Mouvements dans le champ de pesanteur terrestre

I Un saut supersonique

I.A- Champ de pesanteur créé par la Terre immobile

I.A.1) Théorème de Gauss

Le flux du champ gravitationnel à travers une surface fermée (S), délimitant le volume $(\mathcal{V})$, est égale à la masse m_{int} intérieure à cette surface ; multiplié par la constante $-4\pi\mathcal{G}$. M pint de (S).

$$\oiint_{(S)} \overrightarrow{g}(M)\cdot d\overrightarrow{S} = -4\pi\mathcal{G}\mathrm{m}_{\text{intérieure à }(S)} = -4\pi\mathcal{G}\iiint_{(\mathcal{V})}\rho d\tau$$

I.A.2)

$$\overrightarrow{g}(M) = \overrightarrow{g}(r,\theta,\varphi)$$

- Symétrie : La Terre étant uniformément répartie en volume ; toute direction radiale $O,\overrightarrow{e}_r$ passant par M est un axe de symétrie de la distribution de masse.

$$\overrightarrow{g}(M) = g(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e}_r$$

- Invariance : La distribution de masse est invariante par rotation de θ autour de $\overrightarrow{e}_\varphi$ et par rotation de φ autour de l'axe des pôles ; $g(M)$ est, donc, indépendant de θ et de φ.

$$\overrightarrow{g}(M) = g(r)\overrightarrow{e}_r$$

- Expression de $\overrightarrow{g}(M)$:

$$\oiint_{(S)} \overrightarrow{g}(M)\cdot d\overrightarrow{S} = -4\pi\mathcal{G}\mathrm{m}_{\text{intérieure à }(S)}$$

On choisit comme surface (S), une sphère de centre O et de rayon $r = OM$: $d\overrightarrow{S} = dS\overrightarrow{e}_r$

$$\oiint_{(S)} \overrightarrow{g}(M)\cdot d\overrightarrow{S} = \oiint_{(S)} g(r)dS$$

$g(r)$ est le même en tout point M de (S) :

$$\oiint_{(S)} \overrightarrow{g}(M)\cdot d\overrightarrow{S} = g(r)\oiint_{(S)} dS = g(r)4\pi r^2$$

Soit :

$$\overrightarrow{g}(M) = -\frac{\mathcal{G}}{r^2}\mathrm{m}_{\text{intérieure à }(S)}\overrightarrow{e}_r = -\frac{\mathcal{G}}{r^3}\mathrm{m}_{\text{intérieure à }(S)}\overrightarrow{r}$$

- M intérieur de la Terre : $r < R_T$

$$\mathrm{m}_{\text{intérieure à }(S)} = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = M_T\frac{r^3}{R_T^3}$$

$$\overrightarrow{g}(M) = -\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^3}\overrightarrow{r}$$

Concours National Commun — Session 2018 — http://cpgemaroc.com

- M extérieur de la Terre : $r > R_T$

$$\mathrm{m}_{\text{intérieure à } (S)} = M_T$$

$$\overrightarrow{g}(M) = -\frac{\mathcal{G}M_T}{r^3}\overrightarrow{r}$$

I.A.3) $g(r)$ est une fonction continue !

$$g(r = R_T) = g_o = \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} \quad \Rightarrow \quad M_T = \frac{R_T^2}{\mathcal{G}}g_o = \frac{(6,37\times10^6)^2}{6,67\times10^{24}} \times 9,81 = 5,97\times10^{24}\,kg$$

I.B- Le saut de Felix Baumgartner

I.B.1) Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à Felix Baumgartner,de masse m et soumis à la seule force de pesanteur $m\overrightarrow{g}$, lorsque sa vitesse atteint la vitesse du son $v_s = 340\,ms^{-1}$ à l'altitude h_s :

$$\frac{1}{2}mv_s^2 - 0 = mgh \quad \Rightarrow \quad v_s = \sqrt{2gh_s} \quad \text{où} \quad h_s = \frac{v_s^2}{2g} = \frac{340^2}{2\times9,81} = 5891,95\,m = 5,89\,km$$

I.B.2)

II États stationnaires d'un neutron dans le champ de pesanteur

II.A- Échelle caractéristique de hauteur

II.A.1)

- Énergie potentielle :

$$\begin{aligned} \delta W(\overrightarrow{P}) &= -mg\overrightarrow{e}_z \cdot dz\overrightarrow{e}_z \\ &= -mgdz = -dV(z) \\ V(z) &= mgz \quad ; \quad (V(0) = 0) \end{aligned}$$

- Le système n'est soumis qu'à l'action de son poids qui est une force conservative : l'énergie mécanique de la particules est, alors, conservée.

