème de Carnot, montrant l'existence d'un rendement maximal de ce moteur, et explicitant ce dernier.

3.1.0.5 Application : étude d'un climatiseur fonctionnant entre deux sources non idéales

On s'intéresse désormais à un climatiseur domestique cyclique réversible, fonctionnant dans un salon et en contact avec l'air extérieur ; ce dernier est modélisé par un thermostat idéal de température T_0 . L'air contenu dans la pièce, et que l'on désire refroidir, a une capacité thermique totale C constante ; il se comporte comme un gaz parfait, et les transformations sont supposées isochores. A l'état initial la température T de la pièce vaut T_0 . La température finale souhaitée est T_1 .

3.1.0.5.1 Exprimer Q_F , transfert thermique reçu par le fluide évoluant dans le climatiseur, de la part de la source froide c'est-à-dire de l'air du salon.

3.1.0.5.2 En déduire, par application du deuxième principe, l'expression de Q_C , transfert thermique reçu par le fluide évoluant dans le climatiseur, de la part de la source chaude c'est-à-dire de l'air extérieur.

3.1.0.5.3 Déterminer le travail W fourni par le moteur alimentant le climatiseur. Commenter.

3.1.0.5.4 AN : $T_0 = 303 \text{ K}$; $C = 1,3 \times 10^6 \text{ J.K}^{-1}$. On désire abaisser la température intérieure de 10°C en une demi-heure. Calculer la puissance mécanique que doit développer le moteur électrique du climatiseur.

3.2 Corrigé**Étude des systèmes fermés****3.2.0.1 Principes et définitions****3.2.0.1.1 Premier principe**

Pour tout système **fermé**, il existe une fonction des variables d'**état**, **extensive**, **conservative**, appelée **énergie interne** telle que sa variation s'écrive entre deux instants donnés est :

$$\boxed{d(E_m + U) = \delta W_e + \delta Q_e \quad \text{où} \quad \Delta(E_m + U) = W_e + Q_e}$$

où W_e est le travail et Q_e est la chaleur (transfert thermique) échangés entre le système et le milieu **extérieur**.

Si on néglige la variation de l'énergie mécanique $E_m (= E_c + E_p)$:

$$\boxed{dU = \delta W_e + \delta Q_e \quad \text{où} \quad \Delta U = W_e + Q_e}$$

3.2.0.1.2 Deuxième principe :

Pour tout système **fermé**, il existe une fonction des variables d'**état**, **extensive**, **non conservative**, appelée **entropie** telle que sa variation s'écrive entre deux instants donnés,

$$\boxed{\Delta S = S_e + S_p}$$

avec

$$\boxed{S_e = \int \frac{\delta Q}{T_f}}$$

et

$$S_p > 0$$

- $S_p > 0$ étant l'entropie créée (la production d'entropie) ;
- T_f est la température thermodynamique en chaque point de la surface fermée S qui délimite le système.
- S_e représente l'entropie échangée entre le système et le milieu extérieur :

$$S_e = \int_1^2 \frac{\delta Q_e}{T_f}$$

où δQ_e l'énergie échangée sous forme de chaleur (au niveau de la)**frontière** extérieure/système T_f étant la température de la frontière.

Remarque : Pour une transformatoion réversible $T_f = T$ car il y a équilibre sur tout le système à la température T y compris sa frontière.

3.2.0.1.3 Gaz parfait

- Il existe plusieurs définitions d'un gaz parfait :

Définition 1 : Un gaz est parfait s'il vérifie l'équation d'état : $PV = nRT$, où P est la pression en Pa, V le volume du gaz en m^3 , T en K et n en mol.

Définition 2 : La définition thermoélastique : C'est un gaz pour lequel $\alpha = 1/T$ et $\kappa_T = 1/p$.

Définition 3 : La définition énergétique : C'est un gaz qui vérifie les deux lois de JOULE à savoir que U et H ne dépendent que de la température.

Définition 4 (Définition expérimentale) : C'est la comportement de tout gaz sous faible pression.

- Formules pour gaz parfait (Lois de Joule) :

$$\Delta U = \int C_v dT = C_v \Delta T$$

$$\Delta H = \int C_p dT = C_p \Delta T$$

L'entropie au cours d'une transformation d'un GP est donnée par :

$$S(T, V) = C_v \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + nR \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + S_0$$

où

$$S(T, P) = C_p \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - nR \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) + S_0$$

3.2.0.2 Application : transformation isotherme d'un gaz parfait

3.2.0.2.1 Sur le piston, s'exercent les forces pressante et la poids de M. A l'équilibre, les forces s'appliquant sur le piston est nul donc

$$-P_0 S - Mg + P_1 = 0$$

donc

$$P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}$$

3.2.0.2.2 Les parois sont diathermes alors $T_1 = T_0$. Le gaz étant parfait, $V_1 = V_0 \frac{p_0}{p_1}$.

D'après le 1er principe : $\Delta U = W + Q$.

La transformation étant **isotherme** et comme U ne dépend que de T alors :

$$\Delta U = 0$$

alors

$$Q = -W_{\text{reversible}} = + \int_{V_0}^{V_1} P dV_{G.P.} = + \int_{V_0}^{V_1} nRT_0 \frac{dV}{V}_{T=cte} = nRT_0 \ln \left(\frac{V_1}{V_0} \right)_{G.P.} = -nRT_0 \ln \left(\frac{P_1}{P_0} \right)$$

3.2.0.2.3 La variation d'entropie vaut

$$\Delta S = -R \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right)$$

l'entropie d'échange est

$$S^e = \frac{Q}{T_0} = -R \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right)$$

d'où :

$$S^c = \Delta S - S^e = 0$$

Ceci est normal car la transformation est supposée réversible.

3.2.0.2.4 La transformation est **brusque**. Nous avons toujours

$$\Delta U = 0 \quad (T = cte \text{ et GP})$$

car U est une fonction d'état et que la transformation est isotherme et que U ne dépend que de T .
et le travail est :

$$W = -P_1 (V_1 - V_0) = -RT_0 \left(1 - \frac{P_1}{P_0} \right) = -Q$$

où P_1 est la pression finale.

3.2.0.2.5 La variation d'entropie vaut toujours

$$\Delta S = -R \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right)$$

L'entropie d'échange est :

$$S^e = \frac{Q}{T_0} = R \left(1 - \frac{P_1}{P_0} \right)$$

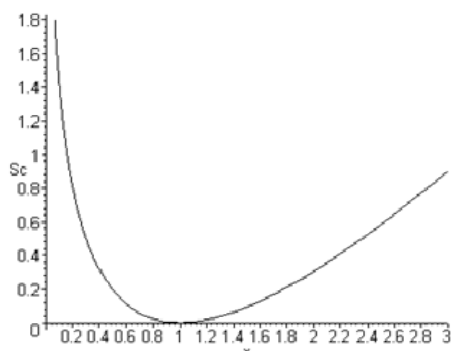
La création d'entropie vaut :

$$S^c = \Delta S - S^e = R \left(-\ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right) + \left(1 - \frac{P_1}{P_0} \right) \right)$$

En posant $x = \frac{P_1}{P_0}$ il vient :

$$S^c = \Delta S - S^e = R (-\ln(x) + (1 - x)) = R(g(x) - f(x))$$

Nous constatons que $S^c > 0$ ce qui traduit l'irréversibilité.



3.2.0.3 Application : étude théorique d'une machine thermique

3.2.0.3.1 Le moteur étant cyclique

$$\Delta U_{cycle} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S_{cycle} = 0$$

car U et S sont des fonctions d'état.

D'après le second principe

$$\Delta S = S^c + S^e = S^c + \frac{Q}{T_0} = 0$$

car le système est en contact avec un thermostat de température $T_0 = cte$, donc la température de sa surface est T_0 .

Comme $S^c \geq 0$ alors

$$Q \leq 0$$

Remarque : lorsque le système est en équilibre thermodynamique, sa température est uniforme (même température à l'intérieur et à la surface).

D'après le premier principe :

$$W_{1er\ principe} = \Delta U - Q_{cycle} = -Q \geq 0$$

La machine ne peut que recevoir du travail (car $W \geq 0$). On ne peut réaliser un moteur avec une seule source de chaleur.

3.2.0.3.2 D'après le second principe pour un cycle :

$$\Delta S = S^c + S^e = S^c + \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_F}{T_F} = 0$$

alors comme $S^c \geq 0$ alors :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$$

C'est l'inégalité de CLAUSIUS.

3.2.0.3.3 Dans le cas d'un moteur, le système reçoit de la chaleur de la source chaude ($Q_c > 0$), cède du travail ($W < 0$) et de la chaleur à la source froide ($Q_F < 0$)

3.2.0.3.4 Le rendement d'un moteur est le rapport de ce que l'on produit sur ce que l'on consomme soit :

$$r = \left| \frac{W}{Q_c} \right| = -\frac{W}{Q_c}$$

d'où :

$$r = \left| \frac{W}{Q_c} \right| = -\frac{W}{Q_c} \underset{\text{principe 1er}}{=} \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} \underset{\text{principe 2nd}}{\leq} 1 - \frac{T_f}{T_c} = r_{\max}$$

3.2.0.4 Application : étude d'un climatiseur fonctionnant entre deux sources non idéales

3.2.0.4.1 $Q_F = -Q_{salon} \underset{isochore}{=} -\Delta U_{salon} = -C(T_1 - T_0)$

3.2.0.4.2 Le climatiseur fonctionne cycliquement et réversiblement :

$$dS \underset{\text{principe 2nd}}{=} \delta S^e + \delta S^c \underset{\text{rev}}{=} \delta S^e \underset{\text{cycle}}{=} 0 = \frac{\delta Q_c}{T_c} + \frac{\delta Q_F}{T_T} = \frac{\delta Q_c}{T_0} + \frac{-CdT}{T} = 0$$

alors

$$Q_c = T_0 \int_{T_0}^{T_1} C \frac{dT}{T} = CT_0 \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right)$$

3.2.0.4.3 D'après le premier principe :

$$\Delta U \underset{\text{principe 1er}}{=} W + Q_c + Q_F \underset{\text{cycle}}{=} 0$$

donc

$$\underbrace{W}_{>0} = -Q_c - Q_F = \underbrace{-CT_0 \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right)}_{>0} + \underbrace{C(T_1 - T_0)}_{<0}$$

Nous avons cette fois un climatiseur, nous enlevons donc de la chaleur à la source froide (salon) pour le donner à la source chaude (air extérieur). Pour cela on fournit de l'énergie mécanique au climatiseur.

Problème- 4

Thermodynamique de l'atmosphère

4.1 Enoncé (d'après CNC 2004)

L'épreuve aborde quelques aspects de la physique de l'atmosphère terrestre. Dans toute la suite on négligera les différents mouvements de la Terre de manière à pouvoir assimiler le référentiel terrestre $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}(O, x, y, z)$ à un référentiel galiléen.

Tout au long de cette partie, on considérera que l'air atmosphérique est en équilibre hydrostatique sous la seule influence du champ de pesanteur. D'autre part on négligera la rotondité de la Terre de sorte que les variables d'état ne dépendent que de l'altitude z .

L'intensité g du champ de pesanteur sera supposée constante. Tous les gaz rencontrés dans cette étude seront considérés comme parfaits.

Données utiles

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$;
- Intensité du champ de pesanteur terrestre : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$;
- Pression atmosphérique à l'altitude $z = 0 \text{ km}$: $p_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$;
- Température ambiante à l'altitude $z = 0 \text{ km}$: $T_0 = 290 \text{ K}$;
- Masse molaire de l'air : $M_a = 29 \times 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$;
- Masse molaire de l'hélium : $M_{He} = 4 \times 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$;
- Rapport des capacités calorifiques de l'air : $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 7/5$;
- Rapport des capacités calorifiques de l'hélium : $\gamma' = \frac{c_p}{c_v} = 5/3$.