$$E(t) = E_c(t) + mgz(t)$$

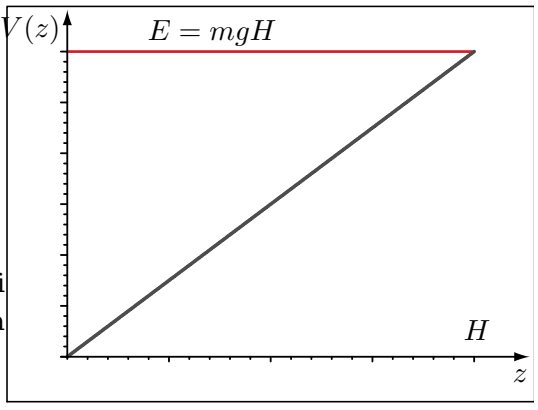

Figure 1 – Énergie potentielle

II.A.2) Conservation de l'énergie mécanique E de la particule :

$$\begin{aligned} E(t) &= E(t=0) \\ E(z(t)) &= E(z(t=0)) = E(z=H) \\ E_c(t) + mgz(t) &= \underbrace{E_c(t=0)}_{0} + mgH \quad \Rightarrow \quad E_c(t) = mg\,(H - z(t)) \end{aligned}$$

II.A.3)

- Amplitudes z accessibles sont tels que : $O \leq z \leq H$.
- $d\mathcal{P}_{cl}(z) = \alpha dt$
  La probabilité de présence entre 0 et H est égale à 1 :

$$\int_0^H d\mathcal{P}_{cl}(z) = 1 = \alpha\int_0^T dt = \alpha T \quad \Rightarrow \quad d\mathcal{P}_{cl}(z) = \frac{dt}{T}$$

Concours National Commun — Session 2018 — http://cpgemaroc.com

T : temps que met la particule pour aller de $z = H$ à $z = 0$. La RFD appliquée à la particule donne :

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg \quad \Rightarrow \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H$$

$z(t = T) = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{2H}{g}$; soit :

$$\begin{aligned} d\mathcal{P}_{cl}(z) &= \frac{g}{2H}dt = \frac{g}{2H}\frac{dt}{dz}dz = \frac{g}{2H}\frac{dz}{\sqrt{2g(H-z)}} \\ \Rightarrow \quad d\mathcal{P}_{cl}(z) &= \frac{dz}{2\sqrt{H(H-z)}} = \underbrace{D(z)}_{\text{densité de probabilité}} dz \end{aligned}$$

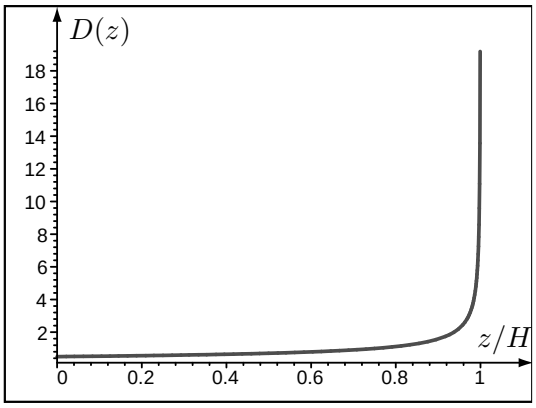

Figure 2 – Densité de probabilité

- $D(z)$ est d'autant plus importante quand z tens vers H !

II.A.4)

$$\ell_g = \left(\frac{\hbar^2}{2gm^2}\right)^{1/3}$$

De la relation $p = \hbar k$, on en déduit que $\hbar$ s'exprime en kgm^2s^{-2}

la quantité ℓ_g^3 s'exprime, alors, en $\dfrac{kg^2m^4s^{-2}}{ms^{-1}kg^2} \equiv m^3$

ℓ_g est en mètre : c'est une distance caractéristique.

II.A.5) Le quantum d'énergie potentielle de pesanteur :

$$\varepsilon_g = mg\ell_g = \left(\frac{m\hbar^2g^2}{2}\right)^{1/3}$$

II.A.6) Application numérique

$$\begin{aligned} \ell_g &= \left(\frac{1,05^2 \times 10^{-68}}{2 \times 9,81 \times 1,67^2 \times 10^{-54}}\right)^{1/3} = 5,86\,\mu m \\ \varepsilon_g &= 9,6 \times 10^{-32}\,J = 6,00 \times 10^{-13}\,eV \end{aligned}$$

II.A.7) On pourra penser à considérer le neutron ultra-froid car ε_g est dans l'ordre de grandeur de l'énergie d'un tel type de neutron !

II.B- Approche semi-classique

$$S = \oint p_z(z)dz = nh \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

$$E_c = \frac{p_z^2(z)}{2m} = mg(H-z) \quad \Rightarrow \quad p_z(z) = \pm m\sqrt{2g(H-z)} = \pm m\sqrt{2gH}\sqrt{1-\frac{z}{H}}$$

Concours National Commun — Session 2018 — http://cpgemaroc.com

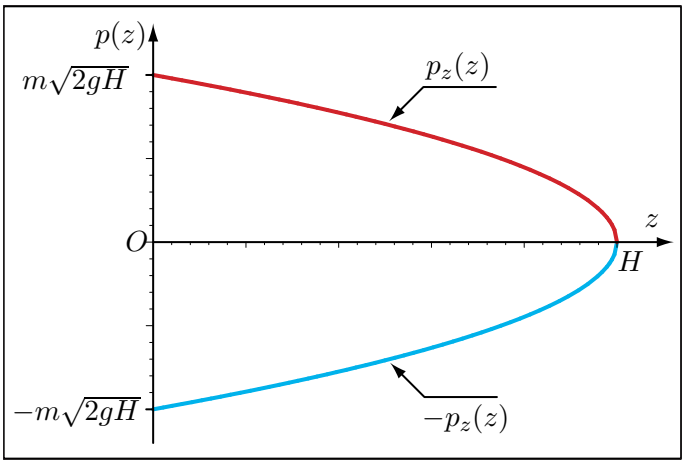

Figure 3 – Règle de quantification de Bohr-Sommerfeld

$$\begin{aligned} S = \oint p_z(z)dz &= \int_0^H m\sqrt{2gH}\sqrt{1-\frac{z}{H}}dz - \int_H^0 m\sqrt{2gH}\sqrt{1-\frac{z}{H}}dz \\ &= 2m\sqrt{2gH}\int_0^H \sqrt{1-\frac{z}{H}}dz = 2mH\sqrt{2gH}\int_0^1 \sqrt{1-X}dX \\ &= -2mH\sqrt{2gH}\frac{2}{3}\left[(1-X)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}mH\sqrt{2gH} \end{aligned}$$

Soit :

$$nh = \frac{4}{3}mH_n\sqrt{2gH_n} \text{ ou } H_n = \left(\frac{3nh}{4m\sqrt{2g}}\right)^{2/3}$$

Les niveaux d'énergie E_n sont tels que :

$$E_n = mgH_n = mg\left(\frac{3h}{4m\sqrt{2g}}\right)^{2/3} n^{2/3} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

II.C- Détermination des états stationnaires par résolution de l'équation de Schrödinger

$$V(z) = \begin{cases} mgz & \text{pour } z \geq 0 \\ +\infty & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

II.C.1) Un état stationnaire est un état pour lequel la densité de probabilité de présence $|\psi|^2$ est indépendante du temps t.

II.C.2) Équation de Schrödinger stationnaire pour $z \geq 0$:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi &= E\psi \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + mgz\varphi(z) &= E\varphi(z) \\ -\frac{\hbar^2}{2m\ell_g^2}\frac{d^2\varphi(z)}{d\zeta^2} + mg\ell_g\zeta\varphi(z) &= \varepsilon\varepsilon_g\varphi(z) \\ -\frac{\hbar^2}{2m\ell_g^3}\frac{d^2\varphi(z)}{d\zeta^2} + mg\zeta\varphi(z) &= \varepsilon mg\varphi(z) \\ -\frac{\hbar^2}{2m^2g\ell_g^3}\frac{d^2\varphi(z)}{d\zeta^2} + \zeta\varphi(z) &= \varepsilon\varphi(z) \end{aligned}$$

$\frac{\hbar^2}{2m^2g\ell_g^3} = 1$, Soit :

$$-\frac{d^2\varphi(z)}{d\zeta^2} + \zeta\varphi(z) = \varepsilon\varphi(z)$$

Concours National Commun — Session 2018 — http://cpgemaroc.com

II.C.3)

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0 & \text{pour } z < 0 \\ \text{non nulle} & \text{pour } z \geq 0 \end{cases}$$

- par continuité de $\varphi(z = \ell_r \zeta)$ en $z = 0$ (et, donc, en $\zeta = 0$) :

$$\varphi(\zeta = 0) = 0 \quad \underline{\text{Condition (1) aux limites}}$$

- la condition de normalization de ψ définit par $\int_0^{+\infty} |\psi|^2 dz = 1 = \ell_g \int_0^{+\infty} |\varphi(\zeta)|^2 d\zeta$, exige que :

$$\varphi(\zeta \to \infty) \to 0 \quad \underline{\text{Condition (2) aux limites}}$$

II.C.4)

$$\varphi_n(z) = \mathcal{N} Ai(\zeta - \varepsilon_n) \;\; ; \;\; \varepsilon_1 = \frac{E_1}{\varepsilon_g} \;\text{ et }\; \varepsilon_2 = \frac{E_2}{\varepsilon_g}$$

$$\varphi(\zeta = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ai(-\varepsilon_n) = 0$$

$$\underline{\text{Condition (1) aux limites}} : \;\; \varphi(\zeta = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ai(-\varepsilon_n) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} -\varepsilon_1 = -2,34 \\ -\varepsilon_2 = -4,09 \end{cases}$$

$$\text{Soient :} \quad \left\| \begin{array}{l} E_1 = 2,34 \times \varepsilon_g = 2,34 \times 9,6 \times^{-32} = 2,25 \times 10^{-31}\ J \\ E_2 = 4,09 \times \varepsilon_g = 4,09 \times 9,6 \times^{-32} = 3,93 \times 10^{-31}\ J \end{array} \right.$$

D'après la Question II.B- :

$$E_1 = mg\left(\frac{3h}{4m\sqrt{2g}}\right)^{2/3} = 1,67 \times 9,81 \times \left(\frac{3 \times 6,62 \times 10^{-34}}{4 \times 1,67 \times 10^{-27} \times \sqrt{2 \times 9,81}}\right)^{2/3} = 2,71 \times 10^{-31}\ J$$

$$E_2 = 2^{2/3} \times E_1 = 4,30 \times 10^{-31}\ J$$

$$E_1 = 1,20 \times E_1^{\text{approche semi-classique}}$$
$$E_2 = 1,09 \times E_2^{\text{approche semi-classique}}$$