1. Étude préliminaire

1.1. Équilibre hydrostatique

1.1.1. Montrer que la pression $p_a(z)$ de l'air à l'altitude z est reliée à l'intensité g du champ de pesanteur et à la masse volumique μ_a de l'air par la relation :

$$\frac{dp_a(z)}{dz} = -g\mu_a(z)$$

Pour cela on pourra considérer une tranche d'atmosphère comprise entre les altitudes z et $z + dz$ et exprimer la condition de son équilibre mécanique après avoir dressé un bilan des forces auxquelles elle est soumise.

1.1.2. Exprimer la masse volumique μ_a de l'air en fonction de sa température T_a et de sa pression p_a . Calculer numériquement la masse volumique de l'air à l'altitude $z = 0$ notée μ_0 .

1.1.3. Dédurre de ce qui précède l'équation différentielle liant la pression p_a à l'altitude z pour un profil de température $T_a(z)$ donné.

1.2. Application : Modèle de l'atmosphère isotherme

Dans cette question *on suppose* que la température de l'atmosphère est uniforme et partout égale à T_0 .

1.2.1. Montrer que la pression $p_a(z)$ est alors donnée par :

$$p_a(z) = p_0 \exp\left(\frac{-z}{H_a}\right)$$

et donner l'expression de la constante H_a .

1.2.2. Pourquoi la constante H_a est-elle appelée «échelle de hauteur»? En donner une interprétation graphique. Calculer numériquement H_a . Commenter le résultat obtenu en calculant la distance Δz nécessaire pour que p_a varie de 1%.

1.1.2.3. Établir dans ces conditions l'expression de $\mu_a(z)$ en fonction de μ_0 et z .

1.3. Poussé d'ARCHIMÈDE

Considérons un volume \mathcal{V} , limité par une surface fermée Σ au sein de l'atmosphère au repos dans le champ de pesanteur \vec{g} .

Montrer que le système contenu à l'intérieur de la surface Σ est soumis de la part du reste de l'atmosphère à une force pressante totale, appelée aussi force de poussée $\vec{\Pi}_a$ ou poussée d'ARCHIMÈDE, donnée par :

$$\vec{\Pi}_a = -m_d \vec{g}$$

$m_d = \int_{\mathcal{V}} \mu d\tau$ est la masse d'air déplacé c'est-à-dire la masse qu'aurait le volume \mathcal{V} s'il était occupé par l'air atmosphérique dans les conditions d'équilibre de l'atmosphère.

On rappelle que les forces de pression peuvent être décrites par une densité volumique d'effort donnée, en un point M la pression $p_a(M)$ est $\vec{f}_p(M) = -\vec{\nabla} p_a(M)$. D'autre part, la condition d'équilibre hydrostatique peut être généralisée par : $\vec{\nabla} p_a(M) = \mu_a \vec{g}$.

2. Sondage atmosphérique

Un ballon-sonde est constitué par une enveloppe fermée (ballon) à laquelle est accrochée une nacelle contenant des instruments de mesure : sondes de température, de pression, d'humidité, d'hygrométrie,... ainsi que ceux nécessaires à la transmission radio des données.

L'enveloppe, la nacelle et les instruments qu'elle contient ont une masse totale $m = 20$ kg.

Initialement ($z = 0$ km) l'enveloppe est partiellement gonflée à l'aide d'une quantité de matière n d'hélium.

Au besoin, on pourra négliger la variation de la pression d'un point à un autre du ballon-sonde. D'autre part, on négligera le volume de la nacelle devant celui du ballon.

Le diamètre du ballon ne peut dépasser une valeur critique $\Phi_c = 8$ m. Au-delà de Φ_c le ballon éclate. On négligera la raideur de l'enveloppe.

2.1. Calculer numériquement la valeur du volume maximum V_c du ballon.

2.2. Exprimer la résultante \vec{F} des forces qui s'exercent sur le ballon-sonde à une altitude z quelconque dans l'hypothèse de l'atmosphère isotherme et de l'équilibre hydrostatique. On exprimera le résultat en fonction de m , n , M_{He} , M_a et g .

2.3. Montrer qu'il existe une valeur minimale n_{\min} de la quantité de matière n d'hélium qui sert à gonfler le ballon au-delà de laquelle le ballon peut décoller. En déduire le volume minimum V_{\min} qui permet le décollage. Calculer numériquement n_{\min} et V_{\min} .

2.4. Le ballon est gonflé avec une masse $m_{He} = 9$ kg d'hélium.

2.4.1. Cela lui permet-il de décoller ?

2.4.2. Justifier brièvement pourquoi on peut considérer que lors de l'ascension du ballon, l'hélium subit une détente *adiabatique*. Par la suite on supposera que cette détente est quasi-statique.

2.4.3. Calculer la valeur numérique du volume initial V_0 du ballon.

2.4.4. Déterminer l'expression littérale et en déduire la valeur numérique la hauteur maximale z_m accessible par le ballon dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme de température T_0 (cf. 1.2.). Que se passe-t-il lorsque z atteint z_m ?

2.5. Lors de l'ascension du ballon, un système de transmission hertzienne permet de récupérer au sol les données enregistrées. La figure 1 donne le profil de variation verticale de la température relevé par le ballon-sonde dans la troposphère ($0 \text{ km} \leq z \leq 11 \text{ km}$). L'hypothèse d'une atmosphère isotherme est-elle vérifiée dans les premières couches de l'atmosphère ? Expliquer brièvement pourquoi l'air au sol est plus chaud qu'en altitude.

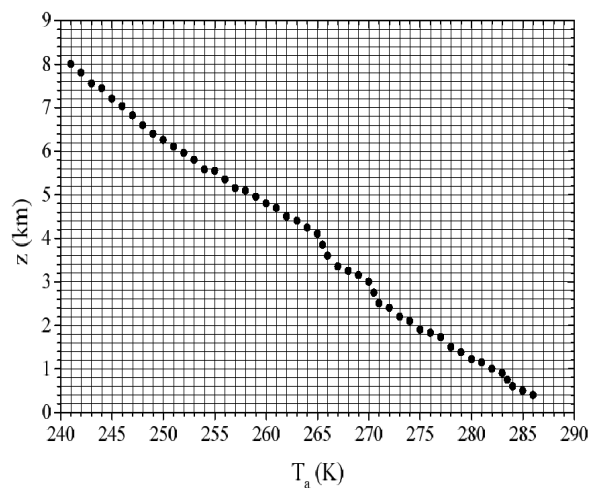


Figure 1: Profil vertical de température mesuré par le ballon-sonde.

2.6. Dans la troposphère règne un gradient de température $\frac{dT}{dz} = -\Gamma$ constant en première approximation.

2.6.1. Déterminer graphiquement le gradient thermique Γ qui règne dans la troposphère.

2.6.2 Déterminer les expressions donnant l'évolution de la pression $p_a(z)$ et de la masse volumique $\mu_a(z)$ de l'air dans la troposphère.

2.6.3 Représenter graphiquement $p_a(z)$ et $\mu_a(z)$ en fonction de z et commenter en comparant avec le modèle de l'atmosphère isotherme.

4.2 Corrigé

1.

1.1.1 La tranche d'air comprise entre z et $z + dz$ est en équilibre. Donc,

$$P_a(z)S - P_a(z + dz)S - \mu_a S dz g = 0$$

soit :

$$\frac{dP_a}{dz} = -\mu_a g$$

1.1.2. L'air étant supposé comme un gaz parfait, d'où : $P_a V = \frac{m}{M_a} RT_a$.

soit :

$$\mu_a = \frac{m}{V} = \frac{P_a M_a}{RT_a} = 1,22 \text{ kg.m}^{-3}$$

1.1.3. D'après les relations précédentes on obtient :

$$\frac{dP_a}{dz} + \frac{M_a g}{RT_a} P_a = 0$$

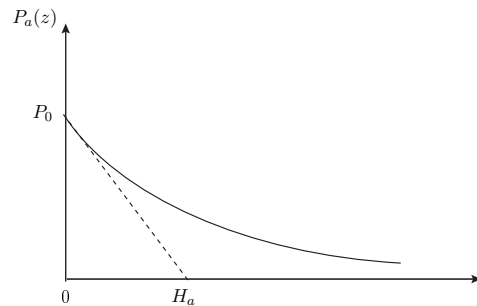
1.2.

1.2.1. En intégrant la relation précédente, il vient :

$$P_a = P_0 \exp(-z/H_a)$$

avec : $H_a = \frac{RT_0}{M_a g}$

1.2.2. La constante H_a est appelé échelle de hauteur car c'est une distance caractéristique de la décroissance de la pression avec la hauteur z .



Application numérique :

$$H_a = 8,48 \text{ km}$$

En $z_1 = 0$ on a $P_{z_1} = P_0$, si en $z = z_2$ la pression varie de 1%, alors :

$$P_{z_2} = 0,99 P_{z_1}$$

soit :

$$P_0 \exp(-z_2/H_a) = 0,99 P_0 \exp(-z_1/H_a)$$

d'où :

$$\Delta z = z_2 - z_1 = -H_a \ln(0,99)$$

Application numérique : $\Delta z = 85,2 \text{ m}$.

Commentaire : On peut considérer la pression comme uniforme sur des distances de l'ordre d'une dizaines de mètres.

1.2.3.

On a :

$$P_a = P_0 \exp(-z/H_a) \quad \text{et} \quad \mu_a = \frac{P_a M_a}{RT_0}$$

d'où :

$$\mu_a = \mu_0 \exp(-z/H_a)$$

avec : $\mu_0 = \frac{P_0 M_a}{RT_0}$

1.3. Poussée d'ARCHIMÈDE

1.3.1. La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_a$ est donnée par :

$$\vec{\Pi}_A = - \oint_{\Sigma} P_a d\vec{S} = - \int_V \vec{\nabla} P_a d\tau$$

d'où :

$$\vec{\Pi}_A = - \int_V \mu_a \vec{g} d\tau = - \vec{g} \int_V \mu_a d\tau$$

soit :

$$\vec{\Pi}_A = -m_d \vec{g}$$

avec :

$$m_d = \int_V \mu_a d\tau$$

2.

2.1. Le volume V_c est : $V_c = \frac{4\pi}{3} \frac{\Phi_c^3}{8} \approx 268 \text{ m}^3$.

2.2. Le poids du système est :

$$\vec{P} = (m + n M_{H_2}) \vec{g}$$

La poussée d'Archimède exercée sur le ballon est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé par le ballon. Le ballon a le volume des n moles de H_2 qu'il contient.

L'air déplacé et l'hydrogène contenu dans le ballon sont des gaz parfaits qui ont la même température et la même pression (équilibre hydrostatique). Donc, le nombre de moles d'air déplacé est égale à n .

D'où :

$$\vec{\Pi}_A = -n M_a \vec{g}$$

La somme des forces appliquées au ballon est :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{\Pi}_A = (m + n(M_{H_2} - M_a)) \vec{g}$$

2.3. Le ballon décolle si $\vec{F} \cdot \vec{e}_z > 0$ soit :

$$(m + n M_{H_2}) g < n M_a g$$

ou bien :

$$n > \frac{m}{M_a - M_{H_2}} = n_{\min} \approx 800 \text{ moles}$$

Le volume minimal correspondant est :

$$V_{\min} = n_{\min} \frac{RT_0}{P_0} = 19 \text{ m}^3$$

2.4.

2.4.1. On a : $n_{H_2} = \frac{m_{H_2}}{M_{H_2}} = 2250$ moles.

Puisque $n_{H_2} > n_{\min}$ le ballon décolle.

2.4.2. On peut supposer que l'hélium subit une détente adiabatique car la conductivité thermique des gaz est très faibles.