II.C.5) Densités de probabilités

$$\|\varphi_n\|^2 = \mathcal{N}^2 \left(Ai(\zeta - \varepsilon_n)\right)^2$$

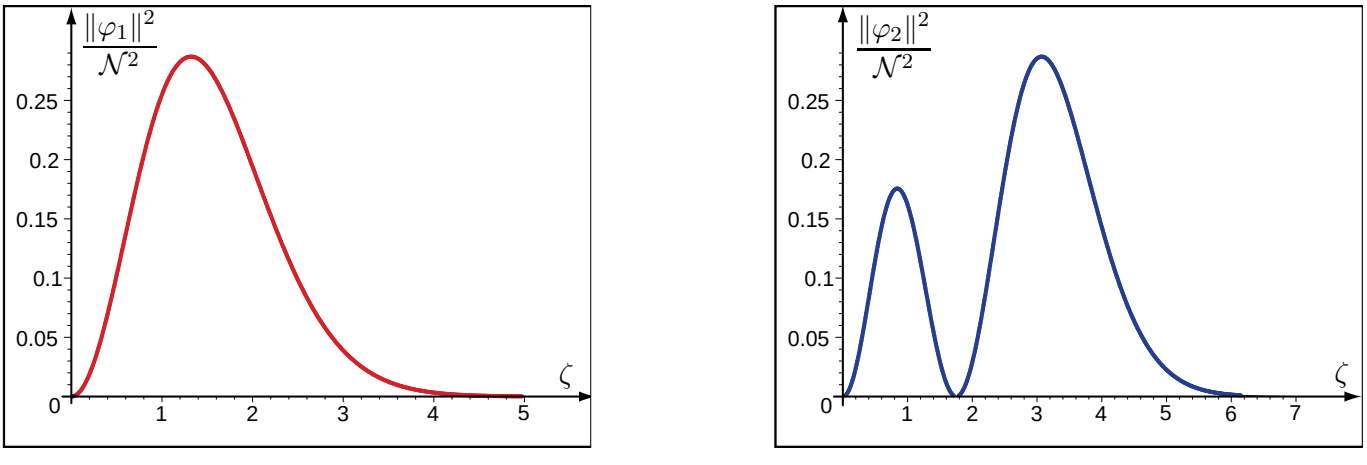

Figure 4 – Allures des densités de probabilités $\|\varphi_1\|^2$ et $\|\varphi_2\|^2$

II.D- Spectroscopie résonante gravitationnelle

Concours National Commun — Session 2018 — http://cpgemaroc.com

II.D.1) Niveaux d'énergie dans le guide à neutrons

$$\psi_I(z,t,x) = \varphi_I(z)\exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)\exp\left(i\left(kx-\omega t\right)\right)$$

a)

- Le facteur $\exp\left(i\left(kx-\omega t\right)\right)$ décrit la propagation progressive dans le sens des x croissants !
- L'équation de Schrödinger dépendante du temps :

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi_I(z,t,x)}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_I(z,t,x) + V(z,t)\psi_I(z,t,x) \\ i\hbar\frac{\partial\psi_I(z,t,x)}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi_I(z,t,x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_I(z,t,x)}{\partial z^2}\right) + mgz\psi_I(z,t,x) \\ i\hbar\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)\psi_I(z,t,x) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\varphi_I(z)}\frac{d^2\varphi_I(z)}{dz^2} - k^2\right)\psi_I(z,t,x) + mgz\psi_I(z,t,x) \end{aligned}$$

Soit $\varphi_I(z)$ solution de l'équation :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_I(z)}{dz^2} + mgz\varphi_I(z) &= \left(E - \frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)\varphi_I(z) = E_I\varphi_I(z) \\ \text{Le niveau d'énergie associée} \quad E_I &= E - \frac{\hbar^2k^2}{2m} \end{aligned}$$

b) En absence de pesanteur $V(z)=0$; l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_I(z)}{dz^2} = E_I\varphi_I(z) \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\varphi_I(z)}{dz^2} + \frac{2mE_I}{\hbar^2}\varphi_I(z) = 0$$

Solution : on pose $\alpha^2 = \dfrac{2mE_I}{\hbar^2}$ et on suppose que $E > \dfrac{\hbar^2k^2}{2m}$; c'est à dire $E_I > 0$.

$$\varphi_I(z) = A\cos\alpha z + B\sin\alpha z \quad ; \quad A \text{ et } B \text{ deux constantes non tous nulles}$$

Conditions aux limites :

- $\varphi_I(z=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$
- $\varphi_I(z=H) = 0 \quad \Rightarrow \quad B\sin(\alpha H) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha H = n\pi \;\;,\;\; n \in \mathbb{N}^*$

Le spectre d'énergie correspond, donc, à celui d'un puits de potentiel infini de largeur H. Les valeurs d'énergie accessible :

$$E_{\infty,n} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mH^2} \;\;,\;\; n \in \mathbb{N}^*$$

Si $E < \dfrac{\hbar^2k^2}{2m}$ (c'est à dire $E_I < 0$), l'équation s'écrit :

$$\frac{d^2\varphi_I(z)}{dz^2} - \beta^2\varphi_I(z) = 0 \quad \textit{avec} \quad \beta^2 = \frac{-2mE_I}{\hbar^2} > 0$$

La solution s'écrit : $\varphi_I(z) = C\cosh\alpha z + D\sinh\alpha z$; C et D deux constantes non tous nulles
Conditions aux limites :

- $\varphi_I(z=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$
- $\varphi_I(z=H) = 0 \quad \Rightarrow \quad D\sinh(\alpha H) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D = 0$

Absurde ! ! ce qui justifie l'hypothèse précédente faite sur le signe de E_I (c'est à dire $E > \dfrac{\hbar^2k^2}{2m}$).

Concours National Commun — Session 2018 — http://cpgemaroc.com

c) Pour $H \ll \ell_g$:

$$\ell og\varepsilon_1 = \alpha \ell og\left(\frac{H}{\ell_g}\right) + \beta \ , \ \alpha : \text{ la pente de l'asymptote dans la limite } H \ll \ell_g$$

$$\begin{aligned} \text{Soient} \ : \ \ell og 10^3 &= \alpha \ell og 10^{-1} + \beta \\ \ell og 10^1 &= \alpha \ell og 10^0 + \beta \ \Rightarrow \ \beta = 1 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{3-1}{-1} = -2 \end{aligned}$$

d) Cas d'un neutron

$$\begin{aligned} \text{D'après la Question } II.A.6) \ : \ \ell_g &= 5,86\,\mu m \\ \text{D'après le } \textbf{Document 4} \ : \ H &= 25,5\,\mu m \ \Rightarrow \ \frac{H}{\ell_g} = \frac{25,5}{5,86} = 4,35 > 1 \end{aligned}$$

II.D.2) Absorption sélective des neutrons dans le guide

a) La relation fondamental de la dynamique appliquée à un neutron :

$$\begin{aligned} m_n \overrightarrow{\gamma} &= m_n \overrightarrow{g} \\ \text{projection suivant } Ox \ : \ \gamma_x &= 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = \text{constante} = v_x(t=0) \\ x(t) &= v_x t + x_o \\ \text{projection suivant } Oz \ : \ \gamma_z &= -mg \\ z(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + H_n \end{aligned}$$

L'origine des temps utilisé : $x(t=0) = x_o$ et $z(t=0) = H_n$ (Cf. Figure ci-contre)

$$\begin{aligned} L_n &= x_2 - x_o \text{ tels que } z(x_1) = 0 \text{ à l'instant } t_1 \\ z(t_1) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2H_n}{g}} \\ t_2 &= 2t_1 \text{ et } v_x = \frac{L_n}{t_2} \ \Rightarrow \ L_n = 2t_1 v_x = 2v_x\sqrt{\frac{2H_n}{g}} \end{aligned}$$

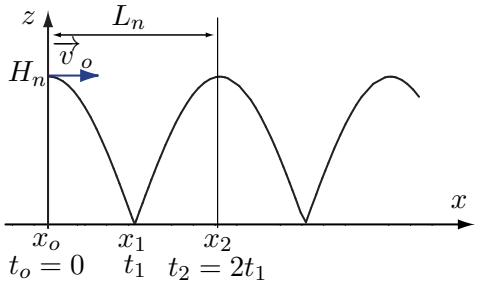

Figure 5 – Rebonds d'un neutron dans un guide

b) D'après le **Document 4** : $H = 25,5\,\mu m$

$$\text{Soient : } \ H_1 < H \ , \ H_2 < H \ \text{ et } \ H_3 > H$$

Conclusion : Seules H_1 et H_2 sont accessibles ; par conséquent les énergies des neutrons susceptibles de traverser le guide sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= mgH_1 = 1,67 \times 10^{-27} \times 9,81 \times 13,4 \times 10^{-6} = 2,20 \times 10^{-31}\ J \\ \varepsilon_2 &= mgH_2 = 1,67 \times 10^{-27} \times 9,81 \times 24,0 \times 10^{-6} = 3,93 \times 10^{-31}\ J \end{aligned}$$

c) Effet Tunnel

L'effet Tunnel en mécanique quantique est le fait qu'une particule puisse franchir une barrière de potentielle même si son énergie reste inférieur à la hauteur de cette barrière.