2.4.3. Le volume initial du ballon est :

$$V_0 = n_{H_2} \frac{RT_0}{P_0} = 53,5 \text{ m}^3$$

2.4.4. La détente de l'hélium (gaz parfait) étant adiabatique et quasi-statique (ie, isentropique), d'où :

$$P_0 V_0^{\gamma'} = P_c V_c^{\gamma'} = P_0 \exp\left(\frac{-z_m}{H_a}\right) V_c^{\gamma'}$$

soit :

$$z_m = \gamma' H_a \ln\left(\frac{V_c}{V_0}\right) = 22,7 \cdot 10^3 \text{ m}$$

À l'altitude $z = z_m$, le ballon s'éclate.

2.5. L'hypothèse d'une atmosphère isotherme n'est pas vérifiée dans les premières couches atmosphérique car l'air au sol est plus chaud qu'en altitude à cause des échanges thermiques conducto-convectifs entre le sol chaud et la couche limite atmosphérique.

2.6.

2.6.1. D'après la courbe on déduit la pente Γ :

$$\Gamma \approx 6.10^{-3} \text{ K m}^{-1}$$

2.6.2. On a :

$$\frac{dT_a}{dz} = -\Gamma = \text{cte}$$

d'où :

$$T_a = -\Gamma z + T_0$$

or :

$$\frac{dP_a}{dz} + \frac{M_a g}{RT_0} P_a = 0$$

il vient :

$$\frac{dP_a}{P_a} = -\frac{M_a g}{RT_0} \frac{dz}{T_0 - \Gamma z}$$

En intégrant, on obtient :

$$\ln\left(\frac{P_a}{P_0}\right) = \frac{M_a g}{R\Gamma} \ln\left(\frac{T_0 - \Gamma z}{T_0}\right)$$

la pression est alors :

$$P_a(z) = P_0 \left(1 - \frac{\Gamma z}{T_0}\right)^{\frac{M_a g}{R\Gamma}}$$

D'autre part on a :

$$\mu_a = \frac{M_a P_a}{R T_a}$$

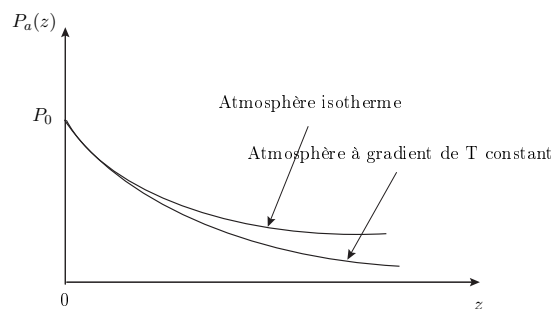
d'où :

$$\mu_a(z) = \mu_0 \left(1 - \frac{\Gamma z}{T_0}\right)^{\frac{M_a g}{R\Gamma} - 1}$$

2.6.2. Représentation graphique :

Commentaire :

- La pression diminue avec l'altitude dans les deux cas.
- Les deux courbes sont pratiquement confondues dans les premiers kilomètres.
- même commentaires pour μ_a .



Problème- 5

Étude d'un réservoir à gaz

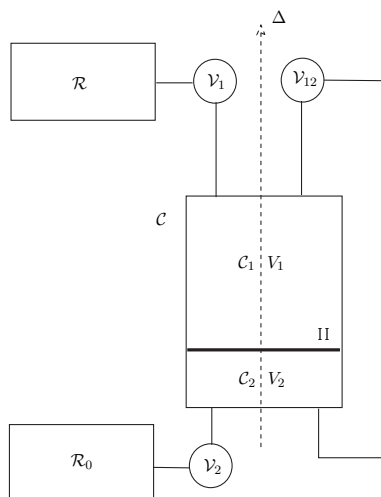
5.1 Énoncé (d'après CNC 2006)

On dispose d'un réservoir \mathcal{R} de température constante de grande capacité, contenant un gaz diatomique G , sous une pression $P_R = 25 \cdot 10^5$ Pa et une température $T_0 = 300$ K constantes. On admettra dans la suite que le volume de ce réservoir est tel que l'on pourra l'assimiler à un générateur de gaz comprimé parfait. C'est-à-dire que la pression dans le réservoir \mathcal{R} est indépendante de la quantité de gaz qui peut en sortir. On admettra de plus dans tout le problème que G est un gaz parfait diatomique rigide de masse molaire $M = 28$ g/mol. On prendra pour valeur de la constante des gaz parfaits $R = 8,31$ J/K/mol.

Un cylindre indéformable \mathcal{C} isolé thermiquement de l'extérieur est séparé, à l'aide d'un piston Π à parois athermanes, en deux compartiments \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de volumes respectifs V_1 et V_2 . Le piston Π de masse négligeable, peut glisser sans frottement tout en restant perpendiculaire à l'axe Δ du cylindre \mathcal{C} (figure 1).

\mathcal{C} peut être mis en communication avec le réservoir \mathcal{R} par l'intermédiaire d'une vanne \mathcal{V}_1 et avec \mathcal{C}_2 par l'intermédiaire d'une vanne \mathcal{V}_{12} .

\mathcal{C}_2 peut être mis en communication avec un autre réservoir \mathcal{R}_0 au moyen d'une vanne \mathcal{V}_2 .



On négligera systématiquement tout transfert thermique à travers une vanne fermée.

1.1. On note γ le rapport des capacités calorifiques à pression et à volume constant et on donne, pour les gaz diatomiques rigides, $\gamma = 7/5$.

1.1.1. Donner un exemple de gaz diatomique.

1.1.2. Exprimer les capacités calorifiques molaires à volume constant c_v et à pression constante c_p (pour un gaz parfait diatomique rigide en fonction de γ et R).

Application numérique.

1.2. Le piston Π est bloqué. Le compartiment \mathcal{C}_1 de volume $V_1 = 1$ à L, constant contient le gaz G à la température $T_0 = 300$ K et sous la pression $P_0 = 1.10^5$ Pa. Les vannes \mathcal{V}_{12} et \mathcal{V}_2 étant fermées, on ouvre *brutalement* la vanne \mathcal{V}_1 à de remplir le compartiment \mathcal{C}_1 avec le gaz G .

1.2.1. Exprimer la quantité de matière N_1 du gaz contenu initialement dans le compartiment \mathcal{C}_1 en fonction des données du problème. Application numérique.

1.2.2. Que vaut la pression P_1 dans le compartiment \mathcal{C}_1 à la fin de l'opération ?

1.2.3. Exprimer de même la quantité de matière N du gaz qui passe du réservoir \mathcal{R} dans le compartiment \mathcal{C}_1 en fonction de R, P_0, P_R, V_1, T_0 et de la température T_1 du gaz contenu dans \mathcal{C}_1 à la fin de l'opération.

On considère comme système le gaz contenu initialement dans \mathcal{C}_1 (quantité de matière N_1) et le gaz qui passe de \mathcal{R} à \mathcal{C}_1 (quantité de matière N).

1.2.4. Exprimer la variation ΔU de l'énergie interne du système en fonction de N, N_1, T_0, T_1, γ et R .

1.2.5 Exprimer le travail W reçu par le système en fonction de la pression P_R et du volume V_N qu'occupait la quantité de matière N du gaz dans le réservoir \mathcal{R} .

1.2.6. En déduire la température finale T_1 du gaz. Pour cela on pourra appliquer le premier principe de la thermodynamique après avoir montré que la transformation peut être considérée comme adiabatique. On exprimera T_1 en fonction de P_R, P_0, T_0 et γ . Application numérique.

1.3. Le piston Π étant toujours bloqué et le compartiment \mathcal{C}_2 parfaitement vide, on ferme la vanne \mathcal{V}_1 puis on ouvre la vanne \mathcal{V}_{12} . La tuyauterie est thermiquement isolée de l'extérieur, mais permet l'échange thermique entre \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 quand \mathcal{V}_{12} est ouverte. On donne $V_1 = 10$ L, $V_2 = 2,0$ L. Soit T_2 la température du gaz lorsque l'équilibre est atteint.

1.3.1. Comment appelle-t-on une telle transformation ?

1.3.2. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, montrer que $T_2 = T_1$.

1.3.3. La transformation du gaz est-elle réversible ? Déterminer l'expression de la variation d'entropie ΔS en fonction de P_R, V_1, V_2 et T_1 . On justifiera soigneusement la méthode utilisée. Commenter le résultat obtenu.

1.3.4. Calculer numériquement ΔS et commenter le résultat obtenu. On donne $\ln(6/5) \approx 0,18$.

1.3.5. L'état final du système dépend-il de l'ordre de fermeture et d'ouverture des vannes \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_{12} ? Expliquer brièvement.

1.4 Le piston Π étant bloqué et la vanne \mathcal{V}_{12} fermée, le compartiment \mathcal{C}_1 de volume $V_1 = 10$ L est rempli à

l'aide du réservoir \mathcal{R} . La température du gaz contenu dans \mathcal{C}_1 est alors $T_0 = 300$ K. Le compartiment \mathcal{C}_2 est rempli à l'aide d'un réservoir \mathcal{R}_0 contenant un gaz parfait G_0 à la pression $P = P_R/x$.

On donne $c_{v0} = 3R$ la capacité calorifique molaire à volume constant de G_0 et on note γ_0 son rapport de capacités calorifiques à pression constante et à volume constant. Dans l'état initial, la température du gaz G_0 contenu dans \mathcal{V}_2 est $T_0 = 300$ K et on note le volume V_2^i du compartiment \mathcal{V}_2 sous la forme $V_2^i = V_0 x$ où $V_0 = 0,1$ L $x = P_R/P$ est un paramètre réel pouvant varier de 0 à x_{\max} .

Les vannes \mathcal{V}_{12} et \mathcal{V}_2 restant fermées, la vanne \mathcal{V}_1 est à nouveau ouverte. On débloque le piston Π et on le bloque à nouveau dès que la pression est la même dans les deux compartiments.

1.4.1. Déterminer la quantité de matière n_2 du gaz G_0 dans le compartiment \mathcal{C}_2 en fonction de P_R, V_0 et T_0 .

1.4.2. Donner l'expression du volume V_2 occupé par le gaz de \mathcal{C}_2 dans l'état final en fonction de sa température T ainsi que de T_0 et V_0 .

1.4.3. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, montrer que la température $T(x)$ du gaz G_0 contenu dans \mathcal{C}_2 est donnée par :

$$T(x) = \frac{3+x}{4}T_0$$

1.4.4. En déduire l'expression de V_2 en fonction de V_0 et x .

1.4.5. Déterminer la variation d'entropie ΔS du gaz G_0 contenu dans \mathcal{C}_2 en fonction de P_R, V_0, T_0 et x .

1.4.6. Applications numériques

1.4.6.1. Calculer numériquement T et ΔS pour $x = 25$. On donne $\ln 2 \approx 0,69$ et $\ln 3 \approx 1,1$.

1.4.6.2. Déterminer la valeur numérique de ΔS pour $x = 1$ et pour x tendant vers zéro.

1.4.6.3. Déterminer x_{\max} ainsi que la valeur numérique de ΔS lorsque $x = x_{\max}$. On donne $\ln 7450 \approx 8,92$.