Concours National Commun — Session 2018 — http://cpgemaroc.com

d) Application numérique

$$T_1 \simeq \exp\left(-2\left(\frac{H-H_1}{\ell_g}\right)^{3/2}\right) = \exp\left(-2\left(\frac{25,5-13,4}{5,85}\right)^{3/2}\right) = 2,65\times10^{-3}$$

e) Entre deux rebonds successives p et $p+1$, la probabilité d'absorption est T_1. P_p est la probabilité qu'un neutron **n'**ait **pas** été absorbé après p rebonds, soit :

$$\underbrace{1-T_1}_{\substack{\text{probabilité de}\\ \textbf{non} \text{ absorption}}} = \frac{P_{p+1}}{P_p} = \frac{P_{p-1}}{P_p} = \frac{P_{p-1}}{P_{p-2}} = ... = \frac{P_o}{P_1}$$

ou :

$$\frac{P_{p+1}}{P_1} = (1-T_1)^{p+1}$$

P_1 est la probabilité qu'un neutron **n'**ait **pas** été absorbé après <u>un seul</u> rebond. (H_n correspondant est telle que $H_n < H \;\Rightarrow\; P_1 = 1$). Soit :

$$P_p = (1-T_1)^p$$

f) Après avoir parcouru une distance x, un neutron rebondit $n = \dfrac{x}{L_1}$ fois. La probabilité :

$$P(x) = (1-T_1)^{\frac{x}{L_1}} \sim 1 - \frac{x}{L_1}T_1 = 1 - \frac{x}{D_1}$$

$D_1 = \dfrac{L_1}{T_1} = \dfrac{2v_x}{T_1}\sqrt{\dfrac{2H_1}{g}}$ est un longueur caractéristique d'absorption.

> *le développement limité au voisinage de* 0 *à l'ordre* 1 *du type :*
>
> $$(1-X)^\alpha \sim 1-\alpha X \quad ; \quad X \ll 1$$

g)

$$D_2 = \frac{L_2}{T_2} = \frac{2v_x}{T_2}\sqrt{\frac{2H_2}{g}} \;\Rightarrow\; \frac{D_2}{D_1} = \frac{T_1}{T_2}\sqrt{\frac{H_2}{H_1}}$$

<u>Application numérique :</u>

$$T_2 \simeq \exp\left(-2\left(\frac{H-H_2}{\ell_g}\right)^{3/2}\right) = \exp\left(-2\left(\frac{25,5-24,0}{5,85}\right)^{3/2}\right) = 771,81\times10^{-3}$$

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{2,65}{771,81}\sqrt{\frac{24,0}{13,4}} = 4,60\times10^{-3} \;\Rightarrow\; D_1 = 811,75\,cm$$

Document 4 : $D = 15,0\,cm$

$$D_2 < D \quad \text{et} \quad D_1 \gg D$$

<u>Conclusion</u> : Seules les neutrons d'énergie ε_1 sont transmis par le guide. Le guide se comporte comme un "filtre" sélectif au terme de l'énergie des neutrons ! !

> Le calcul direct de D_1 est donnée par l'expression :
>
> $$D_1 = \frac{L_1}{T_1} = \frac{2v_x}{T_1}\sqrt{\frac{2H_1}{g}} = \frac{2\times6,50}{2,65\times10^{-3}}\sqrt{\frac{2\times13,4\times10^{-6}}{9,81}} = 810,83\ cm$$

Concours National Commun — Session 2018 — http://cpgemaroc.com

II.D.3) Mesure de l'intensité du champ de pesanteur

a)

- $\mathcal{R}'$ est en translation non uniforme par rapport au repère terrestre Galiléen ; $\mathcal{R}'$ n'est, donc, pas Galiléen.
- la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f}_{ie} = -m\overrightarrow{a}_{ie} = -ma(t)\overrightarrow{e}_z$

$$\delta W_{ie} = -ma(t)\overrightarrow{e}_z \cdot dz\overrightarrow{e}_z = -ma(t)dz = -dV_{ie}(z,t)$$

$$V_{ie}(z,t) = ma(t)z \quad \text{ou} \quad V_{II}(z,t) = m(g+a(t))z$$

b) On cherche une solution de l'équation de Schrödinger sous la forme suivante :

$$\varphi_{II}(z,t) = \underline{c}_{-1}(t)\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right)\varphi_1(z) + \underline{c}_{-3}(t)\exp\left(-i\frac{E_2 t}{\hbar}\right)\varphi_3(z)$$

Avec :

$$\varphi_1(z) = \mathcal{N}Ai(\zeta - 2,34) \quad \text{et} \quad \varphi_1(z) = \mathcal{N}Ai(\zeta - 5,52)$$

L'équation de Schrödinger vérifiée par $\psi_{II}(z,t)$:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_{II}(z,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_{II}(z,t)}{\partial z^2} + m[g+a(t)]z\psi_{II}(z,t) \quad (\mathbf{ES})$$

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial\psi_{II}(z,t)}{\partial t} &= i\hbar\left[\frac{d\underline{c}_{-1}(t)}{dt}\varphi_1(z)\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right) + \frac{d\underline{c}_{-3}(t)}{dt}\varphi_3(z)\exp\left(-i\frac{E_3 t}{\hbar}\right)\right] \\
&+ E_1\underline{c}_{-1}(t)\varphi_1(z)\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right) + E_3\underline{c}_{-3}(t)\varphi_3(z)\exp\left(-i\frac{E_3 t}{\hbar}\right) \\
m[g+a(t)]z\psi_{II}(z,t) &= m[g+a(t)]z\left[\underline{c}_{-1}(t)\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right)\varphi_1(z) + \underline{c}_{-3}(t)\exp\left(-i\frac{E_2 t}{\hbar}\right)\varphi_3(z)\right] \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_{II}(z,t)}{\partial z^2} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_1(z)}{dz^2}\underline{c}_{-1}(t)\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_3(z)}{dz^2}\underline{c}_{-3}(t)\exp\left(-i\frac{E_3 t}{\hbar}\right)
\end{aligned}$$

$$\text{Avec} \ : \ \begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\varphi_1(z)}{dz^2} + mgz\varphi_1(z) = E_1\varphi_1(z) \\ \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\varphi_3(z)}{dz^2} + mgz\varphi_3(z) = E_3\varphi_3(z) \end{cases}$$

Après simplifications, l'équation (**ES**) s'écrit :

$$\begin{aligned}
i\hbar\left[\frac{d\underline{c}_{-1}(t)}{dt}\varphi_1(z)\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right) + \frac{d\underline{c}_{-3}(t)}{dt}\varphi_3(z)\exp\left(-i\frac{E_3 t}{\hbar}\right)\right] &= ma(t)z\underline{c}_{-1}(t)\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right)\varphi_1(z) \\
&+ ma(t)z\underline{c}_{-3}(t)\exp\left(-i\frac{E_2 t}{\hbar}\right)\varphi_3(z)
\end{aligned}$$

pour faire apparaître les cœfficients Z_{11}, Z_{13} et Z_{33} ; on multiplie les deux membres de l'égalité de l'équation précédente à la fois par $\varphi_1(z)$ et par $\varphi_3(z)$ puis on intègre par rapport à z sur l'intervalle $[0,+\infty[$:

$*$ multiplication par φ_1 suivie d'une intégration :

$\diamond$ Le premier terme de l'égalité

$$i\hbar\left[\frac{d\underline{c}_{-1}(t)}{dt}\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right)\underbrace{\int_0^{+\infty}\varphi_1^2(z)dz}_{1} + \frac{d\underline{c}_{-3}(t)}{dt}\exp\left(-i\frac{E_3 t}{\hbar}\right)\underbrace{\int_0^{+\infty}\varphi_1(z)\varphi_3(z)dz}_{0}\right]$$

$$= i\hbar\frac{d\underline{c}_{-1}(t)}{dt}\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right)$$

Concours National Commun — Session 2018 — http://cpgemaroc.com

◇ Le second terme de l'égalité

$$ma(t)\underline{c}_{-1}(t)\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right)\underbrace{\int_0^{+\infty} z\varphi_1^2(z)dz}_{Z_{11}} + ma(t)\underline{c}_{-3}(t)\exp\left(-i\frac{E_3 t}{\hbar}\right)\underbrace{\int_0^{+\infty} z\varphi_1(z)\varphi_3(z)dz}_{Z_{13}}$$

$$= ma(t)\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right)\left[\underline{c}_{-1}(t)Z_{11} + \underline{c}_{-3}(t)\exp\left(-i\frac{E_3 t}{\hbar}\right)Z_{13}\right]$$

◇ L'égalité des deux terme donne :

$$i\hbar\frac{d\underline{c}_{-1}(t)}{dt} = ma(t)\left[\underline{c}_{-1}(t)Z_{11} + \underline{c}_{-3}(t)\exp\left(-i\Omega_R t\right)Z_{13}\right]$$

∗ multiplication par φ_3 suivie d'une intégration :

◇ Le premier terme de l'égalité

$$i\hbar\left[\frac{d\underline{c}_{-3}(t)}{dt}\exp\left(-i\frac{E_3 t}{\hbar}\right)\underbrace{\int_0^{+\infty}\varphi_3^2(z)dz}_{1} + \frac{d\underline{c}_{-1}(t)}{dt}\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right)\underbrace{\int_0^{+\infty}\varphi_1(z)\varphi_3(z)dz}_{0}\right]$$

$$= i\hbar\frac{d\underline{c}_{-3}(t)}{dt}\exp\left(-i\frac{E_3 t}{\hbar}\right)$$

◇ Le second terme de l'égalité

$$ma(t)\underline{c}_{-3}(t)\exp\left(-i\frac{E_3 t}{\hbar}\right)\underbrace{\int_0^{+\infty} z\varphi_3^2(z)dz}_{Z_{33}} + ma(t)\underline{c}_{-1}(t)\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right)\underbrace{\int_0^{+\infty} z\varphi_1(z)\varphi_3(z)dz}_{Z_{13}}$$

$$= ma(t)\exp\left(-i\frac{E_3 t}{\hbar}\right)\left[\underline{c}_{-3}(t)Z_{33} + \underline{c}_{-1}(t)\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right)Z_{13}\right]$$

◇ L'égalité des deux terme donne :

$$i\hbar\frac{d\underline{c}_{-3}(t)}{dt} = ma(t)\left[\underline{c}_{-3}(t)Z_{33} + \underline{c}_{-1}(t)\exp\left(i\Omega_R t\right)Z_{13}\right]$$

c) Conditions initiales $\underline{c}_{-1}(t=0) = 1$ et $\underline{c}_{-3}(t=0=0)$

$$\varphi_{II}(z, t=0) = \exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right)\varphi_1(z)$$