1.4.6.4. Représenter ΔS en fonction de x et commenter le graphique obtenu.

5.2 Corrigé

1.1.1. Exemple de gaz diatomique : H_2, O_2 .

1.1.2. D'après la relation MAYER, on a : $c_p - c_v = R$

et puisque : $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$

il vient :

$$c_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \simeq 29,1 \text{ J.K.mol}^{-1} \quad \text{et} \quad c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \simeq 20,7 \text{ J.K.mol}^{-1}$$

1.2.1. La quantité de gaz initialement dans \mathcal{C}_1 est :

$$N_1 = \frac{P_0 V_1}{RT_0} \simeq 0,4 \text{ mol}$$

1.2.2. La pression du gaz dans \mathcal{C}_1 à la fin de l'opération est :

$$P_1 = P_R = 25.10^5 \text{ Pa}$$

1.2.3 La quantité de gaz N est telle que :

$$N + N_1 = \frac{P_R V_1}{RT_1} \quad \text{et} \quad N_1 = \frac{P_0 V_1}{RT_0} \quad \text{d'où} : \quad N = \frac{V_1}{R} \left(\frac{P_R}{T_1} - \frac{P_0}{T_0} \right)$$

1.2.4 La variation de l'énergie interne du gaz parfait est :

$$\Delta U = (N + N_1) c_v (T_1 - T_0) = \frac{R(N + N_1)}{\gamma - 1} (T_1 - T_0)$$

1.2.5 Le travail reçu par le système est :

$$W = -P_R [V_1 - (V_1 + V_N)] = P_R V_N$$

1.2.6 Puisque les parois sont athermanes, on peut considérer la transformation adiabatique. Le premier principe de la thermodynamique, appliqué au système {gaz contenu initialement dans \mathcal{C}_1 + gaz qui a passé de \mathcal{R} à \mathcal{C}_1 } :

$$\Delta U = (N + N_1) \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) = W = P_R V_N$$

or :

$$N + N_1 = \frac{P_R V_1}{RT_1} \quad \text{et} \quad P_R V_N = NRT_0$$

donc :

$$T_1 = \frac{\gamma P_R}{P_R + P_0(\gamma - 1)} T_0 \simeq 4,13.10^2 \text{ K}$$

1.3.1 C'est une détente de JOULE- GUY-LUSSAC (détente dans le vide à U constante).

1.3.2 On applique le premier principe au système Système {gaz dans \mathcal{C}_1 + les compartiments \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 }.

Puisque les parois de ce système sont athermanes et indéformables, le transfert thermique et le travail échangés avec l'extérieur sont nuls, alors :

$$\Delta U = (N + N_1) c_v (T_2 - T_1) = 0 \quad \text{d'où} \quad T_2 = T_1$$

1.3.3 La transformation est irréversible car la détente dans le vide se fait de manière brutale.

L'entropie étant une fonction d'état, on peut imaginer une transformation réversible entre l'état initial (P_R, V_1, T_1) et l'état final $(P_2, V_1 + V_2, T_2)$, d'où :

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} = \frac{(N + N_1) c_v dT + P dV}{T}$$

En tenant compte du fait que $\frac{P}{T} = \frac{(N+N_1)R}{V}$, on obtient après intégration :

$$\Delta S = (N + N_1) c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + (N + N_1) R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Or : $T_2 = T_1$, donc :

$$\begin{aligned} \Delta S &= (N + N_1) R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} \\ &= \frac{P_R V_1}{T_1} \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} \end{aligned}$$

Commentaire : $\Delta S > 0$, car la transformation est adiabatique ($\Delta S_e \Rightarrow \Delta S = S^c > 0$).

1.3.4. Application numérique :

$$\Delta S \simeq 11 \text{ J.K}^{-1} > 0$$

1.3.5 Si on ferme d'abord \mathcal{V}_1 puis on ferme \mathcal{V}_{12} , le nombre de moles qui subiront la détente est $N + N_1$. Cependant, si ouvre d'abord \mathcal{V}_{12} , puis on ferme \mathcal{V}_1 le nombre de moles qui subiront la détente n'est plus le même. Donc l'état final dépend de l'ordre de fermeture et d'ouverture des vannes.

1.4.1. La quantité de gaz dans \mathcal{C}_2 est :

$$n_2 = \frac{P_R V_0}{R T_0}$$

1.4.2. À l'état final, la pression dans \mathcal{C}_2 est P_R , donc :

$$P_R V_2 = n_2 R T \implies V_2 = \frac{n_2 R T}{P_R} = \frac{T}{T_0} V_0$$

1.4.3. La variation d'énergie interne du gaz (parfait) est :

$$\Delta U = n_2 c_{v0} (T - T_0)$$

Le travail reçu par le gaz durant la transformation brutale est :

$$W = -P_R (V_2 - x V_0)$$

or la transformation est adiabatique ($Q_e = 0$), alors :

$$\Delta U = W \implies n_2 c_{v0} (T - T_0) = -P_R (V_2 - x V_0)$$

D'autre part on a : $\frac{V_2}{V_0} = \frac{T}{T_0}$, $n_2 = \frac{P_R V_0}{R T_0}$ et $c_{v0} = 3R$, il vient :

$$T = \frac{3+x}{4} T_0$$

1.4.4. On a :

$$V_2 = \frac{T}{T_0} V_0 \text{ et } T = \frac{3+x}{4} T_0 \text{ d'où : } V_2 = \frac{3+x}{4} V_0$$

1.4.5. L'entropie du gaz G_0 est :

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} = \frac{n_2 c_{v0} dT + P dV}{T}$$

or :

$$n_2 = \frac{P_R V_0}{R T_0}, \quad c_{v0} = 3R \quad \text{et} \quad \frac{P}{T} = \frac{n_2 R}{V}$$

d'où :

$$dS = \frac{P_R V_0}{T_0} \left(3 \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} \right) \implies \Delta S = \frac{P_R V_0}{T_0} \left(3 \ln \frac{T}{T_0} + \ln \frac{V_2}{x V_0} \right)$$

et puisque :

$$T = \frac{3+x}{4} T_0 \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{3+x}{4} V_0$$

alors :

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{P_R V_0}{T_0} \left(3 \ln \frac{3+x}{4} + \ln \frac{3+x}{4x} \right) \\ &= \frac{P_R V_0}{T_0} \left(4 \ln \frac{3+x}{4} - \ln x \right) \end{aligned}$$

1.4.6. Applications numériques

1.4.6.1. Pour $x = 25$ on trouve :

$$T = 2100 \text{ K}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{25 \cdot 10^5 \times 0,1 \cdot 10^{-3}}{300} \left(4 \ln \frac{28}{4} - \ln 25 \right) \\ &\simeq 9,2 (\ln 3 - \ln 2) \\ &\simeq 3,7 \text{ J.K}^{-1} \end{aligned}$$

1.4.6.2. Pour $x = 1$, $\Delta S = 0$ et pour $x \rightarrow 0$, $\Delta S \rightarrow +\infty$ 1.4.6.3 Le volume initial maximal du gaz dans \mathcal{C}_2 est :

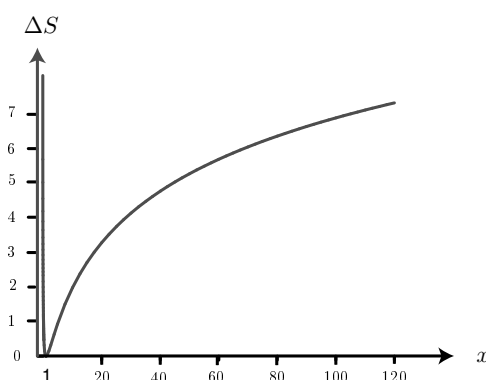
$$V_{2\max}^i = V_1 + V_2 = V_0 x_{\max} \quad \text{avec :} \quad V_0 = 12 \text{ L}$$

d'où :

$$x_{\max} = 120$$

La valeur de ΔS pour $x = x_{\max}$ est :

$$\begin{aligned} \Delta S &\simeq 0,83 \left(4 \ln \frac{123}{4} - \ln 120 \right) \\ &\simeq 0,83 \ln \left[\left(\frac{123}{4} \right)^4 \frac{1}{120} \right] \\ &\simeq 0,83 \ln 7450 \\ &\simeq 7,4 \text{ J.K}^{-1} \end{aligned}$$

1.4.7. Représentation de ΔS en fonction de x :

Commentaire : Lorsque la pression passe, dans \mathcal{C}_2 , de P à $P_R < P$ ($x = \frac{P_R}{P} < 1$), ΔS diminue puisque le désordre moléculaire du gaz diminue. Par contre, le désordre moléculaire du gaz augmente lorsque la pression passe de P à $P_R > P$ ($1 < x < 120$).

Problème- 6

Étude de quelques cycles moteurs

6.1 Enoncé (d'après Mines-Ponts 2000)

1. Machine ditherme

Une masse m de gaz constitué principalement d'air, subit un cycle moteur entre deux sources thermiques, l'une la source froide à la température $T_f = 290$ K, l'autre la source chaude à $T_c = 1450$ K.

1.1. Exprimer les bilans d'énergie et d'entropie au cours d'un cycle réel. On introduira les quantités suivantes, relatives à un cycle : W , Q_f , Q_c , S_p ; W le travail reçu (algébriquement) par le fluide, Q_f quantité de chaleur reçue algébriquement par le fluide de la part de la source froide ; Q_c quantité de chaleur reçue algébriquement par le fluide de la part de la source chaude. S_p l'entropie créée pour le système fluide.

1.2. Représenter, sur un même graphe, donnant Q_c en fonction de Q_f , appelé diagramme de RAVEAU, les deux équations précédentes, W et S_p étant des quantités déterminées. En déduire la position du point de fonctionnement sur le diagramme, compte tenu des signes de W et S_p , ainsi que le sens des échanges thermiques (signes de Q_c et Q_f).

1.3. Établir l'expression de l'efficacité du moteur η , appelé aussi rendement, en fonction de T_c , T_f , Q_c et S_p .

1.4. Que devient cette efficacité lorsque la machine ditherme fonctionne selon un cycle de CARNOT ? Calculer sa valeur η_c . Ce résultat, sensiblement inférieur à un, est-il dû à une imperfection de la machine (frottements divers) ou provient-il d'une limitation fondamentale ? dans ce dernier cas, préciser la nature de cette limitation.

1.5. On définit le degré d'irréversibilité du cycle à l'aide du rapport $r = \frac{\eta}{\eta_c}$. Sachant que $r = 0,94$ et que le moteur fournit un travail de 15 kJ par cycle, trouver Q_c , Q_f et S_p .

2. Entropie d'un gaz parfait

2.1. Établir l'expression de la variation élémentaire de l'entropie d'un gaz parfait monoatomique en fonction de sa température T et de sa pression P . Montrer que l'entropie du gaz peut s'écrire :

$$S = \alpha(-\ln P + \beta \ln T + \text{cte})$$

α étant un coefficient que l'on exprimera, en fonction du nombre n de moles et de la constante R des gaz parfaits, et β un facteur que l'on déterminera.

2.2. Dans le cas d'un gaz parfait diatomique $\gamma = \frac{7}{5}$. En déduire la relation entre la pression et la température d'un gaz parfait diatomique au cours d'une évolution isentropique.

3. Cycle de BEAU de ROCHAS et OTTO

Dans un moteur à explosion, le fluide de masse $m = 2,9$ g, assimilé à un gaz parfait diatomique, de masse molaire $M = 29$ g, suit une évolution cyclique réversible $ABCD$ constitué de deux portions isentropiques, AB et CD , séparées par deux portions isochores BC et DA . Le cycle n'est plus ditherme : il y a mise en contact du fluide avec une succession de sources chaudes et froides. Les températures et les pressions aux points A et C sont respectivement $T_A = 290$ K, $P_A = 1$ bar, $T_C = 1450$ K, $P_C = 40$ bar. En outre, le taux de compression $\alpha_v = \frac{V_A}{V_C}$ est égal à 8.

3.1. Quelle équation relie la pression et le volume le long des courbes AB et CD ? Calculer les pressions, en bar, P_B , P_D en B et D respectivement, ainsi que les volumes en litres en ces points.

3.2. Représenter avec soin le cycle $ABCD$ dans le diagramme de CLAPEYRON (P,V). Justifier le sens de description du cycle.

3.3. Calculer, en kJ, le travail et la chaleur reçus (algébriquement) par le gaz sur chaque portion du cycle. Vérifier l'existence d'une relation simple entre toutes les grandeurs calculées.

3.4. Quelle est l'efficacité η_{BO} de ce cycle moteur, c'est à dire le rapport du travail fourni au milieu extérieur sur la chaleur reçue de la part des sources chaudes représentées sur la portion BC du diagramme ?

Comparer η_{BO} à l'efficacité η_c d'un cycle moteur ditherme fonctionnant entre les températures T_A et T_C .

4. Cycle de STIRLING

Dans un cycle de STIRLING, une même masse d'air ($m = 2,9$ g) suit une évolution cyclique réversible $A'B'C'D'$, constitué de deux portions isothermes $A'B'$ et $C'D'$ séparés par deux portions isochores $B'C'$ et $D'A'$. Les températures et les pressions aux points A' et C' sont les mêmes qu'aux points A et C respectivement. Le taux de compression $\alpha_v = \frac{V_A}{V_C}$ est aussi le même que précédemment.

4.1. Quelle équation relie la pression et le volume le long des courbes $A'B'$ et $C'D'$? En déduire les pressions $P_{B'}$ et $P_{D'}$ respectivement en B' et D' .

4.2. Représenter avec soin le cycle $A'B'C'D'$ dans le diagramme de CLAPEYRON. Comparer ce diagramme au précédent.

4.3. Calculer le travail et la quantité de chaleur reçus algébriquement par le gaz sur chaque portion du cycle.

4.4. Les échanges thermiques au cours des évolutions isochores se font à l'aide d'un régénérateur interne de la machine. Les seuls échanges thermiques avec l'extérieur ont lieu pendant les phases isothermes. Quelle est l'efficacité η_s de ce cycle moteur, c'est à dire le rapport du travail fourni au milieu extérieur sur la quantité de chaleur reçue de la part des sources chaudes représentées sur la portion $C'D'$ du diagramme? comparer η_s à η_{BO} et η_c .

6.2 Corrigé

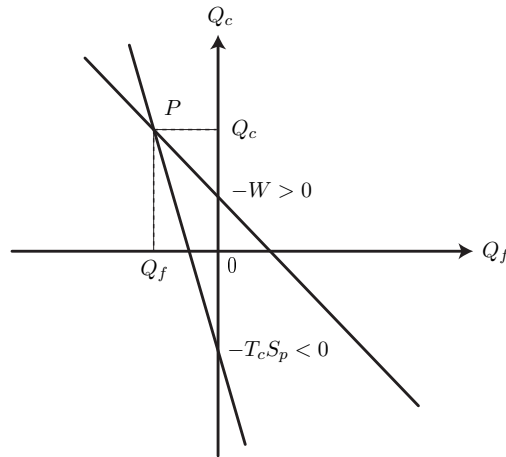
1.

1.1. Pour un cycle réel :

$$\Delta U = W + Q_c + Q_f = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_p = 0$$

1.2. $W < 0$ pour un moteur et $S_p > 0$ pour une transformation réelle, d'où la représentation de Q_c en fonction de Q_f à W et S_p constants, des deux relations suivantes :

$$Q_c = -Q_f - W \quad \text{et} \quad Q_c = -\frac{T_c}{T_f}Q_f - T_c S_p = 0$$



Graphiquement, le point de fonctionnement P a pour coordonnées $Q_c > 0$ et $Q_f < 0$.

1.3.

$$\eta = \frac{-W}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c} - \frac{T_f S_p}{Q_c}$$

1.4 Un cycle de CARNOT est un cycle réversible donc $S_p = 0$ et d'après la question 1.3. :

$$\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0,8$$

$\eta_c < 1$ est une limitation fondamentale, puisque pour réaliser un moteur, il faut au moins deux sources, l'une chaude et l'autre froide à laquelle on fournit un transfert thermique Q_f qui est une énergie perdue.

1.5. On a :

$$\eta = r\eta_c = \frac{-W}{Q_c} \implies Q_c = \frac{-W}{r\eta_c} = 19,9 \text{ kJ}$$

D'autre part :

$$Q_f = -Q_c - W = -4,9 \text{ kJ} \quad \text{et} \quad S_p = -\frac{Q_c}{T_c} - \frac{Q_f}{T_f} = 3,2 \text{ J.K}^{-1}$$

2.

2.1. On a d'après le 1er principe de la thermodynamique :

$$dU = \delta Q_{\text{rev}} + \delta W_{\text{rev}} = TdS - PdV$$

d'autre part :

$$dH = dU + PdV + VdP = TdS + VdP \implies dS = \frac{dH}{T} - \frac{VdP}{T}$$

or pour un gaz parfait :

$$dH = C_p dT \quad \text{et} \quad \frac{V}{T} = \frac{nR}{P}$$

donc :

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P}$$

or :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad \text{et} \quad C_p - C_v = nR \implies C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} = \text{constante}$$

donc :

$$S = nR \left(-\ln P + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln T + \text{cte} \right)$$

d'où par identification :

$$\alpha = nR \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

2.2. Pour une transformation isentropique, l'entropie $S = \text{constante}$ et d'après la question **2.1.** :

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte}$$

3.

3.1. AB et CD sont deux portions isentropiques d'un gaz parfait à $\gamma = \text{cte}$ donc :

$$P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma \quad \text{et} \quad P_C V_C^\gamma = P_D V_D^\gamma$$

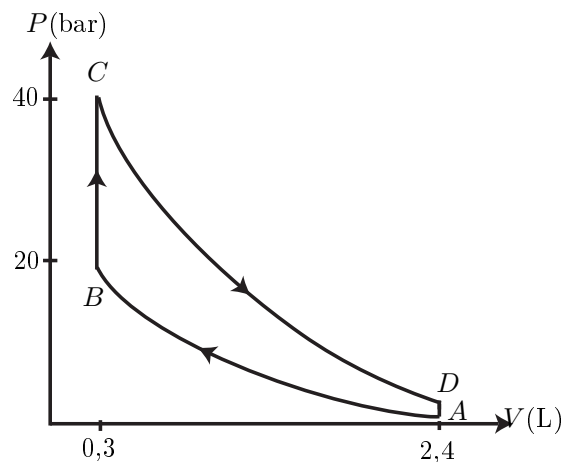
d'où :

$$P_B = P_A \alpha_v^\gamma \simeq 18,4 \text{ bar} \quad \text{et} \quad P_D = P_C \alpha_v^{-\gamma} \simeq 2,2 \text{ bar}$$

BC et DA sont deux portions isochores d'un gaz parfait :

$$V_D = V_A = \frac{mRT_A}{MP_A} \simeq 2,4 \text{ L} \quad \text{et} \quad V_B = V_C = \frac{V_A}{\alpha_v} \simeq 0,3 \text{ L}$$

3.2.



Le sens est celui des aiguilles d'une montre car il s'agit d'un cycle moteur.

3.3. AB et CD sont deux portions isentropiques ($Q_{AB} = Q_{CD} = 0$) :

$$W_{AB} = \Delta U = c_v \Delta T_{AB} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_B - T_A) = \frac{P_B V_B - P_A V_A}{\gamma - 1} = 0,78 \text{ kJ}$$

de même :

$$W_{CD} = \frac{P_D V_D - P_C V_C}{\gamma - 1} = -1,67 \text{ kJ}$$

BC et DA sont deux portions isochores :

$$W_{BC} = W_{DA} = 0$$

d'où :

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = \frac{P_C V_C - P_B V_B}{\gamma - 1} = 1,62 \text{ kJ} \quad \text{et} \quad Q_{DA} = \Delta U_{DA} = \frac{P_A V_A - P_D V_D}{\gamma - 1} = -0,72 \text{ kJ}$$

On a :

$$W_{AB} + W_{CD} + Q_{BC} + Q_{DA} = 0$$

En effet, la variation de l'énergie interne de la transformation cyclique est nulle :

$$\Delta U = W_{AB} + W_{CD} + Q_{BC} + Q_{DA} = 0$$

3.4. On a :

$$\eta_{BO} = \frac{-W_{CD} - W_{AB}}{Q_{BC}} = 0,55 < \eta_c = 0,8$$

4. On a :

$$P_{A'} = P_A = 1 \text{ bar} ; T_{A'} = T_A = 290 \text{ K} ; P_{C'} = P_C = 40 \text{ bar} ; T_{C'} = T_C = 1450 \text{ K} \text{ et } \frac{V_{A'}}{V_{C'}} = \alpha_v = \frac{V_A}{V_C} = 8$$

4.1. $A'B'$ et $C'D'$ sont isothermes, d'où :

$$P_{B'} V_{B'} = P_{A'} V_{A'} \implies P_{B'} = P_{A'} \frac{V_{A'}}{V_{B'}} = P_{A'} \frac{V_{A'}}{V_{C'}} = P_{A'} \alpha_v = 8 \text{ bar}$$

de même :

$$P_{D'} = P_{C'} \alpha_v^{-1} = 5 \text{ bar}$$

4.2.

La surface du cycle de STIRLING est plus importante que celui de BEAU de ROCHAS et OTTO car $P'_B = 8 \text{ bar} < P_B = 18,4 \text{ bar}$ et $P_{D'} = 5 \text{ bar} > P_D = 2,2 \text{ bar}$, ce qui implique que le travail fourni par le moteur de STIRLING est plus important que celui fourni par le moteur de BEAU de ROCHAS et OTTO.

4.3. $B'C'$ et $D'A'$ sont deux portions isochores :

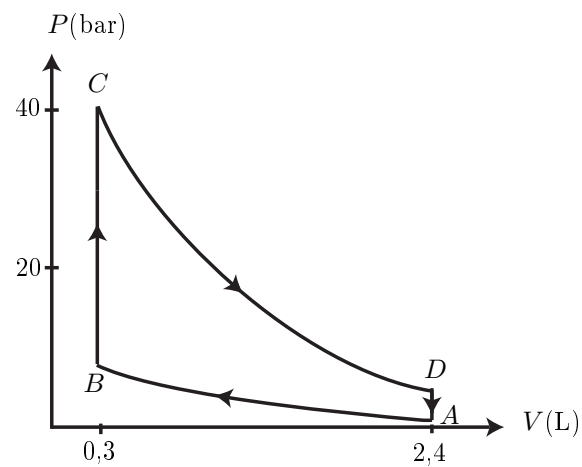
$$W_{B'C'} = W_{D'A'} = 0$$

et

$$Q_{B'C'} = \Delta U_{B'C'} = \frac{P_{C'} V_{C'} - P_{B'} V_{B'}}{\gamma - 1} = 2,4 \text{ kJ} \quad \text{et} \quad Q_{D'A'} = \frac{P_{A'} V_{A'} - P_{D'} V_{D'}}{\gamma - 1} = -2,4 \text{ kJ}$$

$A'B'$ et $C'D'$ sont deux portions isothermes d'un gaz parfait, donc :

$$W_{A'B'} + Q_{A'B'} = \Delta U_{A'B'} = c_v \Delta T_{A'B'} = 0 \quad \text{et} \quad W_{C'D'} + Q_{C'D'} = \Delta U_{C'D'} = c_v \Delta T_{C'D'} = 0$$



d'où :

$$W_{A'B'} = -Q_{A'B'} = - \int_{A'}^{B'} p dV = nRT_{A'} \ln \alpha_v = 0,5 \text{ kJ}$$

de même

$$W_{C'D'} = -Q_{C'D'} = -nRT_{C'} \ln \alpha_v = -2,5 \text{ kJ}$$

4.4. Le rendement du moteur est :

$$\eta_S = \frac{-W_{A'B'} - W_{C'D'}}{Q_{C'D'}} = 0,8 = \eta_c > \eta_{BO} = 0,55$$

Problème- 7

Étude des changements d'état de l'eau

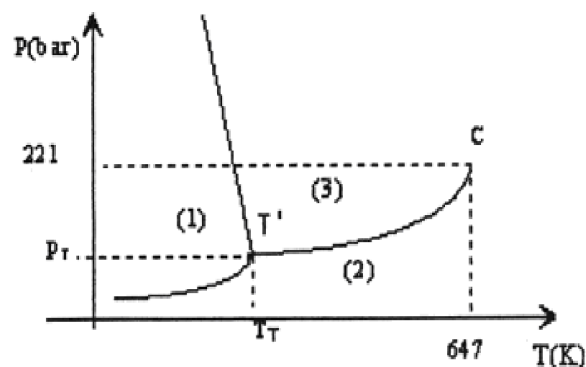
7.1 Enoncé (d'après SupElec)

A - Préliminaire

On s'intéresse ici à quelques aspects de l'étude des changements d'état de l'eau, et plus spécialement à la mesure de l'enthalpie massique de vaporisation et de fusion. On donne ci-contre, figure 1, le diagramme d'état de l'eau en coordonnées (T, P) .