Le neutron se trouve dans l'état d'énergie E_1 qui correspond au seul état transmis par le guide. (Cf. la question g) de la section II.D.2))

d)

$$a(t)=0 \quad : \quad \begin{cases} i\hbar\dfrac{d\underline{c}_{-1}(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{c}_{-1}(t) = \text{constante} = \underline{c}_{-1}(t=0) = 1 \\ \\ i\hbar\dfrac{d\underline{c}_{-3}(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{c}_{-3}(t) = \text{constante} = \underline{c}_{-3}(t=0) = 0 \end{cases}$$

Le résultat peut être interpréter par le fait que le neutron ne quitte pas son état initiale d'énergie E_1.

Concours National Commun — Session 2018 — http://cpgemaroc.com

e) $a(t) = a_o \cos \Omega t$

- pour $\Omega \neq_O mega_R$; a_o constant
  - ▶ L'état d'énergie E_1 est maintenu pendant $\dfrac{100\pi}{\Omega_R}$, avec $|\underline{c}_{-1}|^2$ qui diminue quand Ω augmente !
  - ▶ L'état d'énergie E_3 apparaît et disparaît périodiquement à un période qui diminue quand Ω augmente !
- pour $\Omega = \Omega_R$; a_o variable
  - ▶ Les deux états d'énergies E_1 et E_3 peuvent cœxister (avec même à des instants $|\underline{c}_{-1}|^2 = |\underline{c}_{-3}|^2 = 0,5$).
    - – quand $|\underline{c}_{-1}|^2$ est maximal, on a le seul état d'énergie E_1 !
    - – quand $|\underline{c}_{-3}|^2$ est maximal, on a le seul état d'énergie E_3 !
  - ▶ Le nombre d'états augmente avec a_o !

pour $\Omega = \Omega_R$, les $|\underline{c}_{-i}|^2$ atteignent leur valeurs maximale $(= 1)$ pendant des instants qui augmentent avec a_o : la réponse sera, donc, maximale ; on peut parler de la résonance !

f)

g) *Fréquence de résonance* $f_R = 464\ Hz$

$$\begin{aligned} & & f_R &= \frac{\Omega_R}{2\pi} = \frac{E_3 - E_1}{2\pi\hbar} = \frac{E_3 - E_1}{h} \\ E_3 = \varepsilon_3\varepsilon_g \text{ et } E_1 = \varepsilon_1\varepsilon_g \quad \Rightarrow \quad & f_R &= \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{h}\varepsilon_g = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{h} mg\ell_g = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{h} mg \left(\frac{\hbar^2}{2gm^2}\right)^{1/3} \\ & &= \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{h} \left(\frac{\hbar^2 m}{2}\right)^{1/3} g^{2/3} \\ & \Rightarrow \quad g &= \sqrt{\frac{2}{m\hbar^2}} \left(\frac{hf_R}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}\right)^{3/2} \\ \varepsilon_3 = 5,52 \text{ et } \varepsilon_1 = 2,34 \quad \Rightarrow \quad & g &= \sqrt{\frac{2}{1,67 \times 10^{-27} \times 1,05^2 \times 10^{-68}}} \left(\frac{464 \times 6,62 \times 10^{-34}}{5,52 - 2,34}\right)^{3/2} \\ & &= 9,89442904\ ms^{-2} \\ \Delta f_R = 1,0\ Hz \text{ et } & \Delta g &= \frac{3}{2} g \frac{\Delta f_R}{f_R} = 0,031986303\ ms^{-2} \end{aligned}$$

Soit :

$$g = (9,89 \ \pm \ 0,03)\ ms^{-2}$$

h) Soit $z(t)$ le déplacement du miroir (M') :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z(t)}{dt^2} &= a(t) = a_o \cos \Omega t \\ \Rightarrow \quad z(t) &= -\frac{a_o}{\Omega^2} \cos \Omega t + z_o \end{aligned}$$

À la fréquence de résonance $\Omega = \Omega_R = 2\pi f_R$, l'amplitude de variation de $z(t)$ est :

$$\mathcal{A}_R = \frac{a_o}{\Omega_R^2} = \frac{a_o}{(2\pi f_R)^2} = \frac{6,10}{(2 \times 3,14 \times 464)^2} = 0,72\ \mu m$$

i) En utilisant la relation entre largeur spectrale $\Delta\omega$ et durée Δt : $\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 2\pi$

$$\begin{aligned} \Delta t \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega} &= \frac{1}{\Delta f} \quad \text{avec} \quad \Delta f \approx 60\ Hz \quad (Cf. \textbf{Figure 9}) \\ &= \frac{1}{60} \approx 0,02\ s \end{aligned}$$

Concours National Commun —Session 2018— http://cpgemaroc.com

D'après le **Document 4**, la durée est estimée à : $\Delta t_o = \dfrac{d}{v_x} = \dfrac{20,0}{6,50} \approx 0,03\ s$

Δt_o et Δt sont comparables à 85% près !

Concours National Commun — Session 2018 — http://cpgemaroc.com