A-1 Identifier les trois domaines numérotés (1), (2) et (3) sur la figure 1.

A-2 Nommer les points C et T' et décrire ce à quoi ils correspondent.



Un corps pur en équilibre sous deux phases (a) et (b), à la température T , est soumis à une pression P_{eq} qui dépend de T et de la nature du corps pur.

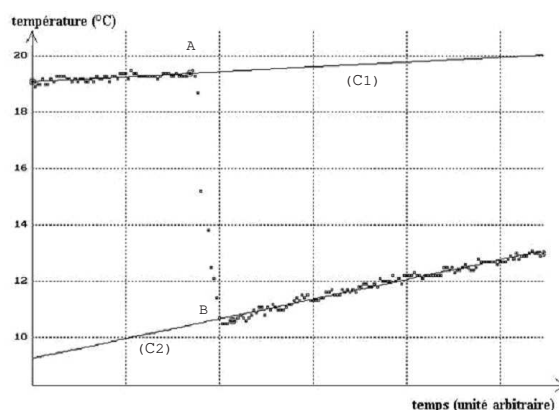
A-3 Montrer que, si l'on fixe la température, alors la pression est fixée pour l'équilibre entre les deux phases. Donner ensuite la relation de CLAPEYRON reliant $\frac{dP_{eq}}{dT}$ sur la courbe d'équilibre en fonction de la température T , de l'enthalpie massique de changement d'état L et des volumes massiques v_a et v_b du corps pur sous les phases (a) et (b).

A-4 La pente de la courbe d'équilibre entre les phases (1) et (3) indiquées sur la figure 1 est négative, alors que les deux autres sont positives. Quelle conclusion en tire-t-on ? Citez une expérience mettant en évidence cette propriété.

A-5 On s'intéresse à l'équilibre entre les phases (2) et (3) indiquées sur la figure 1. Préciser l'allure du diagramme de CLAPEYRON (v, P) , où v est le volume massique et P est la pression.

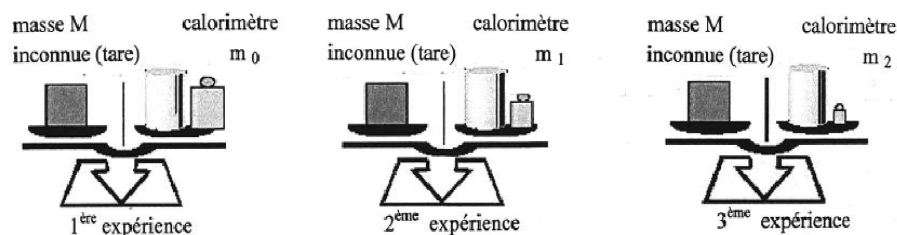
B - Mesure de la chaleur latente de fusion

Dans le calorimètre, on place une masse m_e d'eau à la température T_e puis à un instant $t_1 > 0$, on rajoute une masse m_g de glace à la température $T_g = 0^\circ\text{C}$. On enregistre la température en $^\circ\text{C}$ en fonction du temps (voir courbe ci-dessous, figure 2) :



B-1 Pour avoir de la glace à 0°C , on place des glaçons dans de l'eau puis on les essuie avant de les placer dans le calorimètre. Justifier ce protocole.

B-2 Pour mesurer les masses, on place le calorimètre sur la balance et on réalise les mesures suivantes :



- Dans une première expérience, le calorimètre, vide, est seul sur le plateau de la balance. On mesure la masse m_0 qu'il faut ajouter sur le plateau contenant le calorimètre pour équilibrer la balance. On obtient : $m_0 = 140,3 \text{ g}$;
- Dans une deuxième expérience, on enlève la masse m_0 , on ajoute l'eau liquide dans le calorimètre et on mesure la masse m_1 qu'il faut ajouter sur le plateau contenant le calorimètre pour équilibrer la balance. On obtient : $m_1 = 48,8 \text{ g}$;
- Dans une troisième expérience, en partant de la situation de la deuxième expérience, on enlève la masse m_1 , on ajoute la glace et on mesure la masse m_2 qu'il faut ajouter sur le plateau contenant le calorimètre pour équilibrer la balance. On obtient : $m_2 = 39,9 \text{ g}$.

En déduire la masse d'eau liquide m_e et la masse de glace m_g .

B-3 On admettra qu'une agitation efficace fait fondre les glaçons assez rapidement. Déduire de la courbe de la figure 2 les valeurs de la température initiale T_e (avant ajout des glaçons) et de la température finale T_f (après fusion des glaçons). On justifiera en quelques mots la lecture de ces deux valeurs sur la courbe.

B-4 À quelle variation de fonction s'identifie le transfert thermique Q reçu par le système contenu dans le calorimètre ? On suppose que l'enthalpie massique L de fusion de la glace est une constante (indépendante de la température).

Déterminer littéralement puis numériquement L . On néglige la capacité thermique du calorimètre.

On notera C_{eau} la capacité thermique massique de l'eau liquide, dont la valeur numérique est indiquée à la fin de la question B-6.

Dans la suite, on prendra la valeur des tables, $L = 334$ kJ/kg.

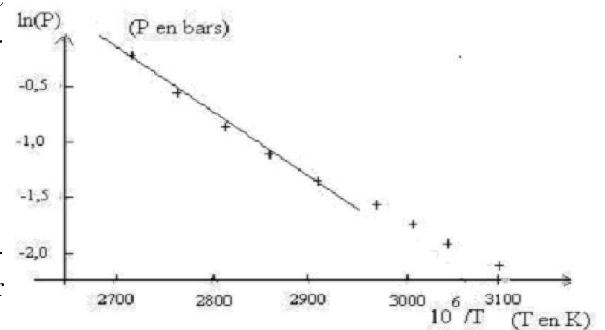
B-5 En déduire la création d'entropie S_c lors du mélange.

B-6 Déduire de la relation de CLAPEYRON Calculer numériquement $P_{eq}(T)$ pour $T = -1^\circ\text{C}$.

On donne : $C_{eau} = 4,18$ J.K⁻¹g⁻¹; $\rho = 1000$ kg.m⁻³; densité de la glace : $d = 0,9$; $T(K) = 273,15 + t$ (°C).

C - Mesure de la chaleur latente de vaporisation

Lors d'une expérience de thermodynamique, on a réalisé un équilibre liquide-vapeur de l'eau et on a enregistré la température T et la pression P en fonction du temps. On en déduit alors la courbe $\ln(P) = f(1/T)$, représentée ci-contre, où P est en bars et T en K.



C-1 Comment pourrait-on qualifier la transformation ?

C-2 Représenter la transformation dans le diagramme (T, P) .

C-3 En assimilant la vapeur d'eau à un gaz parfait et en négligeant le volume massique du liquide devant celui du gaz, simplifier l'expression de la relation de CLAPEYRON.

Peut-on toujours négliger le volume massique du liquide devant celui du gaz ?

C-4 Une régression linéaire donne $\ln(P) = \frac{-5068}{T} + 13,58$, où P est en bars et T en K.

En déduire la valeur de l'enthalpie de vaporisation, L_v .

On donne : $M = 18$ g/mol, $R = 8,315$ J/K/mol.

Dans la suite, on prendra $L = 2257$ kJ/kg.

C-5 L'expérience montre que la courbe s'écarte de la droite pour les plus faibles températures (voir la figure 4).

Proposer une explication qualitative de ce phénomène (on se limitera à quelques lignes).

Dans la suite, on limite donc la modélisation entre 70°C et 100°C .

C-6 Retrouver un ordre de grandeur de la pression et de la température au point triple.

C-7 Une cocotte minute est un récipient contenant de l'eau qui bout sous une pression de 1,5 bar. Quelle est la température d'ébullition ? Quel est l'intérêt de la cocotte minute ?

C-8 Déduire des résultats obtenus dans les parties B et C un ordre de grandeur de l'enthalpie de sublimation de l'eau au point triple.

7.2 Corrigé

A.- Préliminaire

A-1 Domaines :

- (1) : solide seul ;
- (2) : vapeur seule ;
- (3) : liquide seul.

A-2 Points C et T' :

- C : point critique. Point d'inflexion à tangente horizontale de l'isotherme dans le réseau d'isothermes d'Andrews.
- T' : point triple : état du corps pur tel qu'il y ait coexistence des trois phases liquide, solide et vapeur.

A-3 Pression d'équilibre :

S'il y a deux phases en présence, la variance du système est $v = 2 + 2 - 1 - 2 = 1$. Le système n'a qu'un degré de liberté : un seul paramètre intensif peut être choisi.

Si c'est la température que l'on fixe, alors la pression est fixée.

La Relation de CLAPEYRON est :

$$L_{a \rightarrow b} = T (v_b - v_a) \frac{dP_{eq}}{dT}$$

- v_a et v_b : volumes massiques du corps pur sous les phases (a) et (b) ;
- L : enthalpie massique de changement d'état de (a) à (b).

A-4 Pente de la courbe d'équilibre entre les phases solide et liquide :

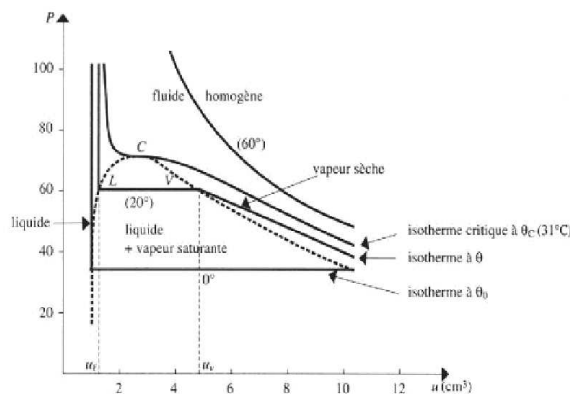
La formule de CLAPEYRON appliquée à la transition de phase solide/liquide montre que le volume massique de la glace est plus grand que le volume massique du liquide. En effet $T > 0$, $L_{a \rightarrow b} > 0$ donc $v_b - v_a$ doit être < 0 .

Conséquences :

- si on fait geler de l'eau dans une bouteille, cette dernière éclate.
- on peut fondre de la glace en la comprimant.

A-5 Équilibre liquide-vapeur :

On représente le réseau d'isothermes du corps pur en coordonnées (v, P) . Il y a des paliers d'équilibre liquide-vapeur.



B- Mesure de la chaleur latente de fusion

B-1 Glace à 0 °C :

On place des glaçons dans de l'eau et on attend suffisamment longtemps pour que l'équilibre thermique soit établi afin d'être sûrs que ces glaçons sont à la température de 0 °C. On les essuie avant de les placer dans le calorimètre pour n'avoir que de l'eau solide et pas de liquide.

B-2 Mesure des masses :

— Première expérience : L'équilibre de la balance se traduit par $M = M_{\text{calor}} + m_0$ (a)

— Deuxième expérience $M = M_{\text{calor}} + m_e + m_1$ (b)

— Troisième expérience $M = M_{\text{calor}} + m_e + m_g + m_2$ (c)

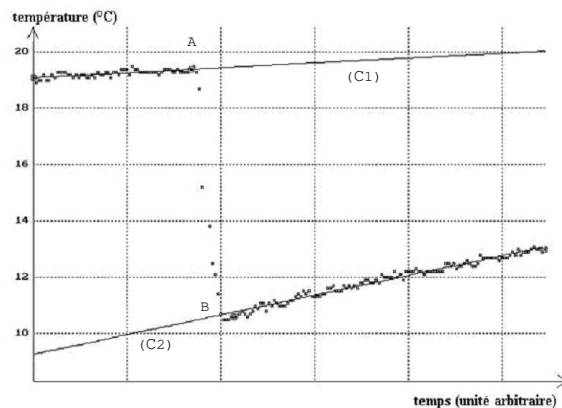
D'où :

(a) et (b) donnent : $m_e = m_0 - m_1$; AN : $m_e = 91,5$ g.

(b) et (c) donnent : $m_g = m_1 - m_2$; AN : $m_g = 8,9$ g.

B-3 Températures initiale et finale :

Les points anguleux de la courbe de température en fonction du temps mettent en évidence l'introduction des glaçons dans le calorimètre (point A) et la fin de la fusion des glaçons (point B).



— Température juste avant l'ajout des glaçons (point A) : $t_e = 19,4$ °C.

— Température après fusion des glaçons (point B) $t_f = 10,7$ °C.

— Les droites (C1) et (C2) ne sont pas horizontales, montrant que le calorimètre n'est pas adiabatique puisque la température de son contenu augmente au cours du temps. On peut en conclure que la température extérieure est supérieure à celle du calorimètre.

— La pente de (C2) est supérieure à celle de (C1) : les pertes thermiques du calorimètre sont proportionnelles à la différence de température entre le contenu du calorimètre et le milieu extérieur.

B-4 Le transfert thermique Q s'identifie à la variation d'enthalpie ΔH du système dans le cas d'une transformation isobare (ici à la pression atmosphérique) lorsque le seul travail mis en jeu est le travail des forces pressantes : $Q = \Delta H$.

La variation d'énergie interne pour une telle transformation élémentaire est :

$$dU = W + Q = -P dV + \delta Q$$

soit

$$\delta Q = dU + P dV$$

Si la pression est constante on aura :

$$\delta Q = d(U + PV) = dH$$

et pour une transformation finie $Q = \Delta H$.

Si le calorimètre est supposé adiabatique la chaleur reçue est nulle. Les transferts thermiques se produisent entre eau liquide et glace.

Le bilan thermique pour le calorimètre est :

$$C_{\text{eau}} m_e (T_f - T_e) + m_g L + C_{\text{eau}} m_g (T_f - T_g) = 0$$

qui traduit la variation de température de l'eau initialement liquide, la chaleur mise en jeu lors de la fusion de la glace et la variation de température de cette eau de fusion. D'où :

$$L = C_{\text{eau}} \cdot \left((T_g - T_f) + \frac{m_e}{m_g} (T_e - T_f) \right)$$

A.N. $L = 329,15$ kJ/kg.

B-5 Création d'entropie lors du mélange :

Pour la transformation réelle (mélange, puis fusion de la glace dans le calorimètre) la variation d'entropie est $\Delta S = S_c$ où S_c est l'entropie créée au cours de la transformation (le calorimètre étant supposé adiabatique il ne reçoit pas de chaleur donc pas d'entropie non plus).

Imaginons la même transformation "réalisée" de manière réversible. La variation d'entropie s'écrit :

$$\Delta S = m_e C_{\text{eau}} \int_{T_e}^{T_f} \frac{dT}{T} + m_g \frac{L}{T_g} + m_g C_{\text{eau}} \int_{T_g}^{T_f} \frac{dT}{T}$$

soit :

$$\Delta S = m_g \frac{L}{T_g} + C_{\text{eau}} \left(m_e \ln \frac{T_f}{T_e} + m_g \ln \frac{T_f}{T_g} \right)$$

D'où l'entropie créée, la variation d'entropie (fonction d'état) étant la même pour les deux transformations :

$$S_c = m_g \frac{L}{T_g} + C_{\text{eau}} \left(m_e \ln \frac{T_f}{T_e} + m_g \ln \frac{T_f}{T_g} \right)$$

A.N. $S_c = 10,87$ J/K/kg.

B-6 $P_{\text{eq}}(T)$ pour l'équilibre liquide-solide :

La relation de CLAPEYRON pour la fusion est :

$$L_{\text{Sol} \rightarrow \text{Liq}} = T (V_{\text{Liq}} - V_{\text{Sol}}) \cdot \frac{dP_{\text{eq}}}{dT}$$

Soit :

$$L_{\text{Sol} \rightarrow \text{Liq}} = L = \frac{T}{\rho_{\text{eau}}} \left(1 - \frac{1}{d} \right) \frac{dP_{\text{eq}}}{dT}$$

d : étant la densité de la glace par rapport à l'eau.

On en déduit :

$$dP_{eq} = \frac{L\rho_{eau}}{1 - \frac{1}{d}} \frac{dT}{T}$$

et si on admet que L est indépendant de la température (ce qui n'est pas le cas en toute rigueur)

$$P_{eq}(T) = P_{eq}(T_0) + \frac{L\rho_{eau}}{1 - \frac{1}{d}} \ln \frac{T}{T_0}$$

A.N. : Sous la pression atmosphérique normale P_0 , la température d'équilibre solide-liquide est $t = 0^\circ\text{C}$ ou $T_0 = 273,15\text{ K}$.

D'où $P_{eq}(-1^\circ\text{C}) = 111,3\text{ bar}$.

Ce résultat montre que la courbe d'équilibre solide-liquide dans le diagramme d'état a une très grande pente (négative puisque la pression d'équilibre augmente lorsque la température diminue).

C - Mesure de la chaleur latente de vaporisation

C-1 Le ballon étant fermé lors des mesures, la transformation est isochore.

C-2 Représentation de la transformation dans le diagramme (T, P) .

Le point représentatif de l'état du système se déplace sur la courbe d'équilibre solide-liquide, la température (et la pression) diminuant.

C-3 Relation de CLAPEYRON simplifiée :

Si on néglige le volume massique du liquide devant celui du gaz :

$$L_V = T v_g \frac{dP_{eq}}{dT}$$

Si on assimile la vapeur d'eau à un gaz parfait, l'équation d'état s'écrit :

$$P_{eq} v_g = \frac{R}{M} T$$

(M étant la masse molaire de la vapeur d'eau), d'où l'expression simplifiée de la relation de CLAPEYRON :

$$L_V = \frac{R}{M} \frac{T^2}{P_{eq}} \frac{dP_{eq}}{dT}$$

Le volume massique du liquide est d'autant plus négligeable devant celui du gaz que l'on se trouve loin du point critique, c'est à dire à une température plus basse devant la température critique.

C-4 Enthalpie de vaporisation L_v :

Expérimentalement on peut écrire $\ln(P_{eq}) = \frac{A}{T} + B$ (pour des températures pas trop basses).

Soit en dérivant logarithmiquement ce modèle :

$$\frac{dP_{eq}}{P_{eq}} = \frac{-A}{T^2} dT$$

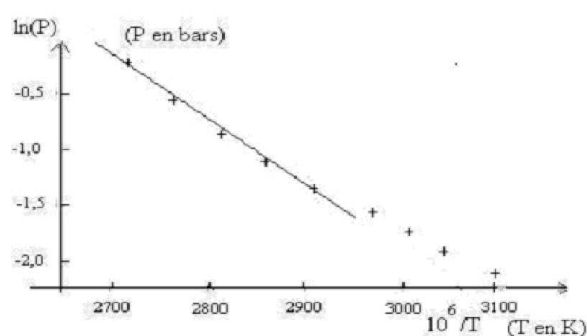
et en reportant dans la relation de CLAPEYRON simplifiée

$$L_V = -A \cdot \frac{R}{M}$$

A.N. $L_v = 2341$ kJ/kg.

Remarque : la valeur obtenue diffère sensiblement de la valeur tabulée, du fait des approximations faites dans la relation de CLAPEYRON.

C-5



Ce modèle n'est satisfaisant que dans un domaine limité de température car en réalité la chaleur latente de vaporisation dépend de la température de manière non négligeable.

C-6 Température au point triple :

$0\text{ }^{\circ}\text{C}$ est un bon ordre de grandeur de la température du point triple puisqu'à cette température, sous la pression normale, l'eau n'existera plus à l'état liquide.

Une détermination peut être obtenue l'intersection des courbes d'équilibre solide-liquide et liquide-vapeur dont on connaît les équations.

Courbe d'équilibre liquide-vapeur :

$$\ln(P_{eq}) = \frac{A}{T} + B \quad \text{ou} \quad P_{eq}(T) = \exp\left(\frac{A}{T} + B\right)$$

Courbe d'équilibre solide-liquide :

$$P_{eq} = A' T + B'$$

c'est une demi-droite dont la pente est connue et dont un point est connu.

L'intersection peut être calculée numériquement par une méthode graphique par exemple.

C-7 Cocotte minute :

La température d'ébullition est calculée à partir de $\ln(P_{eq}) = \frac{A}{T} + B$ connaissant la pression d'équilibre

$$T = \frac{A}{\ln(P_{eq}) - B}$$

A.N. $T = 384,7$ K.

L'intérêt de la cocotte minute est de pouvoir faire bouillir de l'eau à une température supérieure à 100 °C (température d'ébullition sous la pression atmosphérique normale) ce qui permet une cuisson plus rapide des aliments.

C-8 Enthalpie de sublimation de l'eau au point triple :

On montre qu'au point triple, il existe la relation (voir cours pour la démonstration) $L_s = L_v + L_f$ (L_s enthalpie de sublimation) entre les enthalpies de changement d'état.

A.N. $L_s = 334 + 2257 = 2591$ kJ/kg.

Problème- 8

Transferts thermiques

8.1 Énoncé (d'après CCP 2003)

1. On considère un corps homogène (figure 8.1) de section droite S , de longueur L , de masse volumique ρ , de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique c , avec λ , ρ , c constants. La température du matériau ne dépend que de x et de t et sera notée $T(x, t)$. Les parois parallèles à l'axe x sont isolées thermiquement et on note $\vec{J}(x, t) = J(x, t)\vec{e}_x$ le vecteur densité de courant thermique.

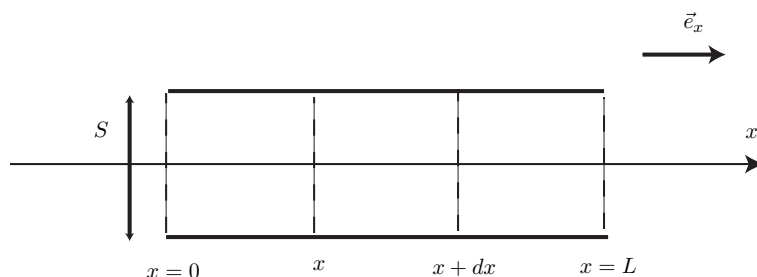


FIGURE 8.1 –

1.1. Que représente $J(x, t)$? Quelle est son unité? Énoncer alors la loi de FOURIER.

1.2. Effectuer un bilan énergétique pour un volume élémentaire de matériau compris entre les abscisses x et $x + dx$ entre les instants t et $t + dt$ en supposant qu'il n'existe pas d'apport énergétique autre que par conduction et qu'il n'y a pas production d'énergie interne. Donner alors l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x, t)$.

On se place désormais en régime stationnaire.

1.3. Donner les lois de variation $T(x)$ et $J(x)$ en supposant que les extrémités du matériau sont maintenues à températures constantes, $T(0) = T_0$ et $T(L) = T_L$.

2. Soit P_{th} le flux thermique à travers la section droite S du matériau. On définit R_{th} , résistance thermique de conduction du matériau de longueur L et de surface S , par la relation $T_0 - T_L = R_{th}P_{th}$.

2.1. Exprimer R_{th} en fonction de L , S et λ . En faisant l'analogie avec l'électrocinétique, justifier le terme de résistance thermique et préciser l'unité de R_{th} . Quelle doit être la condition sur R_{th} pour que le flux transmis soit faible?

2.2. On associe deux corps A_1 et A_2 (figure 8.2) de résistances thermiques R_{th1} et R_{th2} de même section S , l'un de conductivité thermique λ_1 est compris entre $x = 0$ et $x = L_1$, le second de conductivité thermique λ_2 est compris entre $x = L_1$ et $x = L_1 + L_2$. On note T_0, T_1, T_2 les températures pour $x = 0, x = L_1, x = L_1 + L_2$. Établir l'expression de la résistance thermique R_{th} de l'ensemble en fonction de R_{th1} et R_{th2} .

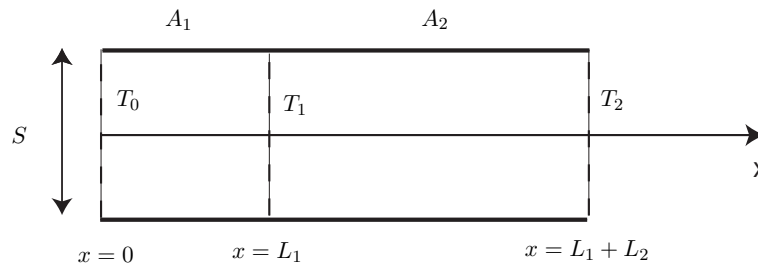


FIGURE 8.2 –

2.3. Même question lorsque les deux corps A_1 , de section S_1 et de longueur L_1 et A_2 de section S_2 et de longueur L_2 sont associés en " parallèle " (figure 8.3). On note T_0 la température sur les faces d'entrée en $x = 0$ et T_1 la température sur les faces de sorties en $x = L_1$ pour A_1 , et en $x = L_2$ pour A_2 .

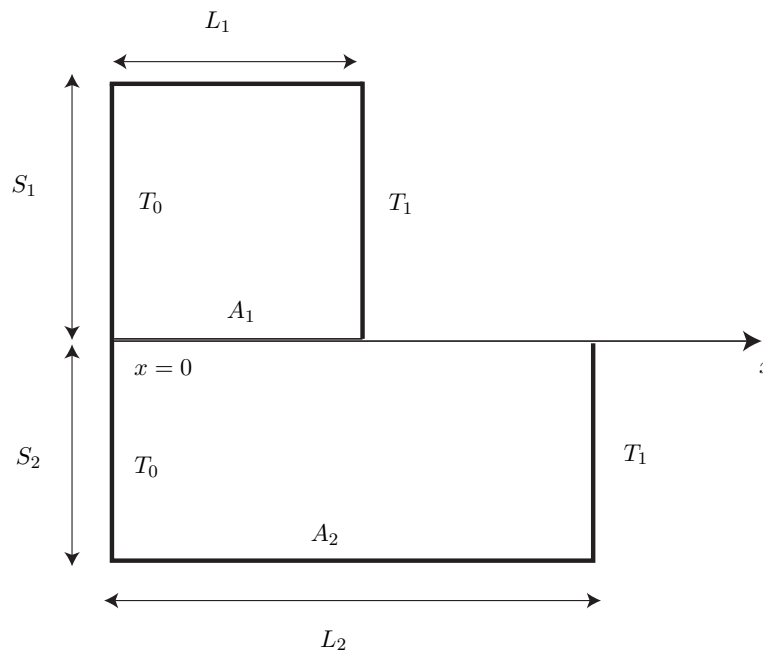


FIGURE 8.3 –

3. On considère maintenant une surface S à la température T en contact avec de l'air à la température T_a et échangeant par convection avec celui-ci une puissance thermique P_c (sortant algébriquement de la surface S). On note h_c est le coefficient de transfert conducto-convectif.

3.1. Exprimer la loi de NEWTON de la convection. Quelle est l'unité de h_c ?

3.2. Montrer que cet échange convectif est décrit par une résistance thermique de convection R_c dont on

donnera l'expression.

4. La puissance P_r rayonnée par l'unité de surface d'un corps noir et répartie sur toutes les fréquences ν est donnée par :

$$P_r = \int_0^{\infty} P(\nu) d\nu$$

avec :

$$P(\nu) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2(\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1)}$$

où $h = 6,62.10^{-34}$ J.s (constante de PLANCK) et $k = 1,38.10^{-23}$ J.K⁻¹ (constante de BOLTZMANN). $c = 3.10^8$ m.s⁻¹ (vitesse de la lumière dans le vide).

4.1. Montrer que P_r est donnée par la loi de STEPHAN : $P_r = \sigma T^4$. Exprimer σ en fonction de k , h et c .

On donne : $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\exp(x)-1} = \frac{\pi^4}{15}$.

4.2. On rappelle que la loi de WIEN liant la longueur d'onde λ_m du maximum d'émission thermique du corps noir à sa température T s'écrit : $\lambda_m T = 2898 \mu\text{m.K}$. On admet que l'ensemble des couches de l'atmosphère rayonne comme un corps noir à la température $T_e = 263$ K. Calculer les valeurs respectives des longueurs d'onde λ_{m_a} et λ_{m_s} du rayonnement thermique de l'atmosphère terrestre et du rayonnement thermique solaire (la température de la surface du soleil T_s de l'ordre de 5700 K). À quels domaines du spectre électromagnétique, ces longueurs d'onde appartiennent-elles ?

4.3. On considère une surface S délimitant un corps à la température T en contact avec un environnement à la température T_e . Le corps et l'environnement se conduisant comme des corps noirs, donner l'expression de la puissance P échangée par rayonnement à travers S entre le corps et l'environnement (sortant algébriquement du corps vers l'environnement).

4.4. On suppose que T est très proche de T_e et on pose $T = T_e + \Delta T$ avec $\Delta T \ll T$. Montrer que P peut se mettre sous la forme approchée : $P = G(T - T_e)$ et donner l'expression de G en fonction de T_e , σ et S . Quelle est la résistance thermique de rayonnement R_r correspondante ? Montrer qu'on peut confondre T_e et T dans l'expression de R_r lorsque la forme approchée de P est du premier ordre en $T - T_e$.

4.5. Donner l'expression de la résistance thermique R si l'on considère à la fois un transfert par convection et par rayonnement entre un corps à la température T délimité par une surface S et un environnement à la température T_e .

8.2 Corrigé

1. Conduction thermique

1.1. $J(x, t)$ représente le transfert thermique (ou la quantité de chaleur) traversant une section unité perpendiculaire à l'axe des x , dans le sens de \vec{u}_x , pendant 1 seconde. C'est une grandeur algébrique qui s'exprime en W.m⁻².

La loi de Fourier précise que cette grandeur est proportionnelle au gradient de température et que l'écoulement de transfert thermique s'effectue dans le sens des températures décroissantes, soit

$$\vec{J}(x, t) = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

1.2. Considérons comme système la tranche comprise entre x et $x + dx$ de masse $dm = \rho S c dx$.

Un bilan d'enthalpie pendant la durée dt donne :

$$dQ = dH = c \cdot dm \cdot dT = \rho S c dx \cdot dT = (J(x) - J(x + dx)) S dt = -\frac{\partial J}{\partial x} \cdot S \cdot dx \cdot dt$$

Pour un système unidirectionnel, $J(x, t) = -\lambda \partial T / \partial x$, ce qui donne l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

1.3. En régime stationnaire (indépendant du temps) on a :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Compte-tenu des conditions aux limites, on a

$$T(x) = (T_L - T_0) \frac{x}{L} + T_0 \quad \text{et} \quad J(x) = \frac{\lambda}{L} (T_0 - T_L)$$

2. Résistance thermique due à la conduction

2.1. Par définition, on a $P_{th} = J S$ et donc

$$P_{th} = \frac{\lambda S}{L} (T_0 - T_L)$$

ce qui permet d'écrire :

$$T_0 - T_L = \frac{L}{\lambda S} P_{th}$$

En électricité, la loi d'Ohm sous forme intégrale s'écrit $V_0 - V_L = R_e I$ avec, pour un conducteur de longueur L et de section S :

$$R_e = \frac{L}{\sigma S}$$

où σ est la conductivité électrique du matériau.

La puissance thermique est l'analogue de l'intensité électrique, la température est l'analogue du potentiel électrostatique et la résistance thermique $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$ est l'analogue de la résistance électrique.

On a donc avec R_{th} en $K \cdot W^{-1}$.

Pour une différence de température donnée, le flux thermique sera d'autant plus faible que la résistance thermique sera élevée.

2.2. Pour A_1 , on a $T_0 - T_1 = R_{th1} P_{th}$ et pour A_2 , on a $T_1 - T_2 = R_{th2} P_{th}$ avec la même puissance P_{th} puisqu'il n'y a pas de fuites latérales.

On obtient alors :

$$T_0 - T_2 = (R_{th1} + R_{th2}) P_{th}$$

soit :

$$R_{th} = R_{th1} + R_{th2}$$

les résistances thermiques s'ajoutent pour des matériaux montés en série (les uns derrière les autres).

2.3. Cette fois-ci, $P_{th} = P_{th1} + P_{th2}$, ce qui conduit à si G_{th} est la conductance thermique, l'inverse de la résistance thermique.

3. Transfert convectif

3.1. Loi de Newton :

$$P_c = h_c S (T - T_a)$$

ou h_c est en $W.m^{-2}.K^{-1}$.

3.2. Pour un transfert convectif, la relation $T - T_a = \frac{1}{h_c S} P_c$ définit une résistance thermique de convection :

$$R_c = \frac{1}{h_c S}$$

4. Transfert par rayonnement

4.1. On a :

$$P_R = \int_0^\infty \frac{2\pi h \nu^3}{c^2 (\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1)} d\nu$$

Posons $x = \frac{h\nu}{kT}$ et $dx = \frac{h}{kT} d\nu$, donc obtient alors l'intégrale :

$$P_R = \int_0^\infty \frac{2\pi h (\frac{kT}{h} x)^3}{c^2 (\exp(x) - 1)} \frac{kT}{h} dx = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} T^4$$

soit $P_R = \sigma T^4$ avec :

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2}$$

4.2.

Pour l'atmosphère, on obtient, pour $T_e = 263$ K, $\lambda_{\max} = 11,0 \mu m$, situé dans l'infrarouge.

Pour le soleil, on obtient, pour $T_S = 5700$ K, $\lambda_{\max} = 0,508 \mu m$, situé dans le visible.

4.3. Le corps de surface S et à la température T émet la puissance totale $P_R = \sigma S T^4$ tandis qu'il reçoit de l'environnement $P_{Re} = \sigma S T_e^4$, d'où un bilan donnant :

$$P = \sigma S (T^4 - T_e^4)$$

c'est la puissance sortant du corps.

4.4. Pour $T = T_e + \Delta T$ avec $\Delta T \ll T$, on a :

$$T^4 = T_e^4 \left(1 + 4 \frac{\Delta T}{T_e} \right)$$

et donc

$$T^4 - T_e^4 = 4T_e^3 (T - T_e)$$

On obtient donc :

$$P = 4\sigma S T_e^3 (T - T_e) = G \cdot (T - T_e)$$

avec :

$$G = 4\sigma S T_e^3 = 1/R_R$$

4.5. Les puissances liées au rayonnement et à la convection s'ajoutent, avec une même expression de T pour les deux phénomènes. On obtient donc :

$$P_{\text{tot}} = (h S + 4\sigma S T^3)(T - T_e) = (T - T_e)/R$$

avec :

$$R = \frac{1}{hS + 4\sigma S T^3}$$